Freiräume – Richtlinien – Treffpunkte: Mathematikunterricht während der obligatorischen Schulzeit

Vorschläge zur Harmonisierung

Espaces de liberté – lignes directrices – points de convergence: l’enseignement des mathématiques durant la scolarité obligatoire

Proposition d’harmonisation

Schweizerische Konferenz der kantonalen Erziehungsdirektoren (EDK)
Conférence suisse des directeurs cantonaux de l’instruction publique (CDIP)
Bern 1998

Freiräume – Richtlinien – Treffpunkte: Mathematikunterricht während der obligatorischen Schulzeit

Vorschläge zur Harmonisierung

Schweizerische Konferenz der kantonalen Erziehungsdirektoren (EDK)
Bern 1998

Dieser Bericht ist Teil eines EDK-Projektes. Es ist vorgesehen dazu eine Vernehmlassung zu machen.

Herausgeber:
Schweizerische Konferenz der kantonalen Erziehungsdirektoren (EDK)
Ausschuss Mathematik der Pädagogischen Kommission

Französische Ausgabe:
Espaces de liberté – lignes directrices – points de convergence: L’enseignement des mathématiques durant la scolarité obligatoire

Zu beziehen bei:
Sekretariat EDK, Zähringerstrasse 25, Postfach 5975, 3001 Bern

Druck:
Schüler AG, Biel

Inhalt

Vorwort

Im Jahre 1982 hat die EDK Empfehlungen zum Mathematikunterricht erlassen. Diese *Treffpunkte und Richtlinien* haben in den vergangenen 15 Jahren wesentlich zur Harmonisierung der Lehrplan- und Lehrmittelarbeiten in der Schweiz beigetragen. Die vom Ausschuss Mathematik der Pädagogischen Kommission organisierten Foren zu Einzelaspekten des Mathematikunterrichts haben dabei die Harmonisierungs- und Koordinationsbemühungen der EDK in erfolgreicher Art unterstützt und gefördert.

Wie auch in anderen Fachbereichen ist aber die Entwicklung in der Mathematik nicht stehengeblieben. Unter Berücksichtigung der neueren Tendenzen und im Bestreben, den Kantonen und den Lehrkräften wiederum qualitativ aktuelle Vorschläge zur Verfügung zu stellen, hat deshalb der Ausschuss Mathematik das vorliegende Dokument *Freiräume – Richtlinien – Treffpunkte* für den Mathematikunterricht während der obligatorischen Schulzeit erarbeitet. Das Dokument, das von einer grossen Zahl von Spezialisten in der Entstehung aktiv mit Rat und Tat begleitet wurde, fand schliesslich auch eine breite Unterstützung am letzten vom nun aufgelösten Ausschuss Mathematik durchgeführten Forum.

Die seit dem 1. Januar 1997 neu geschaffene Kommission für Allgemeine Bildung (KAB) liess sich von der Qualität des Dokuments überzeugen und beschloss, das Dokument zu publizieren und – entsprechend den EDK-Statuten – eine Vernehmlassung durchzuführen. Im Anschluss daran wird sich zeigen, ob die Antworten die Herausgabe von neuen Empfehlungen zum Mathematikunterricht begründen helfen.

Januar 1998

Hans Hofer, Regierungsrat
Präsident der Kommission
Allgemeine Bildung (KAB)

Ziele des Dokuments

– Zur Koordination des Mathematikunterrichts in der Schweiz beitragen.
– Einen schweizerischen Meinungsaustausch über didaktische Forschungen anregen und einen Mathematikunterricht ermöglichen, der diesen Resultaten Rechnung trägt.

Mathematikunterricht heute

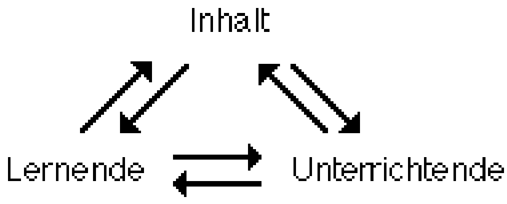
Warum?

Der Mathematikunterricht soll dazu beitragen, Probleme zu lösen! Dieses Ziel gilt nach wie vor. Sollen jedoch die einzelnen Bürgerinnen und Bürger Probleme mit Hilfe der Mathematik lösen können, dann muss die Mathematik nahe an sie herangeführt werden. Sie müssen Gelegenheit haben, sich persönlich mit Mathematik auseinanderzusetzen. Die Mathematik muss in ihrer Reichweite liegen und ihre Grundkonzepte müssen erlebt und teilweise selbst erarbeitet werden.

Das Ziel eines Mathematikunterrichts darf demzufolge nicht sein, Fertigprodukte zum Lösen einzelner Probleme zu liefern. Vielmehr geht es darum, dass möglichst viele Personen Mathematik von Anfang an in Situationen erfahren, die für sie sinnvoll sind.

Wie?

Dieses Dokument stützt sich auf die neuesten fachdidaktischen Forschungen zum Lehren und Lernen von Mathematik. Insbesondere steht das wohlbekannte didaktische Dreieck im Zentrum der Überlegungen:



– Die Lernenden werden von den Unterrichtenden zu aktivem Handeln angeregt und begegnen so dem Wissen.
– Die Unterrichtenden organisieren Lernprozesse für die Lernenden. Sie berücksichtigen aktuellen Wissensstand und momentane Fähigkeiten der Lernenden.
– Inhalt und Wissen erfahren in diesem Zusammenhang eine neue Sichtweise. Diese aufzuzeigen ist ein wesentlicher Bestandteil dieses Dokuments.

Unterrichtsmethoden werden heute und morgen weiterentwickelt. Mathematisches Wissen, wie es in diesem Dokument beschrieben ist, sollte diese Entwicklungen weitgehend überdauern. Darum beschreibt dieses Dokument vorwiegend Inhalte. Die dahinterstehende Didaktik wird in den Kommentaren beschrieben und dient der Illustration.

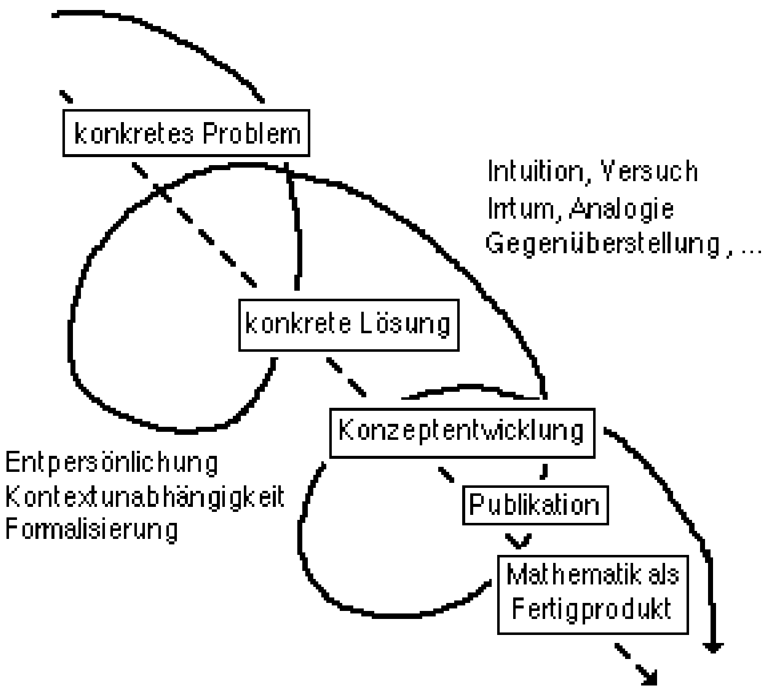
Definitionen

Freiräume

Im Vergleich zum Dokument aus dem Jahre 1982, wird mit den Freiräumen in diesem Dokument etwas völlig Neues angesprochen. Unter *Freiräumen* werden die gesamten Rahmenbedingungen verstanden, in denen mathematische Begriffe wachsen können. Es handelt sich nicht um Verfahren, sondern um grundlegende Voraussetzungen, ohne die Mathematik nicht existieren könnte.

Auf die Lernenden bezogen heisst das: Wenn sie Lösungen von sinnvollen Problemen suchen, wenn sie Irrwege gehen, mit andern Ideen austauschen, vergleichen, argumentieren und korrigieren, dann *betreiben* sie Mathematik.

Ebenso begnügen sich Mathematikerinnen und Mathematiker nicht mit dem Auswendiglernen mathematischer Konzepte und komplexer Überlegungen. Sie arbeiten auf eine umfassendere Art, etwa gemäss folgendem Schema:



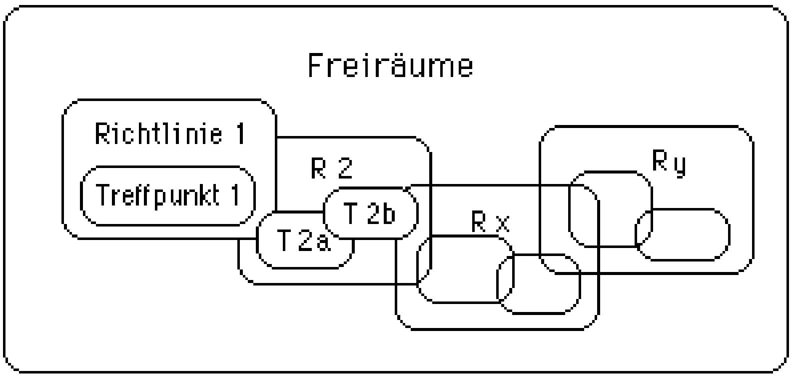
Mathematik betreiben und Mathematik lernen sind demnach zwei unabdingbar zusammengehörende Tätigkeiten. Beide erfordern eine gewisse Autonomie und Handlungsfreiheit, sowie aufmerksamen Umgang mit andern Personen und bereits vorhandenem Wissen.

Richtlinien und Treffpunkte

Hier geht es um Begriffe des mathematischen Wissens, welches insbesondere während der obligatorischen Schulzeit aufgebaut wird. Die *Richtlinien* sind eher globaler Natur und sind als eine Art Rückgrat des Mathematikunterrichts zu verstehen. Die *Treffpunkte* sind eher lokaler Natur. Sie beschreiben die zeitliche Entwicklung und Koordination der Inhalte. Zu jeder Richtlinie gehören einer oder mehrere Treffpunkte. Beide zusammen sind auf dem Hintergrund der *Freiräume* zu sehen.

Schematische Darstellung der Zusammenhänge zwischen Freiräumen, Richtlinien und Treffpunkten

Die Freiräume, Richtlinien und Treffpunkte sind untereinander vernetzt. Zwischen den einzelnen Richtlinien und Treffpunkten sind nicht immer klare Trennlinien möglich, Überschneidungen sind unvermeidlich. Das Schema soll dies verdeutlichen:



Freiräume

Freiraum 1 — ***Aus Situationen lernen***

Schülerinnen und Schüler lernen Mathematik, indem sie mit sinnvollen Situationen konfrontiert werden.

Kommentar

Geeignete Situationen können verschiedene Quellen haben:

- Erlebnisse und Experimente aus dem Alltag der Schülerinnen und Schüler
- sorgfältig vorbereitete Ausgangspunkte, die den Kern eines vorbestimmten mathematischen Inhalts betreffen
- bereits vorhandene mathematische Ergebnisse (siehe Freiraum 7) oder solche, die im Entstehen sind, beispielsweise zwei gegensätzliche Positionen innerhalb einer Klasse. Es kann auch sein, dass bei einer Untersuchung plötzlich die Kenntnis neuer Verfahren notwendig wird

Viele Situationen öffnen die Mathematik hin zu anderen Fächern und zur Welt. Die folgenden Freiräume sollen helfen, diese Sicht zu klären.

Freiraum 2 — ***Aus Natur, Kunst und Technik lernen***

Die Beziehungen zwischen Mathematik, Natur, Kunst und Technik werden anhand konkreter Situationen erlebt.

Kommentar

Eigenschaften der Ästhetik, der Regelmässigkeit, der Ordnung, der Harmonie, der Symmetrie berühren den Menschen von frühester Kindheit an. Sie sensibilisieren ihn für Phänomene der Mathematik. Es handelt sich daher um bevorzugte Aspekte der ganzen obligatorischen Schulzeit.

Die Situationen entstammen zahlreichen Gebieten, beispielsweise:

- Symmetrien in der Natur, Wachstum einer Pflanze
- Kunstwerke aus Malerei und Architektur
- Rhythmen, Poetik und Musik
- reguläre und halbreguläre Polyeder
- usw.

Freiraum 3 ***Aus Fehlern lernen***

Probieren, Unbekanntem angstfrei begegnen lernen und Fehler machen sind wichtige Prozesse beim Mathematiklernen.

Kommentar

Hindernisse sind wesentliche Bestandteile eines Lernprozesses. Schülerinnen und Schüler treffen beispielsweise auf solche Hindernisse, wenn sich altes Wissen einer neuen Erkenntnis anpassen soll oder wenn Kenntnislücken in einer speziellen Situation offenbar werden.

Oft sind Schülerinnen und Schüler nicht produktiv, weil sie die exakte Lösung eines Problems nicht kennen. Sie müssen daher auch bewusst lernen, «Fehler zu machen, um die Wahrheit zu erfahren».

Von der Arbeitstechnik her gesehen lohnt es sich, begangene Fehler und bekannte Stolpersteine aufzubewahren und für das eigene Lernen zu nutzen. Dies ermöglicht, die eigene Leistungsfähigkeit zu steigern und mathematische Begriffe besser zu erfassen.

Freiraum 4 ***Durch Kommunikation lernen***

Die Schülerinnen und Schüler lernen während der ganzen Schulzeit Mittel und Wege kennen, ihr eigenes Denken andern mitzuteilen.

Kommentar

Mathematische Begriffe sind im Gegensatz zu den Objekten der Naturwissenschaften reine Denkobjekte. Sie zu erklären bedarf einer symbolischen, oft recht komplexen Sprache. Die Schülerinnen und Schüler drücken sich vorerst mündlich und schriftlich mit ihren eigenen Worten, durch ihre eigenen Vorstellungen, Gesten, Bilder und Zeichnungen aus.

Die Unterrichtenden setzen formale mathematische Darstellungen und Verfahren nicht an den Anfang neuer Lerninhalte. Sie geben den Lernenden Gelegenheit, ihre Überlegungen vorerst in ihrer eigenen Sprache und mit ihren eigenen Veranschaulichungen darzustellen. Der Austausch verschiedener Gesichtspunkte ermöglicht es, die Sprache von einer persönlichen zu einer allgemeineren, von einer ganzen Gruppe anerkannten Ausdrucksweise bis hin zu formaleren Schreibweisen zu entwickeln.

Langfristig gesehen, lernen die Schülerinnen und Schüler, mathematische Dokumente in passender Form zu verfassen, die für sie selbst Sinn machen. Somit wird auch ein Lernen ermöglicht, das direkt von mathematischen Schriftstücken ausgeht.

Freiraum 5	***Gemeinsam lernen***

Beim Lernen von Mathematik sind Meinungsverschiedenheiten, Auseinandersetzungen über wahr und falsch, sowie die Herausarbeitung einer gemeinsamen Basis logischen Denkens, bezogen auf eine gegebene soziale Gruppe, von grundlegender Bedeutung.

Kommentar

Im mathematischen Denken gibt es Allgemeingültiges! Dieser Sachverhalt muss vorerst einmal im Klassenzimmer erlebt werden.

Gefundene Lösungswege und Erklärungen, wie sie in Freiraum 4 beschrieben wurden, werden einander gegenübergestellt und verglichen. Die Unterrichtenden halten mit ihrem Urteil eher zurück. Sie sind nicht immer Entscheidungsinstanz über wahr oder falsch. Sie geben dafür allen Lerngruppen Gelegenheit, einander ihre Argumente vorzustellen und sie kritisch zu überprüfen. Es können auch Fragen offen gelassen werden.

Daraus entwicklen sich Regeln, wie

- erkennen, ob ein Spezialfall vorliegt
- Gegenbeispiel angeben
- den gleichen Rechenvorgang mit anderen Ausgangszahlen durchführen
- überprüfen, ob eine Behauptung in der Literatur bereits bewiesen ist
- usw.

Freiraum 6	***Aus der Geschichte lernen***

Aus der Geschichte der Mathematik kann man Problemstellungen kennenlernen, durch welche Menschen zu mathematischen Erkenntnissen gekommen sind. Dies bereichert den eigenen Lernprozess.

Kommentar

Die Geschichte der Mathematik liefert viele geeignete Situationen für Lernprozesse. Ihre Behandlung sensibilisiert die Schülerinnen und Schüler für die Lebendigkeit und Entwicklung der Mathematik.

Einerseits begegnen die Lernenden einzelnen, gelösten und ungelösten Problemen der Mathematikgeschichte (z.B. Unendlichkeit der Primzahlen oder der Primzahlzwillinge, grösste bekannte Primzahl, Vierfarbensatz, Problem von Fermat, Abzählbarkeit der Polyominos usw.).

Andererseits erhalten sie Einblick in andere als heute in unserem Kulturraum gebräuchliche Zahlendarstellungen und Rechenvorgänge. Diese Beispiele können aus der Geschichte (z.B. römische oder babylonische Zahlenschreibweise) oder aus anderen Ländern (z.B. indische Multiplikation oder Gebrauch des Abakus) stammen.

Freiraum 7 — ***Aus der Mathematik selbst lernen***

Beim Mathematik Lernen ermöglichen bereits bekannte Resultate, sich neue Probleme zu stellen, Resultate zu überprüfen oder das systematische Lösen klassischer Problemstellungen zu üben.

Kommentar

Bereits bekannte Resultate, ob sie aus der Geschichte stammen oder von den Lernenden selbst gefunden wurden, geben gute Ausgangssituationen für weitere Untersuchungen, wie zum Beispiel:

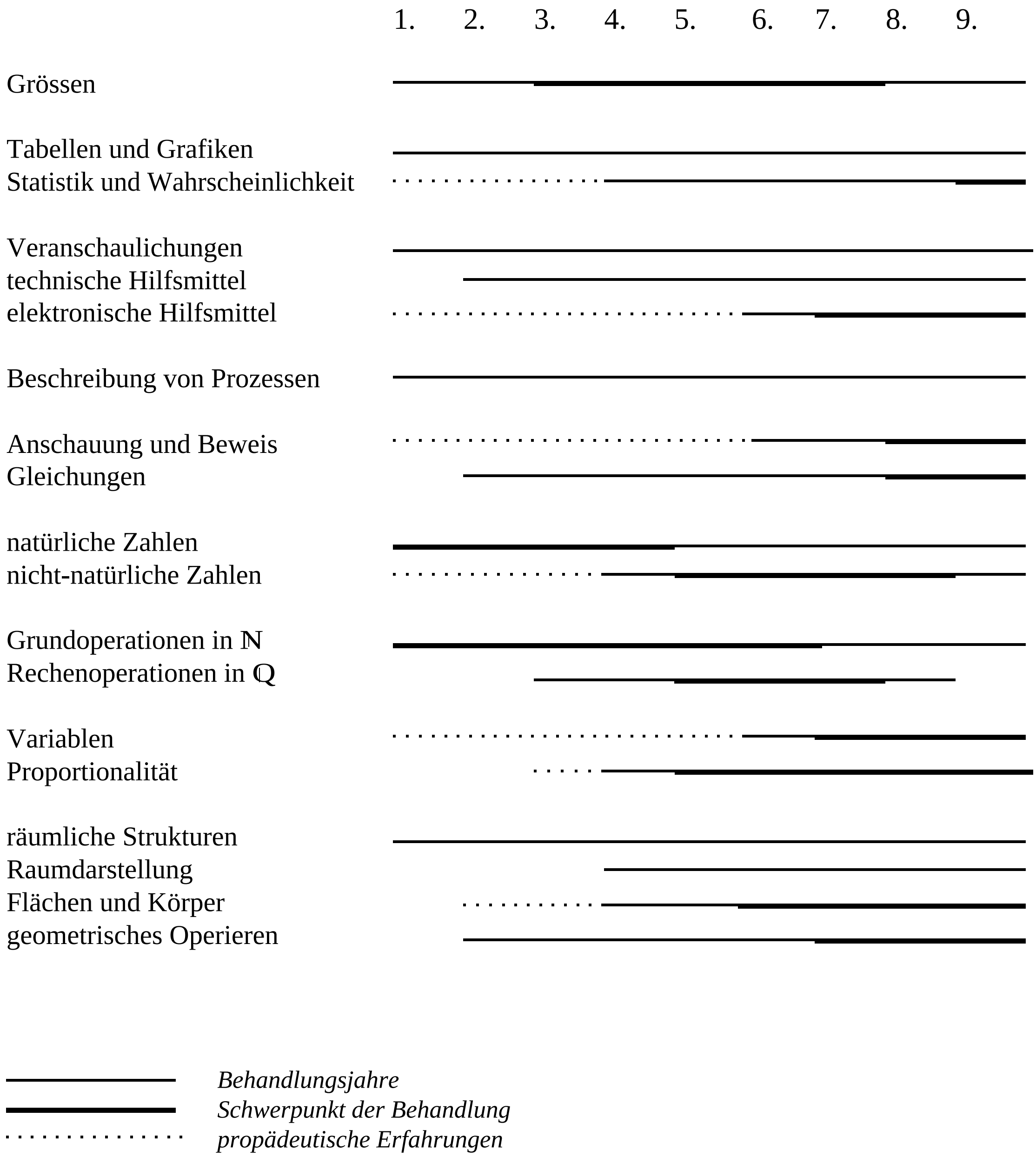
- Die ägyptische Multiplikation wird den Schülerinnen und Schülern vorgestellt. Sie können sie an Beispielen verifizieren und sich fragen, warum sie funktioniert, ob sie immer funktioniert und wie ein entsprechender Divisionsalgorithmus aussehen könnte.
- Der Satz von Pythagoras kann Ausgangspunkt sein. Was ändert, wenn man anstelle der Katheten- und Hypotenusenquadrate gleichseitige Dreiecke, andere regelmässige Vielecke nimmt. Bleibt die Eigenschaft erhalten?
- Ein Satz der Geometrie besagt, dass zwei beliebige Flächen in einer Ebene immer durch eine einzige Gerade gleichzeitig je in zwei gleich grosse Flächen zerlegt werden kann. Die Schülerinnen und Schüler können diese eigenartige Eigenschaft, ausgehend von verschiedenen Flächen, untersuchen.

Die erhaltenen Resultate können sowohl mit bereits bekanntem Wissen als auch mit Hilfe von Mathematikbüchern überprüft werden.

Einige Resultate der Mathematik lassen sich auf viele verschiedene Situationen des täglichen Lebens anwenden. Es macht also Sinn, diese Anwendbarkeit zu üben. Forschendes Arbeiten dient demzufolge auch dazu, mit den Schülerinnen und Schülern möglichst effiziente Automatismen zu entwickeln.

Richtlinien und Treffpunkte

Übersicht über die Behandlung der Treffpunkte im Unterricht



Richtlinie 1	**Mathematik und Realität**

Den Schülerinnen und Schülern werden Möglichkeiten aufgezeigt, wie sie Mathematik in der Realität erkennen und anwenden können.

Treffpunkt 1	**Grössen**

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Die Lernenden können mit verschiedenen Messinstrumenten umgehen. Sie kennen die verwendeten Masseinheiten sowie die Beziehungen zwischen den entsprechenden Grössen.

Kommentar

– Während der ganzen Schulzeit können die Schülerinnen und Schüler experimentieren, messen und vergleichen. Sie begegnen regelmässig konkreten Situationen ihres Alltags- und des Berufslebens. Die Ausgangssituationen müssen für die Lernenden sinnvoll sein. Der Einbezug des Alltags und fächerübergreifende Projekte sind daher bedeutungsvoll. Die Situationen dienen sowohl dazu, mathematisches Wissen aufzubauen als auch bereits vorhandenes Wissen anzuwenden.

– Der Mathematikunterricht trägt auch zum Aufbau von Sachkenntnissen bei, die primär nicht-mathematischer Natur sind. Dazu gehört Sachwissen aus Wirtschaft (Budget, Löhne, Buchhaltung, ...), aus Technik (Zahnradgetriebe, Gelenke, ...), aus Physik (Geschwindigkeit, Masse, Schwerpunkt, ...), aus Chemie (Legierungen, ...), aus Astronomie usw.

– Die Schülerinnen und Schüler entwickeln eine Vorstellung für die Grössenordnung von Mess- oder Rechnungsresultaten. Dazu gehören beispielsweise Grössenvorstellungen für:
  - die Dicke eines Papierblattes
  - die Anzahl Reiskörner in einem Kilogramm Reis
  - die Speicherkapazität eines Rechners
  - die Rauminhalte von einem Fingerhut bis zu dem der Erdkugel
  - die Zeit, welche Licht braucht, um von der Sonne auf die Erde zu gelangen
  - usw.

– Die Schülerinnen und Schüler können mindestens mit folgenden Messinstrumenten umgehen und kennen die Grenzen ihrer Messgenauigkeit:
  - Längenmessgeräte: Massstab, Schublehre, Doppelmeter, Meterband
  - Zeitmessgeräte: Uhr
  - Gewichtsmessgeräte: Waage
  - Volumenmessgeräte: Litermass
  - Winkelmessgeräte: Transporteur

  Sie können das Resultat einer Messung von einem durch Berechnung erhaltenen Resultat unterscheiden.

– Die Schülerinnen und Schüler lernen, Grössenordnungen und Masse durch Überlegung oder Rechnung abzuschätzen. Sie können übliche Masseinheiten gemäss ihren SI-Vorsätzen (milli-, centi-, dezi-, deka-, hekto-, kilo-) umrechnen. Sie kennen gebräuchliche, zusammengesetzte Masseinheiten wie diejenigen für Geschwindigkeit oder Dichte.

Richtlinie 2 ***Modellbildung***

Die Schülerinnen und Schüler lernen mathematische Modelle kennen und erfahren, dass es Unterschiede zwischen realen Sachverhalten und den sie beschreibenden mathematischen Modellen gibt.

Treffpunkt 2a ***Tabellen und Grafiken***

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Die Lernenden können die Realität mit einfachen Modellen beschreiben. Dazu gehört das Lesen von Tabellen und grafischen Darstellungen aus dem täglichen Leben. Für spezielle Situationen können sie selbst entsprechende Veranschaulichungen herstellen.

Treffpunkt 2b ***Statistik und Wahrscheinlichkeit***

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Die Lernenden können statistische Darstellungen lesen und in einfachen Fällen Wahrscheinlichkeiten für zufällige Ereignisse angeben.

Kommentar

– Die Schülerinnen und Schüler erfahren, dass ein mathematisches Modell eine Vereinfachung der Realität und nicht die Realität selbst ist. Das Modell ermöglicht innerhalb gewisser Grenzen einfache Berechnungen mit genügender Genauigkeit. Ist die Genauigkeit nicht mehr optimal oder werden die Grenzen überschritten, so muss das Modell verfeinert werden.

  Beispiel: Die Kosten einer Ware sind direkt proportional zu ihrem Gewicht. Dies stimmt in der Regel nur für gerundete Beträge und innerhalb der Grenzen, für die noch kein Rabatt gewährt wird.

– Manchmal ermöglicht die Arbeit mit einem Modell, eine reale Situation erst richtig zu verstehen.

  Beispiel: Ohne Modell wird dieWahrscheinlichkeit der einzelnen Augensummen bei 2 Würfeln häufig falsch vorausgesagt.

– Die Schülerinnen und Schüler lernen Modelle der Statistik und Wahrscheinlichkeit durch Situationen kennen, in denen sie selbst experimentieren können. Dazu gehören zum Beispiel:
  - Zufallsspiele, wie Würfelspiele, Zahlenlotto usw.
  - Umfragen in der Schule, zum Beispiel über die Geburtstage
  - usw.

– Die öffentliche Meinung wird in vielen Gebieten, wie etwa Politik, Gesellschaft, Wirtschaft, Handel, Sport usw. regelmässig durch statistische Darstellungen beeinflusst. Die Schülerinnen und Schüler lernen, sich Fragen zu solchen Darstellungen zu stellen und suchen Antworten darauf, wie:
  «Was wollen sie aussagen? Wie sind sie entstanden? Sind sie als exakte Ergebnisse zu verstehen?»
  Oft geben Tagesaktualitäten Anlass zu entsprechenden Untersuchungen.

Richtlinie 3 **Hilfsmittel**

Die Schülerinnen und Schüler haben die Gelegenheit, den Gebrauch von technischen und elektronischen Hilfsmitteln zu erlernen.

Treffpunkt 3a **Veranschaulichungen**

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Die Lernenden können grafische Darstellungen lesen, sowie Zahlen und Grössen durch Zeichnungen oder Skizzen veranschaulichen.

Treffpunkt 3b **technische Hilfsmittel**

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Die Lernenden können technische Hilfsmittel, d.h. gängige Messinstrumente, wie Lineal, Geodreieck und Zirkel richtig verwenden.

Treffpunkt 3c **elektronische Hilfsmittel**

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Die Lernenden können bewusst mit dem Taschenrechner umgehen und sammeln im Verlauf der Schulzeit Erfahrungen im Umgang mit dem Computer.

Kommentar

– Die Kinder leben heute in einer Welt, in welcher der Umgang mit Grafiken, Tabellen, Messgeräten, Taschenrechner, Computern und anderen Hilfsmitteln selbstverständlich ist. Sie brauchen diese Hilfsmittel in der Schule weder als modische Spielzeuge, noch ausschliesslich für Rechnungen, die man früher mühsam von Hand rechnen musste. Die Rechner werden für eine grössere Effizienz bei umfangreichen Rechnungen und als Unterstützung im Alltag eingesetzt. Eine tragfähige Zahlenvorstellung ist jedoch Voraussetzung für einen vernünftigen Umgang mit dem Taschenrechner oder Computer in diesem Sinn.

– Bei der Bearbeitung von Problemen müssen die Kinder entscheiden lernen, welche Hilfsmittel geeignet sind und wie sie damit umgehen müssen. Bei rechnerischen Problemen müssen sie wissen, welche Operationen in welcher Reihenfolge zur Lösung beitragen. Dazu müssen sie die Struktur der verwendeten Zahlen kennen, sowie über Kontroll- und Schätzverfahren für die von den Hilfsmitteln gelieferten Resultate verfügen.

– Die Lernenden sind vertraut mit Zahlentabellen und grafischen Veranschaulichungen, wie beispielsweise mit Tarif- und Distanztabellen, statistischen Darstellungen, Fahrplänen, Formelsammlungen usw. In einfachen Fällen sind sie fähig, solche Tabellen selbst zu erstellen und sie für Problemlöseprozesse zu nutzen.

– Elektronische Hilfsmittel ermöglichen es, im Unterricht spezielle Untersuchungen durchzuführen. Sie können dadurch viel für das Verständnis von Zusammenhängen beitragen.

  Beispiele:
  - Probleme mit realitätsnahen Zahlen lösen
  - Variabeln verändern und deren Auswirkungen untersuchen
  - Probleme mit grossen und kleinen Zahlen lösen
  - Iterationen durchführen, z.B. bei exponentiellem Wachstum
  - Erfahrungen mit Grenzwerten sammeln, z.B. ständiges Wurzelziehen aus Anfangszahl
  - geometrische Probleme unter einem dynamischen Gesichtspunkt betrachten
  - usw.

Richtlinie 4 — ***Mathematik und Sprache***

Die Schülerinnen und Schüler lernen, ihre eigenen Lern- und Lösungswege in Worten zu beschreiben.

Treffpunkt 4 — ***Beschreibung von Prozessen***

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Die Lernenden entwickeln Techniken, ihre eigene Arbeit zu beschreiben und zu beurteilen. Sie können erkannte Fehler auswerten und verbessern.

Kommentar

- Die Schülerinnen und Schüler lernen im Mathematikunterricht nicht nur mathematische Inhalte. Sie lernen auch, sich zunehmend präziser auszudrücken. Das ist in der Regel ein nach der obligatorischen Schulzeit noch nicht abgeschlossener Prozess. Die Mathematik besitzt ein eigenes Zeichensystem, das nicht für alle Lernenden einfach zu verstehen ist. Es ist daher wichtig, diese Zeichensprache immer wieder in die normale Umgangssprache zu übersetzen und umgekehrt.

- Die Lernenden werden befähigt, Texte, die zu Berechnungen Anlass geben, in die Zahlen- und Zeichensprache der Mathematik zu übertragen, die Probleme damit zu lösen und die Resultate sprachlich zu interpretieren. Eine Möglichkeit besteht schon in den ersten Schuljahren darin, Geschichten zu Zahlen und Operationen zu erfinden.

- Die Schülerinnen und Schüler lernen, Texte mit mathematischem Inhalt zu verfassen. Dies kann durch Beschreiben der eigenen mathematischen Tätigkeiten erlernt werden. So beschreiben sie etwa in eigenen Worten, wie sie ein Problem gelöst haben oder was ihnen auf dem Lösungsweg Mühe bereitet hat. Sie beschreiben auch, was zu allfälligen Fehlern oder Mängeln geführt hat. Dies ermöglicht einen zusätzlichen Lernprozess und kann dem Erwerb von Arbeitstechniken zugeordnet werden.

Richtlinie 5 — ***Begründen und Beweisen***

Die Schülerinnen und Schüler lernen, eingeschlagene Wege und Ergebnisse in Problemlösungsprozessen sowie Vermutungen zu begründen und in einfachen Fällen zu beweisen. Sowohl Zahlen als auch geometrische Figuren und Körper geben Anlass zu Vermutungen über ihre Eigenschaften und Beziehungen.

Treffpunkt 5a — ***Anschauung und Beweis***

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Die Lernenden erfahren an einfachen Beispielen in geometrischen Kontexten den Unterschied zwischen Vermutung durch Anschauung und Beweis.

Treffpunkt 5b ***Gleichungen***

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Die Lernenden können Vermutungen in Worten und formal beschreiben. Sie lernen das Aufstellen und Lösen von Gleichungen, insbesondere Gleichungen ersten Grades, als Hilfsmittel der Problemlösung und Beweisführung kennen.

Kommentar

– In der Welt der Ziffern, Zahlen, geometrischen Formen und Körper können die Lernenden während der ganzen Schulzeit experimentieren und dabei Eigenschaften und Beziehungen entdecken. Sie erfahren, dass Beobachtungen vorerst Vermutungen sind. Sie werden dazu angeregt, ihre Beobachtungen zu formulieren, zu hinterfragen, zu argumentieren, zu begründen und in Einzelfällen zu beweisen. Sie lernen dabei unter anderem zwischen einem experimentellen, einem zufälligen und einem logischen Ergebnis zu unterscheiden.

  Beispiel aus der Arithmetik-Algebra:

  Beobachtung und Formulierung: Bei der Addition gerader Zahlen ist das Ergebnis eine gerade Zahl.

  Argumentieren und Begründen: Gerade Zahlen kann man halbieren. Wenn man zwei gerade Zahlen addiert, kann man auch zweimal die halbe Zahl nehmen. Also kann man das Resultat halbieren.

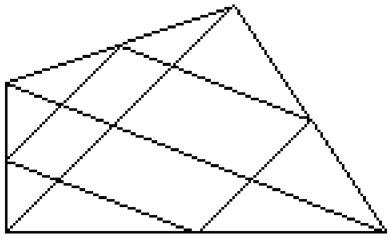
  Beweis mit Hilfe von Gleichungen: $\left.\begin{array}{l} a = 2n \\ b = 2m \end{array}\right\} \quad a + b = 2n + 2m = 2(n + m)$

  Beispiel aus der Geometrie:

  Beobachtung und Formulierung: Bei einem beliebigen Viereck werden die Seitenmitten der Reihe nach verbunden. Das daraus entstehende Viereck sieht aus wie ein Parallelogramm. Ist das zufällig? Ist das immer so?

  Argumentieren: Es werden viele unterschiedliche Vierecke als Ausgangspunkt gewählt. Die Mittenvierecke werden nachgemessen. Die Beobachtung bleibt gleich, also ist die Beobachtung nicht zufällig.

Begründen (Beweisen): Die Seiten des Mittenvierecks sind Mittellinien der Dreiecke, also parallel zu den Vierecks-diagonalen, also untereinander parallel, also ist das Mittenviereck ein Parallelogramm.



– Begründen und Beweisen sind anspruchsvolle Tätigkeiten. Für die Lernenden kann dies erleichtert werden, wenn man beim gleichen Inhalt etwas verweilt und die Ausgangssituation verändert. So kann das arithmetisch-algebraische Beispiel mit der Frage «Wie steht es mit ungeraden Zahlen?» erweitert werden. Das geometrische Beispiel kann mit der Frage «Wie gross ist die Fläche des Mitten-vierecks?» erweitert werden.

– Das Lösen von Gleichungen ersten Grades kann auf unterschiedlichem Anspruchs-niveau erfolgen:
  - systematisches Probieren
  - grafisches Lösen
  - algebraisches Umformen

Richtlinie 6 ***Zahlen***

Die Schülerinnen und Schüler haben vielfältige Möglichkeiten, die Welt der Zahlen zu erforschen.

Treffpunkt 6a ***natürliche Zahlen***

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Die Lernenden kennen Aufbau und Struktur der natürlichen Zahlen.

Treffpunkt 6b	***nicht-natürliche Zahlen***

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Die Lernenden kennen verschiedene Schreibweisen von Zahlen: Dezimalbruch, Bruch, Prozent, vom Rechner gelieferte Zahl, exakte Zahl, Potenzen und Wurzeln.

Kommentar

– Sehr früh benützen die Lernenden Zahlen aus ihrer Umwelt. Durch natürliche Neugier und durch Spiel wird der Zahlenbegriff schrittweise erweitert und vervollständigt. Dazu gehören verschiedene Aspekte wie Kardinalzahl, Ordinalzahl, Teiler und Vielfache, Bruchzahl, Dezimalzahl usw. Sie beschreiben solche Zahlenmengen mit ihren Eigenschaften und Beziehungen untereinander. Das individuelle Verständnis von Zahlen wird laufend ergänzt, neu betrachtet und neu angeordnet.

– Es gibt unendlich viele Situationen aus allen Lebensbereichen, welche zur Entwicklung des Zahlenbegriffs beitragen. Diese sind im Unterricht zu nutzen, wie zum Beispiel:
  - höchster und tiefster Punkt auf der Erde
  - Körpertemperatur
  - Fragen wie «Gab es das Jahr 0 wirklich?»
  - Was bedeuten Formulierungen wie: «Zwei von 5 Kindern», «Zwei Drittel aller Bäume», «eine Bevölkerung verdoppelt sich in 10 Jahren», «es ist –30° kalt»,
  - usw.

– Beim Aufbau des Verständnisses des Zehnersystems sind folgende Erkenntnisse besonders bedeutungsvoll:
  - Zahlen wie 10’203 und 10’302 unterscheiden
  - Zahlen ordnen, z.B. $153 < 162 < 281{,}7$ oder $30{,}1 > 30{,}09$
  - Zahlen auf einem Zahlenstrahl einordnen
  - Kapitel oder Abschnitte eines Buches durchnumerieren
  - sehr grosse und sehr kleine Zahlen mit Hilfe von Potenzen, insbesondere Zehnerpotenzen darstellen
    Beispiele: $3'200'000 = 3{,}2 \cdot 10^6$ oder $0{,}002 = 2 \cdot 10^{-3}$

– Bei der Schreibweise nicht-ganzer Zahlen können die Lernenden Schreibweisen des folgenden Typs bildlich oder in der Realität interpretieren:
  «ein Viertel von 600 m», «zwei Drittel von 27», «80% von Fr. 24’000.–»

– Sie können in einfachen Fällen Zahlen von der Dezimalbruchschreibweise in die Bruchschreibweise umformen und umgekehrt.

Beispiele: $5\ \% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20} = 0{,}05$

$0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} = 75\%$

– Bei nicht-rationalen Zahlen können die Lernenden die Grössenordnung der Quadratwurzel einer Zahl angeben:

Beispiel: $13 < \sqrt{175} < 14$

Richtlinie 7 **_Operationen_**

Die Schülerinnen und Schüler entwickeln ihre eigenen Rechenfähigkeiten, insbesondere ihre Fähigkeiten im Kopf zu rechnen, während der ganzen Schulzeit ständig weiter.

Treffpunkt 7a **_Grundoperationen in $\mathbb{N}$_**

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Die Lernenden beherrschen Verfahren, mit denen sie die 4 Grundoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division mit natürlichen Zahlen durchführen können.

Treffpunkt 7b **_Rechenoperationen in $\mathbb{Q}$_**

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Die Lernenden können die 4 Grundoperationen mit Dezimalzahlen durchführen. Dabei bedienen sie sich der Kenntnisse beim Umgang mit natürlichen Zahlen. Sie können die Grössenordnung von Resultaten abschätzen und so beispielsweise das Komma richtig setzen. Sie können den Rechner für diese Rechenoperationen richtig einsetzen.

Kommentar

– Die Lernenden werden ermuntert, ihre Kopfrechenfähigkeiten zu benützen. Sie erfahren so eine gesunde Konkurrenz mit dem Taschenrechner und werden dadurch befähigt, den entsprechenden Ansprüchen des täglichen Lebens gerecht zu werden. Sie suchen nach Operationen und Zahlen, mit denen sehr schnell eine Lösung oder Näherungslösung gefunden werden kann. Ebenso versuchen sie, eine Operation in eine Kette von einfachen Operationen zu zerlegen. Sie entdecken verschiedene Zahlenstrukturen.

– Die Schülerinnen und Schüler müssen überzeugt sein, dass es von Vorteil ist, gewisse Rechenoperationen auswendig zu können, wie das kleine Einmaleins oder das Auf- und Abrunden auf Vielfache der nächsten Zehnerpotenzen.

– Kopfrechnen heisst nicht, dass die Schülerinnen und Schüler immer ohne Papier und Bleistift rechnen müssen. Manchmal ist es sinnvoll, Zwischenresultate aufzuschreiben.

– Der Schwierigkeitsgrad der Operationen, welche die Lernenden bis Ende des 6. Schuljahres ohne elektronische Hilfsmittel beherrschen sollen, kann wie folgt umschrieben werden:

  3782 + 421 + 17’854 + 15 =
  128’400 – 12’303 =
  $28 \cdot 495$ =
  29’610 : 63 =

  Dabei stehen nicht die standardisierten Algorithmen im Zentrum. Die Aufgaben können auch mit halbschriftlichen Verfahren gelöst werden. Die Geschichte der Mathematik liefert ein Fülle verschiedener Algorithmen zu den 4 Grundoperationen.

– Das Rechnen mit nicht-ganzen Zahlen ist vermehrt auf das Verstehen und weniger auf Fertigkeiten ausgerichtet. Dabei spielen zwei Dinge eine wichtige Rolle:

  - Zahlen und Rechnungen können auf unterschiedliche Arten geschrieben werden

  Beispiele: $\frac{1}{2} + \quad = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{3+4}{6} = \frac{7}{6} \approx 1{,}17$

  oder

  $0{,}11 : 0{,}03 = 11 : 3 = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3} \approx 3{,}67$

  - Grössenordnungen von Resultaten können durch Schätzen ungefähr angeben werden

  Beispiele: 24% von Fr. 4800.– sind etwa ein Viertel von Fr. 4800.–, also etwa Fr. 1200.–
  $3{,}45 \cdot 268{,}5$ liegt zwischen $3 \cdot 260 = 780$ und $4 \cdot 270 = 1080$

Richtlinie 8 ***Funktionen***

Die Schülerinnen und Schüler entwickeln einen zunehmend differenzierteres funktionales Denken.

Treffpunkt 8a ***Variablen***

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Die Lernenden sind vertraut, mit Variablen umzugehen.

Treffpunkt 8b ***Proportionalität***

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Die Lernenden kennen den Unterschied zwischen proportionaler und nicht-proportionaler Abhängigkeit und können Beispiele dazu aus dem Alltag nennen.

Kommentar

– Funktionales Denken und Variablen können schon früh ohne Formalismus eingeführt werden, etwa in Form von Rätseln.

Beispiel: «Ich denke mir eine Zahl, verdopple sie und addiere 10. Es kommt 50 heraus. Welche Zahl habe ich mir gedacht?»

Daraus entwickeln sich langsam ein formaler Funktionsbegriff und formale Schreibweisen.

– Alltägliche Situationen weisen häufig funktionale Beziehungen auf, die für den Aufbau des Funktionsbegriffs zu nutzen sind.

Beispiele:
- Ware – Preis – Rabatt
- reales Objekt – Modell (Massstab)
- Abhängigkeit eines Volumens, z.B. einer Büchse vom Radius, resp. der Höhe
- Fieberkurve
- Bevölkerungswachstum
- usw.

– Funktionale Beziehungen und Variablen kommen regelmässig im Zusammenhang mit Wertetabellen und grafischen Darstellungen vor. In diesem Sinn dienen sie als Grundlage für das Lösen von Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen.

– Die Schülerinnen und Schüler verstehen die Bedeutung der Reihenfolge von Buchstaben, Operationszeichen und Klammern in Termen. Sie können die Buchstaben durch entsprechende Zahlen ersetzen und den Wert des Terms berechnen. Sie können den Wert eines Buchstabens berechnen, wenn sie den Wert der übrigen Buchstaben und den Wert des Terms kennen.

  In einfachen, häufig vorkommenden Formeln können sie den Wert eines Buchstabens in Abhängigkeit der andern ausdrücken.

– Sie sind fähig, die Gleichwertigkeit verschieden aussehender Terme nachzuweisen.

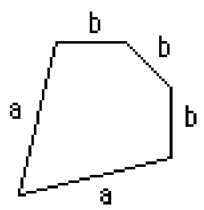
  Beispiel: Für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen schlägt eine Schülerin als Ergebnis vor $(n^2 + n) : 2$

  eine andere $\frac{n}{2} \cdot n + \frac{n}{2}$

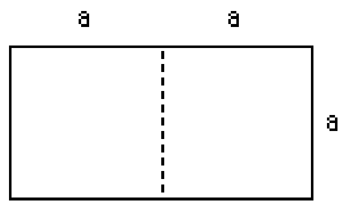
  Sind die beiden Ergebnisse gleichwertig?

– In einfachen Fällen können sie Terme vereinfachen. Der Umgang mit algebraischen Termen ist für jene Schülerinnen und Schüler besonders wichtig, die Algorithmen zur Lösung von Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen beherrschen müssen.

Der Schwierigkeitsgrad des Umgangs mit Buchstabentermen ist durch folgende Beispiele beschrieben:



Umfang = $a+a+b+b+b = 2a+3b$



Fläche = $(a+a) \cdot a = 2a \cdot a = 2a^2$

– Die Schülerinnen und Schüler lernen die Proportionalität und die umgekehrte Proportionalität als spezielle funktionale Abhängigkeiten kennen. Sie kennen verschiedene Aspekte und Anwendungsbereiche der Proportionalität und der umgekehrten Proportionalität, beispielsweise: Geschwindigkeit, Steigung, Dichte, Leistung, Rabatt usw.

– Die Behandlung der Proportionalität kann auf unterschiedlichem Anspruchsniveau erfolgen:
  - mit Hilfe von Tabellen
  - mit grafischen Darstellungen
  - in formaler Schreibweise: $y = f(x) = k \cdot x$

Richtlinie 9 — ***Raumerfahrung***

Die Schülerinnen und Schüler lernen, sich im Raum zu orientieren und zu bewegen, sowie Orientierungen und Bewegungen zu beschreiben.

Treffpunkt 9a — ***räumliche Strukturen***

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Die Lernenden können elementare Körper aus verschiedenen Materialien herstellen. Dies ermöglicht ihnen, Strukturen räumlicher Gebilde im eigentlichen Wortsinn und im übertragenen Sinn zu *begreifen.*

Treffpunkt 9b — ***Raumdarstellung***

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Die Lernenden kennen Methoden der zweidimensionalen Darstellung räumlicher Gebilde. Dazu gehören: schematische Zeichnung, massstäbliche Pläne, perspektivische Darstellung.

Treffpunkt 9c — ***Flächen und Körper***

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Die Lernenden sind in der Lage, elementare ebene und räumliche Figuren grössenmässig zu erfassen und rechnerisch auszuwerten.

Treffpunkt 9d **_geometrisches Operieren_**

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Die Lernenden sind fähig, ebene und räumliche Figuren bezüglich Lage, Grösse und Form zu verändern. Insbesondere kennen sie Eigenschaften der Kongruenz und Ähnlichkeit.

Kommentar

– In den ersten Schuljahren lernen die Schülerinnen und Schüler, sich selbst und ihre Bewegungen im Raum zu beschreiben. Später machen sie dasselbe mit Objekten und lernen so Schritt für Schritt, was ein Bezugssystem und was die Orientierung eines Objekts ist.

  Sie werden fähig, die Lage von Gegenständen im Raum und ihre Bewegungen aus der Sicht eines festen Beobachters als auch aus der Sicht des Objekts selbst zu beschreiben (Sicht des Kontrollturms und Sicht des Piloten).

– Grafische Darstellungen wie Skizzen, Pläne, Diagramme, Karten usw. spielen heute überall eine wichtige Rolle. Der Aufbau und das Einüben des geometrischen Vorstellungsvermögens soll den Lernenden helfen, solche Darstellungen zu verstehen und selbst herzustellen.

– Die Lernenden erfahren die Eigenschaften geometrischer Objekte unter anderem, indem sie solche herstellen. Dazu sind verschiedene Materialien denkbar: Karton, Draht, Modelliermasse, zusammensteckbare Formen aus Kunststoff, Röhrchen mit Verbindungsstücken, Abwicklungen von Körpern, Lego usw.

– Die Schülerinnen und Schüler lernen, ihre unmittelbare Umgebung zu beobachten, zu beschreiben und darzustellen. Dadurch entwickeln sie Kompetenzen wie prüfen, sortieren, ordnen, Figuren exakt beschreiben, Eigenschaften erklären, formulieren und in Anwendungen zu gebrauchen.

– Die Lernenden verändern die Lage geometrischer Objekte oder die Objekte selbst nach vorgegebenen Regeln. Dabei entdecken sie, dass Transformationen existieren, bei denen gewisse Eigenschaften der Objekte erhalten bleiben (Längentreue, Winkeltreue, Verhältnistreue usw.).

  Solche Untersuchungen sollen auch handelnd durchgeführt werden, beispielsweise mit Hilfe von Spiegeln, durch Falten oder durch Dehnen von Flächen usw.

  Die Ausarbeitung formaler Beschreibungen von geometrischen Abbildungen wird erst gegen Ende der Schulzeit und auch das nur in gewissen Schultypen möglich sein. Die Beziehungen zwischen der Beschreibung einer geometrischen Abbildung und einer numerischen Funktion werden dort soweit möglich aufgezeigt.

– Die Schülerinnen und Schüler können an ihren selbst hergestellten Objekten auch Eigenschaften wahrnehmen und beschreiben, die nur schwerlich als operationalisierte Lernziele formuliert werden können. Dazu gehören beispielsweise topologische Eigenschaften, Dimensionen, Orientierungen von Objekten usw.

– Die Lernenden können die elementaren ebenen Figuren zeichnen und elementare Körper zweidimensional darstellen. Umgekehrt können sie aus Projektionen, Abwicklungen, sowie in einfachen Fällen aus Rissen die entsprechenden Körper herstellen.

– Die Lernenden beherrschen folgende Konstruktionen:
    - Parallele, Senkrechte, Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende
    - Achsen- und Punktspiegelung
    - Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen

– Die Schülerinnen und Schüler können den Satz des Pythagoras anwenden und Berechnungen im Zusammenhang mit ähnlichen Figuren anstellen.

– Sie können folgende Grössen berechnen:
    a. Flächen von Rechtecken, Parallelogrammen und Dreiecken sowie die Oberflächen von Körpern, die aus solchen Teilflächen zusammengesetzt sind
    b. Umfang und Fläche von Kreisen
    c. Oberfläche und Volumen von Prismen, Pyramiden, Kegeln, Zylindern und Kugeln

Folgerungen

Konsequenzen

Dieses Dokument *Freiräume – Richtlinien – Treffpunkte* wurde vom Ausschuss Mathematik der Pädagogischen Kommission der EDK ausgearbeitet und anlässlich des Schweizerischen Mathematikforums vom 25. bis 27. November 1996 kritisch begutachtet. Die Schlussredaktion widerspiegelt einen grossen Konsens unter den Beteiligten des Forums. Die Annahme des Dokuments hat folgende Konsequenzen:

• auf die Didaktik

Freiräume – Richtlinien – Treffpunkte enthalten eine neue Auffassung von Mathematikunterricht und führen zu einer Überarbeitung bisheriger Methoden. Dieser Prozess ist in einigen Regionen der Schweiz bereits in vollem Gang.

• auf die Beurteilung

Eine traditionelle Schülerbeurteilung, die vorwiegend summativer Art ist, läuft den fundamentalen Ideen dieses Dokuments zuwider. Dies gilt insbesondere für die Freiräume. Hier müssen neue Beurteilungskonzepte ausgearbeitet werden. Auch da ist man momentan in gewissen Kantonen an der Arbeit.

• auf die Lehrerbildung

Bei allen Schulreformen sind Lehrpersonen betroffen, die ihre eigene Ausbildung auf der Basis veralteter Methoden erlebt haben. Reformen ziehen daher eine spezielle Periode des Übergangs nach sich. Das Dokument *Freiräume – Richtlinien – Treffpunkte* dient als wesentliches Instrument für entsprechende Neuerungen in der Lehreraus- und -fortbildung.

• auf den Meinungsaustausch in der Schweiz

Freiräume – Richtlinien – Treffpunkte ziehen die Notwendigkeit nach sich, regelmässig Informationen zwischen allen Regionen und Kantonen unseres Landes auszutauschen. Man muss weiterhin engagiert nachdenken und die Auswirkungen auf die Lehrpläne und die Methoden aufmerksam verfolgen. Ganz allgemein müssen die Konsequenzen fachdidaktischer Forschung auf den Mathematikunterricht genau beobachtet werden.

Es wäre auch klug, so rasch als möglich eine Stelle zu schaffen, die Informationen über geeignete Situationen zum Mathematikunterricht im Sinne von *Freiräume – Richtlinien – Treffpunkte* sammelt und weiter verbreitet. Dazu gehören auch entsprechende Auswertungen über praktische Erfahrungen in der Schule.

Ganz speziell müssen Fragen zum Umgang mit dem mathematischen Tagebuch oder Mathematikjournal, zur Erstellung und zum Gebrauch von mathematischen Wörterbüchern, zum Umgang mit dem Taschenrechner und mit anderen elektronischen Hilfsmitteln im Unterricht Gegenstand permanenter Forschung sein. Dies bedingt weiterhin einen ständigen entsprechenden Informationsaustausch.

Espaces de liberté – lignes directrices – points de convergence: l’enseignement des mathématiques durant la scolarité obligatoire

Propositions d’harmonisation

Conférence suisse des directeurs cantonaux de l’instruction publique (CDIP)
Berne 1998

Ce rapport fait partie d'un projet de la CDIP. Il fera l'objet d'une procédure de consultation.

Editeur:
Conférence suisse des directeurs cantonaux de l'instruction publique (CDIP)
Groupe Mathématique de la Commission pédagogique

Edition allemande:
Freiräume – Richtlinien – Treffpunkte: Mathematikunterricht während der obligatorischen Schulzeit

Commandes:
Secrétariat de la CDIP, Zähringerstrasse 25, case postale 5975, 3001 Berne

Impression:
Schüler SA, Bienne

Table de matières

Préface

En 1982, la CDIP édictait des recommandations relatives à l'enseignement des mathématiques. Intitulées *Points de convergence et Lignes directrices*, ces recommandations ont contribué de manière substantielle à l'harmonisation des travaux effectués au niveau des plans d'études et des matériels didactiques dans les écoles suisses au cours des 15 dernières années. Les forums mis sur pied par le Groupe Mathématique de la Commission pédagogique et consacrés à des aspects particuliers de l'enseignement des mathématiques ont soutenu, voire encouragé avec succès les nombreux efforts de coordination et d'harmonisation entrepris par la CDIP dans ce domaine.

A l'instar des autres disciplines, les mathématiques ont elles aussi évolué. Afin de pouvoir fournir aux cantons et aux enseignants des propositions de qualité qui tiennent compte des développements les plus récents, le Groupe Mathématique a publié le présent document *Espaces de liberté – lignes directrices – points de convergence* ayant pour thème l'enseignement des mathématiques au cours de la scolarité obligatoire. Le document, à l'élaboration duquel ont contribué activement de nombreux spécialistes, a reçu un large soutien au cours du dernier Forum organisé par le Groupe Mathématique qui, entre-temps, a été dissout.

Convaincue de la qualité du présent document, la nouvelle Commission Formation générale (CFG), créée le 1er janvier 1997, a décidé de le publier et de le donner, en conformité des statuts de la CDIP, en procédure de consultation. Il s'agira dès lors aux milieux consultés de décider si, suite à ce dossier, il faut édicter de nouvelles recommandations.

Janvier 1998

Hans Hofer, conseiller d'Etat
président de la Commission
Formation générale (CFG)

Objectifs du document

– Contribuer à la coordination de l'enseignement des mathématiques en Suisse.
– Stimuler les échanges en Suisse sur les recherches en matière de didactique et rendre ainsi possible un enseignement des mathématiques qui tienne compte des résultats de ces recherches.

Enseigner les mathématiques aujourd'hui

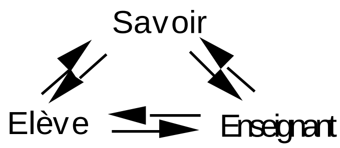
Pourquoi?

Pour résoudre des problèmes! Cet objectif n'a pas changé. Cependant, pour que le citoyen puisse résoudre des problèmes à l'aide des mathématiques, il est indispensable que ces mathématiques lui soient proches, qu'il ait vraiment eu l'occasion de s'y confronter personnellement, et qu'il ait, dans des situations tout à fait à sa portée, vécu et construit lui-même certains concepts.

L'objectif de l'enseignement des mathématiques n'est alors pas seulement la transmission de quelques produits finis permettant de résoudre certains problèmes; c'est surtout la volonté d'ouvrir les mathématiques au plus grand nombre de personnes qui, dès le départ, vivront cette discipline dans des situations qui lui donnent du sens.

Comment?

Ce document se réfère aux travaux récents de recherche dans le domaine de la transmission des connaissances mathématiques. Il se base notamment sur le triangle didactique bien connu:



– L'élève, en étant confronté à une activité préparée par l'enseignant, va rencontrer le savoir;
– L'enseignant est un metteur en scène de l'apprentissage du savoir; il tient compte des connaissances et des capacités de ses élèves;
– Envisagés sous cet angle, les savoirs nécessitent une nouvelle description; tel est l'objectif essentiel de ce document.

Si les méthodologies d'enseignement peuvent changer aujourd'hui, et probablement encore demain, le savoir mathématique tel qu'il est décrit ici est, lui, beaucoup plus stable. C'est pour cette raison que ce document s'attache essentiellement à sa description. Il ne sera question de méthodologie qu'à titre d'illustration, dans les commentaires.

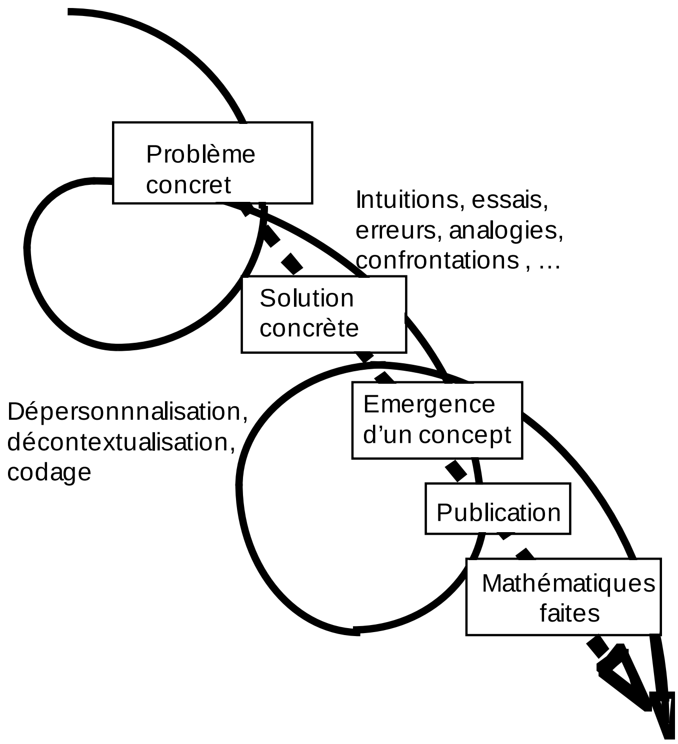
Définitions

Espaces de liberté

Par rapport au document publié en 1982, cette partie est entièrement nouvelle. Nous entendons par *espaces de liberté* ce qui constitue en fait le terreau dans lequel naissent les concepts mathématiques. Il ne s'agit pas de procédures, mais bien de conditions fondamentales sans lesquelles les mathématiques n'existeraient tout simplement pas.

Appliqué à l'apprenant, cela signifie ceci: un élève qui cherche la solution d'un problème ayant du sens pour lui, qui prend une fausse piste, qui échange à ce propos des idées avec son camarade, qui compare, argumente et corrige, cet élève-là *fait* des mathématiques.

De même, le mathématicien ne se contente pas de mémoriser des concepts ou des raisonnements complexes. Son action, plus globale, fonctionne approximativement selon le schéma suivant:



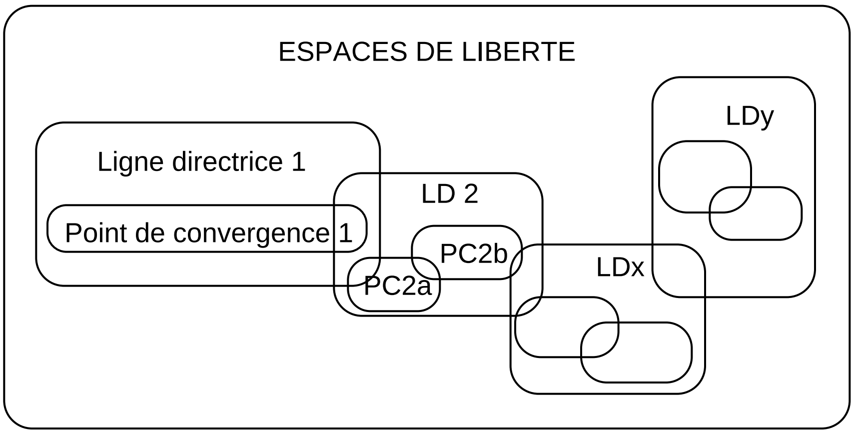
Faire des mathématiques, apprendre des mathématiques sont donc ici des activités qui sont en parfaite symbiose. Si elles exigent toutes deux une certaine autonomie ou une certaine liberté d'action de l'apprenant, il importe également que celui-ci tienne compte des autres acteurs ainsi que du savoir déjà établi.

Lignes directrices et points de convergence

Les lignes directrices et les points de convergence exposent des concepts et des savoirs mathématiques qui sont enseignés au cours de la scolarité obligatoire. Les *lignes directrices* sont assez générales et forment en quelque sorte la trame de l'enseignement des mathématiques. Les *points de convergence,* qui interviennent de manière plus ponctuelle, reflètent l'évolution de l'apprentissage et assurent la coordination des programmes d'enseignement. Chaque ligne directrice est accompagnée d'un ou de plusieurs points de convergence. Les *espaces de liberté* constituent la toile de fond des lignes directrices et des points de convergence.

Représentation schématique des articulations entre espaces de liberté, lignes directrices et points de convergence

Les espaces de liberté, lignes directrices et points de convergence sont étroitement imbriqués. Les frontières entre lignes directrices et points de convergence ne peuvent pas toujours être strictement définies, des recoupements sont inévitables, comme le suggère le schéma suivant:



Espaces de liberté

Espace de liberté 1	*Apprendre à travers des situations*

L'élève apprend les mathématiques s'il est confronté à des situations qui ont du sens pour lui.

Commentaires

Les situations peuvent provenir de différentes sources:

- du vécu et des expériences quotidiennes de l'élève;
- d'une mise en scène soigneuse de l'enseignant, pour toucher un savoir mathématique déterminé;
- des mathématiques elles-mêmes: de résultats déjà établis (voir espace de liberté 7), ou de résultats qui sont en train de se faire, par exemple lorsque deux propositions contradictoires surgissent dans la classe, ou qu'une recherche exige brusquement la connaissance d'une compétence nouvelle.

Beaucoup de situations ouvrent les mathématiques aux autres disciplines, au monde, comme le montrent les espaces de liberté ci-dessous.

Espace de liberté 2	*Apprendre à travers la nature, les arts et la technologie*

Les relations entre les mathématiques, la nature, les arts et la technologie sont présentées à l'école à travers des situations concrètes.

Commentaires

L'esthétique, l'ordre, l'harmonie, la symétrie touchent l'individu dès son plus jeune âge et le sensibilisent à des propriétés qui seront traitées en mathématiques. Ces aspects seront donc privilégiés tout au long de la scolarité.

Les situations peuvent provenir de nombreux domaines, par exemple:

- symétries dans la nature, croissance d'une plante;
- œuvres d'art (peinture, architecture);
- rythmes divers, poésie et musique;
- polyèdres réguliers et semi-réguliers;
- etc.

Espace de liberté 3	***Apprendre à travers des obstacles***
Essayer, ne pas craindre d'affronter l'inconnu, de faire des erreurs, sont des processus d'apprentissage essentiels dans le domaine des mathématiques.	

Commentaires

L'obstacle est un facteur d'apprentissage essentiel. Les élèves se trouvent p.ex. face à un obstacle s'ils doivent adapter leurs anciennes connaissances à de nouvelles contraintes ou s'ils se rendent compte de leur lacune dans une situation donnée.

D'autre part, souvent en mathématiques, l'élève ne produit rien puisqu'il ne connaît pas la solution exacte du problème. C'est pourquoi, il doit apprendre à «faire du faux pour savoir le vrai».

Sur le plan technique, un mémoire d'erreurs et de pièges classiques, constitué dans un souci de perfectionnement, permet d'améliorer les performances et de mieux cerner les concepts mathématiques.

Espace de liberté 4	***Communiquer sa pensée pour apprendre***
Dans l'enseignement des mathématiques, les élèves aprennent tout au long de leur scolarité à communiquer leur pensée.	

Commentaires

Les concepts mathématiques, contrairement aux objets des disciplines naturalistes, sont de purs objets de pensée. Pour les expliciter, il faut un langage symbolique souvent complexe. Les élèves s'exprimeront d'abord avec leurs mots, parlés ou écrits, leurs gestes, images, dessins.

L'enseignant n'imposera pas d'emblée son formalisme lorsque de nouveaux objets mathématiques apparaissent. Il permet aux élèves d'utiliser leurs propres mots et leurs propres images. Les échanges des différents points de vue permettent alors au langage d'évoluer d'une expression personnelle vers une forme admise par l'ensemble de la classe, puis vers un langage plus formel.

A long terme, les élèves peuvent produire un document mathématique sous une forme adéquate, qui a du sens pour eux. L'apprentissage des mathématiques directement à partir de documents mathématiques devient possible.

Espace de liberté 5	***Apprendre ensemble***
L'apprentissage des mathématiques privilégie les confrontations d'opinions, les débats sur le vrai et le faux, l'élaboration d'une pensée logique de référence pour un groupe social donné.	

Commentaires

Il y a de l'universel dans la pensée mathématique! L'élève doit tout d'abord s'en rendre compte en classe.

Les démarches et les explications élaborées par les élèves (espace de liberté 4), sont comparées, confrontées. Le maître évite d'être la référence du vrai et du faux. Il donne à chaque groupe d'élèves la possibilité de défendre sa position. Certaines questions peuvent être laissées en suspens.

Des règles apparaissent alors:

- se demander si l'on a affaire à un cas particulier;
- rechercher un contre-exemple;
- refaire la même chaîne de calculs à partir d'autres nombres;
- vérifier si une affirmation figure déjà dans une référence théorique;
- etc.

Espace de liberté 6	***Apprendre à travers l'histoire***
L'histoire des mathématiques permet à l'élève d'apprendre comment les hommes ont acquis des connaissances mathématiques, ce qui est enrichissant pour son processus d'apprentissage.	

Commentaires

L'histoire des mathématiques abonde en situations utiles pour le processus d'apprentissage des élèves: leurs présentations sensibilisent ces derniers à l'aspect vivant et en perpétuel mouvement des mathématiques.

Par exemple, les élèves peuvent rencontrer des problèmes résolus ou non résolus de l'histoire des mathématiques (dénombrabilité des nombres premiers, des nombres premiers jumeaux, le plus grand nombre premier connu, théorème des 4 couleurs, théorème de Fermat, dénombrement des polyminos, etc.).

D'autre part, le maître donne l'occasion aux élèves de connaître d'autres méthodes de numération et d'opérations que celles utilisées aujourd'hui dans notre espace culturel. Des exemples peuvent être tirés de l'histoire (numération babylonienne ou romaine) ou provenir d'autres pays (multiplication indienne, boulier).

Espace de liberté 7 — ***Apprendre à travers les mathématiques elles-mêmes***

Dans l'apprentissage des mathématiques, les résultats établis permettent de poser de nouveaux problèmes, de valider des résultats, ou d'exercer la résolution systématique de problèmes classiques.

Commentaires

Les résultats mathématiques, qu'ils soient historiques ou établis par les élèves eux-mêmes, forment de bonnes bases pour des recherches ultérieures. Par exemple:

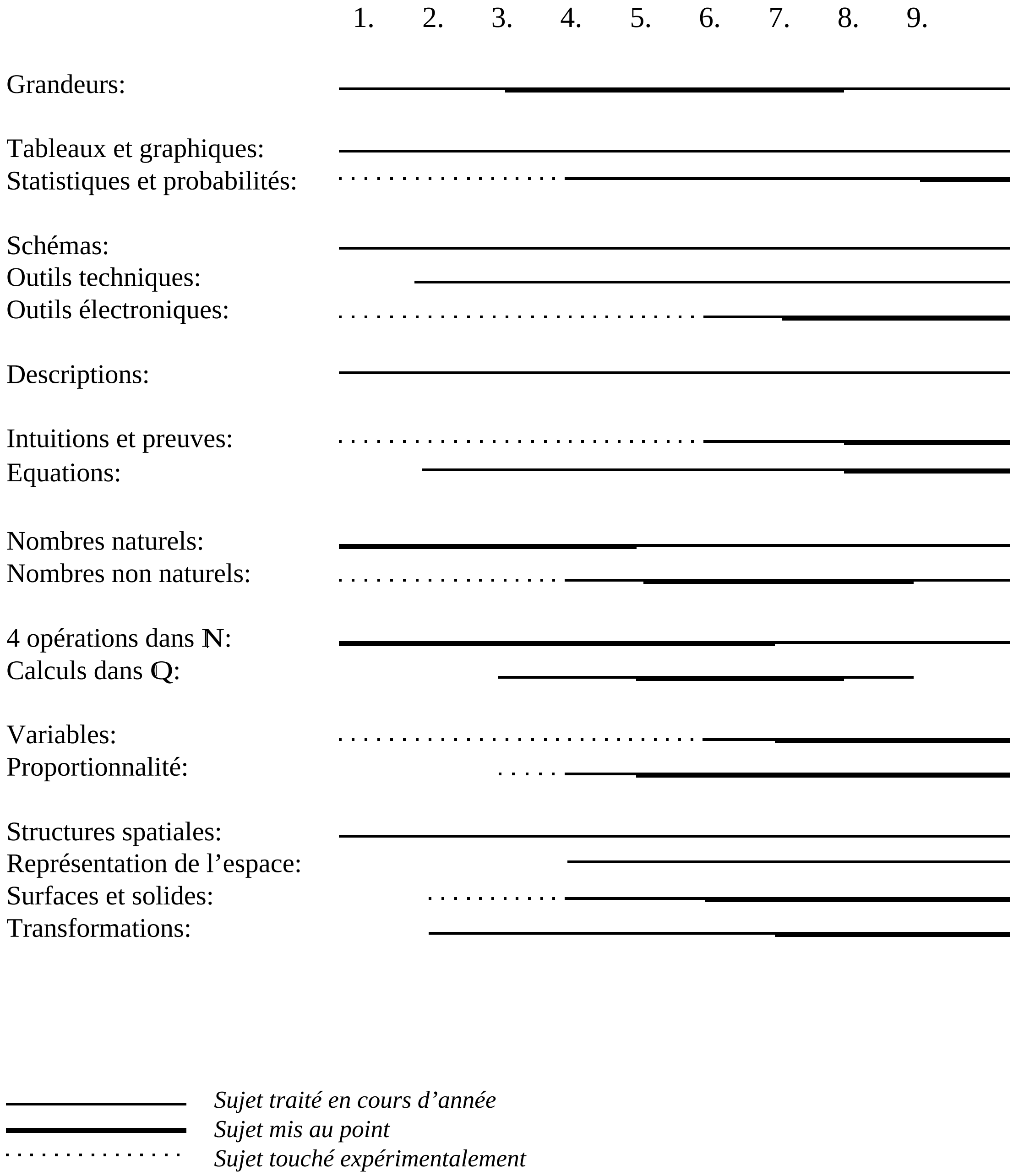
– La multiplication égyptienne est présentée aux élèves. Ils peuvent alors la tester, se demander pourquoi ça marche et si ça marche toujours, rechercher une technique de division basée sur la même méthode.
– La somme des aires des carrés construits sur les cathètes d'un triangle rectangle égale l'aire du carré construit sur l'hypoténuse (théorème de Pythagore). Et si l'on construisait, à la place des carrés, des triangles équilatéraux, ou des pentagones réguliers, aurait-on toujours la même propriété sur la somme des aires?
– Un théorème de géométrie dit que deux surfaces quelconques données dans un plan peuvent toujours être partagées chacune et simultanément en deux parties d'aires égales par la même droite. Les élèves peuvent chercher à appliquer cette propriété curieuse à partir de différentes surfaces.

La validation des résultats obtenus par les élèves peut faire appel à des connaissances préalablement rencontrées ou tirées d'ouvrages mathématiques.

Certains résultats mathématiques s'appliquent à un grand nombre de situations de la vie courante. Il y a donc du sens à automatiser leurs applications. Un travail de recherche est alors mené avec les élèves, pour déterminer l'automatisme le plus efficace.

Lignes directrices et points de convergence

Répartition des points de convergence durant la scolarité, vue d’ensemble



Ligne directrice 1 **Mathématiques et réalité**

L'école doit initier les élèves à la manière dont les mathématiques sont présentes et s'appliquent dans la réalité.

Point de convergence 1 **Grandeurs**

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves savent utiliser différents instruments de mesure. Ils en connaissent les unités de même que les rapports entre les principales unités d'une même grandeur.

Commentaires

– Tout au long de la scolarité, les élèves rencontrent régulièrement des situations concrètes, du quotidien et de la vie professionnelle. Ils expérimentent, mesurent, comparent. Rattacher ainsi certaines activités mathématiques à la réalité quotidienne et à la multidisciplinarité, est fondamental, car cela permet aux élèves aussi bien d'appliquer que d'élargir les savoirs déjà acquis.

– L'enseignement des mathématiques doit également prendre en compte l'apprentissage de notions tirées de l'économie (budget, salaires, ...), de la technique (engrenages, systèmes articulés, ...), de la physique (vitesse, masse, centre de gravité, ...), de la chimie (mélanges, ...), de l'astronomie, etc.

– Les élèves développent aussi le sens de l'ordre de grandeur d'un résultat, par bon sens, mesure ou calcul. Par exemple, ils seront capables de déterminer:
  - l'épaisseur d'une feuille de papier
  - le nombre de grains dans un kilo de riz
  - la capacité-mémoire d'un ordinateur
  - le volume d'un dé à coudre ou celui de la Terre
  - le temps mis par la lumière pour nous parvenir du Soleil
  - etc.

– Les élèves connaissent au moins l'utilisation et les limites de précision des instruments de mesure suivants:
  - longueur: calibre de précision, règle graduée, double-mètre, ruban métrique
  - temps: chronomètre et horloge
  - poids: balance

- volume: récipients gradués
- angle: rapporteur

Ils distinguent un résultat obtenu à partir d'une mesure de celui obtenu par une calculatrice.

– Les élèves sont capables d'effectuer des changements d'unités dans les cas usuels, ils connaissent les préfixes milli-, centi-, déci-, déca-, hecto-, kilo-, et quelques unités composées comme celles de la vitesse ou de la masse volumique.

Ligne directrice 2 ***Modélisation***

Les élèves découvrent et expérimentent des modèles mathématiques, et apprennent à les distinguer de la réalité qu'ils décrivent.

Point de convergence 2a ***Tableaux et graphiques***

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves décrivent la réalité avec des modèles simples, tels que des tableaux et des représentations graphiques. Ils peuvent lire ceux de la vie quotidienne, et dans certains cas, en produire eux-mêmes.

Point de convergence 2b ***Statistiques et probabilités***

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves interprètent des résultats statistiques tirés de la vie quotidienne et déterminent, dans des cas simples, la probabilité d'événements aléatoires.

Commentaires

– Les élèves expérimentent le fait qu'un modèle mathématique est un substitut de la réalité, et non la réalité elle-même. Un modèle permet, dans certaines limites, d'obtenir des résultats exploitables avec une précision suffisante. Si ce n'est plus le cas, il faut changer le modèle.

Par exemple, le prix d'une marchandise est directement proportionnel à son poids. Mais dans la réalité, il peut être arrondi, ou limité par un minimum, ou faire l'objet d'un rabais.

– Certaines situations se résoudraient difficilement sans modèle.
  Par exemple déterminer les probabilités liées au jet de deux dés.

– Statistiques et probabilités sont abordées par le biais de situations au cours desquelles les élèves peuvent se livrer à des expérimentations. Par exemple:
  - jeux de hasard, jet de dés ou loterie à numéros
  - enquêtes dans l'école, dates ou jours d'anniversaires
  - etc.

– L'opinion publique, dans toutes sortes de domaines, politique, social, économique, commercial, sportif, etc. est régulièrement influencée par divers résultats statistiques. Les élèves apprennent à se poser des questions: que signifient ces résultats? comment sont-ils obtenus? peut-on les considérer comme fiables?
  L'actualité fournit une matière abondante.

Ligne directrice 3 ***Outils***

Les élèves ont régulièrement l'occasion de se familiariser avec l'usage d'outils techniques et électroniques.

Point de convergence 3a ***Schémas***

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves savent interpréter des représentations dans lesquelles nombres et grandeurs sont schématisés.

Point de convergence 3b ***Outils techniques***

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves maîtrisent l'utilisation d'outils techniques tels que les instruments de mesure courants, la règle, l'équerre, le compas.

Point de convergence 3c ***Outils électroniques***

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves savent utiliser la calculatrice à bon escient et font tout au long de la scolarité des expériences avec l'ordinateur.

Commentaires

– Aujourd'hui, les enfants vivent entourés d'instruments, de calculatrices, d'ordinateurs et de toutes sortes d'outils d'usage courant. Il serait dommage qu'ils utilisent les moyens électroniques comme des gadgets ou uniquement pour calculer automatiquement ce que l'on apprenait longuement à faire à la main. Ils doivent les exploiter pour une plus grande efficacité de calcul et de recherche dans le quotidien. Dans ce sens, un usage judicieux de la calculatrice s'associe à une compréhension plus approfondie du concept des nombres.

– En résolvant des problèmes, l'élève apprend à choisir les bons outils et comment les utiliser. Dans une situation numérique, il sait distinguer données et résultats, identifier les opérations qui les lient et la nature des nombres utilisés, contrôler par estimation ou bon sens les résultats de la calculatrice.

– Les élèves sont familiarisés à l'usage de tabelles numériques et schémas graphiques, tels que tarifs, horaires, tables diverses, graphiques statistiques, etc. Dans des situations simples, ils sont capables d'en établir eux-mêmes et de les utiliser.

– L'utilisation d'outils électroniques permet également d'effectuer en classe certaines recherches, comme par exemple:
  - résoudre des problèmes réels, en particulier lorsqu'ils contiennent de très petits ou de très grands nombres
  - faire varier la valeur d'une variable pour en étudier l'effet, en particulier dans une fonction exponentielle
  - rechercher des valeurs limites, comme les racines successives d'un nombre donné
  - étudier des problèmes de géométrie d'un point de vue dynamique
  - etc.

Ligne directrice 4 ***Mathématiques et langage***

Les élèves apprennent à exprimer leur démarches pour résoudre des problèmes, et pour apprendre.

Point de convergence 4 ***Descriptions***

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves développent des techniques pour décrire leurs actions et pour les soutenir. Ils savent tirer profit des erreurs repérées.

Commentaires

– Dans l’enseignement des mathématiques, les élèves n’apprennent pas seulement des concepts. Ils apprennent aussi à s’exprimer de manière toujours plus précise, dans un processus qui ne sera pas achevé à la fin de la scolarité obligatoire. Les mathématiques s’expriment dans un formalisme spécifique, qui n’est pas simple à comprendre pour tous les élèves, parce que souvent très peu de signes expriment beaucoup. Il est donc très important de toujours veiller à la compréhension de ce formalisme, en le traduisant systématiquement en langage courant, et réciproquement.

– Les élèves s’initieront à traduire en langage mathématique des textes courants qui s’y prêtent, à résoudre le problème posé, puis à transposer et à interpréter les résultats dans la réalité. Cela peut se faire déjà en 1re année de scolarité lorsque par exemple on demande aux élèves d’imaginer des histoires avec des nombres et des opérations.

– Les élèves apprennent à rédiger des textes à contenus mathématiques, en décrivant leurs propres activités mathématiques. Ainsi, ils décriront avec leurs propres mots comment ils ont résolu un problème et indiqueront ce qui leur a causé des difficultés, les a induits en erreur, leur a manqué. Cette manière de procéder leur permettra non seulement d’enrichir leurs connaissances mathématiques, mais également à s’organiser pour affronter un problème.

Ligne directrice 5 — ***Justifier et prouver***

En résolvant des problèmes, les élèves présentent et justifient les hypothèses faites, les chemins suivis et les résultats obtenus. Dans des cas simples, ils les prouvent.

Point de convergence 5a — ***Intuitions et preuves***

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

En géométrie, les élèves distinguent, par des expériences concrètes, intuition, conjecture, et preuve.

Point de convergence 5b — ***Equations***

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves sont capables de décrire leurs conjectures avec des mots et de les formaliser. Ils apprendront à établir et à résoudre une équation, en particulier du 1er degré à une variable, dans le but de découvrir la solution d'un problème ou de justifier certains résultats.

Commentaires

– Durant toute la scolarité, les élèves explorent le monde des nombres, des figures géométriques, des solides. Ils y découvrent des relations et des propriétés. Ils apprennent alors que ces observations sont d'abord des conjectures et ils sont invités à les formuler, à les questionner, à les justifier et dans certains cas, à les prouver. Entre autres, ils apprennent à distinguer un résultat expérimental d'un autre obtenu par hasard ou encore d'un résultat prouvé.

  Exemple en arithmétique-algèbre:

Observation et formulation:	si j'additionne deux nombres pairs, le résultat est pair.
Argumentation et justification:	je peux partager en deux un nombre pair. Si j'additionne deux nombres pairs, je peux aussi additionner les quatre demi-nombres. Donc je peux partager en deux le résultat.

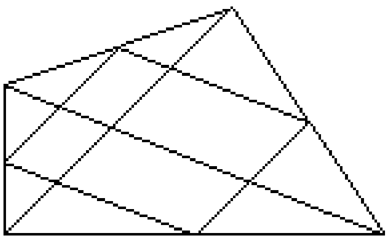
Preuve en écrivant une équation: $\left.\begin{array}{l} a = 2n \\ b = 2m \end{array}\right\} \quad a + b = 2n + 2m = 2(n + m)$

Exemple en géométrie:

Observation et formulation: dans un quadrilatère quelconque, on joint les milieux des côtés. Le quadrilatère moyen ainsi obtenu semble être un parallélogramme. Est-ce un hasard ou toujours le cas?

Argumentation: j’essaie avec beaucoup de quadrilatères différents. Je mesure soigneusement les quadrilatères moyens. Ça marche toujours, ce n’est pas du hasard.

Justification et preuve: les côtés du quadrilatère moyen sont les segments moyens d’un triangle, donc ils sont parallèles aux diagonales du quadrilatère, donc parallèles entre eux, donc le quadrilatère moyen est un parallélogramme.



– Justifier et prouver sont des exigences élevées. Elles peuvent s’alléger dans des situations déjà traitées que l’on modifie un peu. Par exemple, demander aux élèves ce qu’il en est de la somme de nombres impairs ou leur demander de calculer l’aire du quadrilatère moyen.

– La résolution d’équations du 1er degré à une variable peut être effectuée par:
  - essais successifs
  - voie graphique
  - voie algébrique

Ligne directrice 6 **_Nombres_**

Les élèves rencontrent de multiples occasions d'explorer le monde des nombres.

Point de convergence 6a **_Nombres naturels_**

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves connaissent la construction et la structure des nombres naturels.

Point de convergence 6b **_Nombres non naturels_**

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves connaissent différentes écritures de nombres: nombres décimaux, fractionnaires, pourcentages, affichage d'une calculatrice, valeurs exactes, puissances et racines.

Commentaires

– Très tôt, les élèves utilisent toutes sortes de nombres. Par curiosité et par jeu, ils complètent petit à petit leurs connaissances des nombres sous leurs aspects cardinaux et ordinaux, multiples et diviseurs, décimaux et fractionnaires, etc. Ils les décrivent, les comparent, les ordonnent. Cette compréhension des nombres s'étend sur toute la scolarité. Régulièrement, les nombres sont reconsidérés, réarrangés.

– D'innombrables situations, puisées dans toutes les disciplines, alimentent cette étude:
  - le point le plus haut et le plus bas de la Terre
  - la température de mon corps
  - l'année «zéro» a-t-elle existé?
  - que signifie des expressions comme «2 élèves sur 5», «les deux-tiers des arbres», «une population double tous les 10 ans», «il fait moins trente degrés»?
  - etc.

– Dans le système décimal, les connaissances minimales suivantes sont maîtrisées:
  - différencier 10’203 et 10’302
  - ordonner $153 < 162 < 281{,}7$ ou $30{,}1 > 30{,}09$
  - placer des nombres sur un axe gradué
  - comprendre la numération des chapitres et paragraphes d’un livre
  - connaître l’écriture scientifique des nombres
    $3’200’000 = 3{,}2 \cdot 10^6$; $0{,}002 = 2 \cdot 10^{-3}$
  - interpréter et formaliser des expressions du type
    «un quart de 600 m», «deux tiers de 27», «80% de 24’000 fr.»

– Dans les cas usuels, savoir passer de l’écriture décimale à l’écriture fractionnaire d’un nombre, et réciproquement:

$$5\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

$$0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} = 75\%$$

– Déterminer l’ordre de grandeur d’une racine carrée:

$$13 < \sqrt{175} < 14$$

Ligne directrice 7 ***Opérations***

Tout au long de la scolarité, les élèves développent leurs propres capacités de calcul.

Point de convergence 7a ***4 opérations dans $\mathbb{N}$***

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves maîtrisent des procédures d’exécution qui leur permettent d’effectuer les 4 opérations, addition, soustraction, multiplication, division, avec des nombres naturels.

Point de convergence 7b ***Calculs dans Q***

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves maîtrisent les 4 opérations avec des nombres décimaux, par association avec leurs connaissances des nombres naturels, par l’estimation de l’ordre de grandeur du résultat, par des méthodes de déplacement de la virgule, et par l’utilisation de la calculatrice.

Commentaires

– Les élèves sont incités à développer leurs propres capacités de calcul. Ils s’exercent à concurrencer efficacement la calculatrice et sans elle sont capables de résoudre les petits problèmes d’arithmétique du quotidien. En présence d’un problème complexe, ils recherchent les opérations et les nombres pour lesquels ils peuvent fournir très vite le résultat ou une bonne approximation. Ils recherchent également comment transformer une opération en une chaîne d’opérations faciles. Ils découvrent ainsi différentes structures des nombres.

– Les élèves doivent être conscients de l’avantage qu’ils ont à connaître par cœur certains résultats d’opérations, comme les livrets, les compléments d’un entier à la dizaine supérieure, les valeurs arrondies aux différentes puissances de 10 d’un nombre, par excès et par défaut.

– Calculer de tête ne signifie pas que les élèves calculent sans papier ni crayon. Il est quelquefois utile d’écrire un résultat intermédiaire.

– La difficulté des opérations qui devraient être réussies sans calculatrice à la fin de la 6e année peut être décrite par les exemples suivants:

  3782 + 421 + 17’854 + 15 =
  128’400 – 12’303 =
  28 · 495 =
  29’610 : 63 =

  Les algorithmes classiques ne constituent pas la panacée. Les opérations peuvent également être effectuées par calcul semi-écrit. D’autre part, l’histoire des mathématiques fournit de nombreux autres algorithmes pour les 4 opérations.

– Pour les calculs avec des nombres non entiers, l’accent est mis davantage sur la compréhension que sur la dextérité. Deux aspects jouent alors un rôle important:
  - les nombres ou leurs écritures se transforment:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{3+4}{6} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6} \approx 1{,}17$$

  ou

$$0{,}11 : 0{,}03 = 11 : 3 = \frac{11}{3} = 3\,\frac{2}{3} \approx 3{,}67$$

  - l’ordre de grandeur d’un résultat est estimé:

  24% de 4800 fr., c’est environ le quart de 4800 fr., soit environ 1200 fr.
  $3{,}45 \cdot 268{,}5$ se situe entre $3 \cdot 260 = 780$ et $4 \cdot 270 = 1080$

Ligne directrice 8 — ***Fonctions***

Les élèves développent la notion de fonction.

Point de convergence 8a — ***Variables***

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves sont accoutumés à utiliser des variables.

Point de convergence 8b — ***Proportionnalité***

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves reconnaissent et savent traiter des relations de proportionnalité et de proportionnalité inverse. Ils peuvent leur associer des situations du quotidien.

Commentaires

– Les concepts de fonction et de variable peuvent être introduits très tôt, sans formalisme, par exemple sous forme de devinettes:

  «je pense à un nombre, je le double et j'ajoute 10, j'obtiens 50. Quel est ce nombre?»

  Le concept formel de fonction se développe alors lentement, avec son langage spécifique.

– On trouve dans la vie quotidienne quantité de relations fonctionnelles qui facilitent la compréhension de la notion de fonction:
  - marchandise, prix, rabais
  - objet réel et maquette (échelle)
  - relations entre diverses variables, par exemple volume, rayon et hauteur d'un cylindre
  - courbe de température
  - courbe de croissance d'une population
  - etc.

– Fonctions et variables apparaissent régulièrement sous forme de tableaux de nombres ou de graphiques et permettent de résoudre équations, inéquations et systèmes d'équations et d'inéquations.

– Les élèves comprennent la signification des expressions littérales rencontrées, le rôle des lettres, des parenthèses et l'ordre des opérations. Ils savent remplacer les lettres par les nombres correspondants, calculer la valeur d'une lettre si l'on connaît celles des autres.

  Dans les formules simples et souvent utilisées, ils savent exprimer la valeur d'une lettre en fonction des autres.

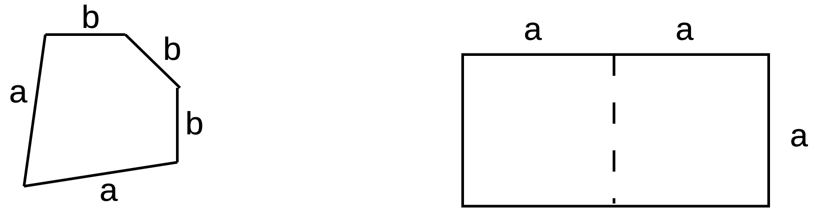
– Ils sont capables de reconnaître l'équivalence de différentes expressions littérales.

  Par exemple: en recherchant la somme des n premiers nombres entiers, deux résultats ont été trouvés:

  $(n^2 + n) : 2$ et $\frac{n}{2} \cdot n + \frac{n}{2}$

  Ces expressions littérales sont-elles équivalentes?

– Dans des cas simples, ils savent réduire une expression. Le calcul littéral sera évidemment un peu plus poussé pour les élèves qui doivent maîtriser les algorithmes de résolution d'équations, d'inéquations et de systèmes. Mais tous les élèves devraient au moins pouvoir maîtriser les exemples suivants:



Périmètre $= a + a + b + b + b = 2a + 3b$ *Aire* $= (a + a) \cdot a = 2a \cdot a = 2\,a^2$

– Les élèves connaissent les fonctions associées à des relations de proportionnalité et de proportionnalité inverse. Ils en connaissent diverses propriétés et applications par exemple dans les cas suivants: vitesse, pente, densité, rendement, rabais, etc.

– L'étude de la proportionnalité peut se faire sous différents aspects:
  - tableaux de nombres
  - représentations graphiques
  - formules: $y = f(x) = k \cdot x$

Ligne directrice 9 — ***Se repérer dans l'espace***

Les élèves apprennent à s'orienter et à se mouvoir dans l'espace. Ils peuvent décrire orientations et mouvements.

Point de convergence 9a — ***Structures spatiales***

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves construisent à l'aide de divers matériaux des solides élémentaires. Ils saisissent, au propre comme au figuré, les structures spatiales de ces objets.

Point de convergence 9b — ***Représentation de l'espace***

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves connaissent des méthodes de représentation en deux dimensions d'objets de l'espace, dont au moins le dessin schématique, le plan coté, et la représentation en perspective.

Point de convergence 9c ***Surfaces et solides***

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves sont capables d'analyser les figures élémentaires du plan et les objets élémentaires de l'espace par des mesures et calculs.

Point de convergence 9d ***Transformations***

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves sont capables de transformer, de manière contrôlée, des figures du plan, en grandeur et en position. En particulier, ils connaissent les isométries et les similitudes de figures.

Commentaires

– Dans les premières années de la scolarité, l'élève apprend à se situer lui-même dans l'espace, à décrire ses propres mouvements, pour ensuite le faire pour d'autres objets. Il s'imprègne petit à petit des concepts de repère et d'orientation d'objets.

  Il peut alors décrire la position et le mouvement d'objets de l'espace du point de vue de l'objet en mouvement (point de vue du pilote) ou de celui de l'observateur (point de vue de la tour de contrôle).

– Les représentations graphiques telles que esquisses, plans, diagrammes, cartes, etc., jouent aujourd'hui un grand rôle. L'entraînement de l'intuition géométrique doit aider l'élève à comprendre de telles représentations et à en réaliser lui-même.

– Les élèves font l'expérience des propriétés d'objets géométriques, en particulier de ceux qu'ils ont construits. Il existe beaucoup de matériaux pour cela: carton, polydrons, pailles avec nœuds de connexion, collection de développements, Lego, etc.

– Les élèves apprennent à observer leur environnement immédiat, à le décrire et à le représenter. Ils développent alors des compétences telles que: vérifier, associer, classer, décrire des figures avec précision, formuler, expliquer et utiliser des propriétés.

– Les élèves sont capables de transformer de manière contrôlée une figure géométrique en grandeur et position. Ils découvrent l'existence de transformations qui conservent certaines propriétés (conservation des distances, des angles, des rapports, etc.).

De telles recherches se déroulent de manière concrète, par exemple à l'aide de miroirs, de pliages, d'étirements de surfaces, etc.

La description formelle des transformations géométriques n'apparaîtra qu'en fin de scolarité et de manière différenciée. De même, les rapports entre transformations géométriques et fonctions numériques pourraient être abordés.

– Certaines propriétés des objets de l'espace sont difficilement exprimables sous forme d'objectifs qui peuvent devenir opérationnels au niveau de l'école obligatoire: propriétés topologiques, dimensions, sens d'un objet, etc. Ces propriétés peuvent cependant parfaitement être perçues et décrites par les élèves, à propos d'objets qu'ils manipulent.

– Les élèves maîtrisent une méthode de représentation plane des objets de l'espace. Réciproquement, ils peuvent construire ces objets à partir de projections, de développements ou, dans des cas simples, de représentations en coupe.

– Les élèves maîtrisent les constructions suivantes:
  - construction de parallèles, de perpendiculaires, médiatrice d'un segment, bissectrice d'un angle
  - symétrie axiale et centrale
  - figures isométriques et semblables

– Les élèves savent utiliser le théorème de Pythagore et les propriétés de la similitude pour résoudre des problèmes.

– Les élèves savent déterminer:
  a. l'aire d'un rectangle, d'un parallélogramme, d'un triangle, ainsi que des surfaces décomposables en ces éléments
  b. la circonférence d'un cercle et l'aire d'un disque
  c. les aires et volumes d'un prisme, d'une pyramide, d'un cône, d'un cylindre et d'une sphère

Conclusions

Conséquences

Ce document, élaboré par le Groupe Mathématique de la Commission pédagogique de la CDIP, a fait l'objet d'un important travail critique lors du Forum suisse de mathématiques qui s'est déroulé à Wildhaus du 25 au 27 novembre 1996. Sa rédaction finale reflète donc un fort consensus. S'il est accepté, cela aura pour conséquence:

• sur les méthodologies

Il implique une conception nouvelle de l'enseignement des mathématiques, donc une révision des méthodologies, processus qui est déjà en cours dans certaines régions.

• sur l'évaluation

Une évaluation traditionnelle, soit essentiellement sommative, va à l'encontre des idées fondamentales développées dans ce document, en particulier en ce qui concerne les espaces de liberté. Là aussi, une nouvelle conception de l'évaluation doit être envisagée, ce qui est également déjà le cas dans certains cantons.

• sur la formation des enseignants

Toute réforme touche des enseignants qui ont eux-mêmes vécu un enseignement basé sur une méthodologie ancienne. Il importe donc de prévoir une période particulière de transition qui leur permettra de se familiariser avec les nouvelles méthodes. Ce document est une référence essentielle pour la formation initiale et continue des enseignants.

• sur les échanges en Suisse

Ce document rend nécessaire l'échange régulier d'informations entre toutes les régions et cantons de notre pays. Il faut en effet poursuivre la réflexion engagée, suivre ses effets sur les curricula et les méthodologies, et plus généralement continuer d'étudier les incidences de la recherche en didactique des mathématiques sur l'enseignement.

Il serait également judicieux de constituer rapidement une banque de situations mathématiques, dans l'esprit de ce document, avec des comptes rendus d'expérimentations en classe.

Plus particulièrement, des questions comme la gestion du cahier de l'élève, l'usage d'un dictionnaire de mathématiques, l'exploitation de la calculatrice ou d'autres moyens électroniques dans l'enseignement, doivent faire l'objet de recherches et d'échanges permanents.

Freiräume – Richtlinien – Treffpunkte: Mathematikunterricht während der obligatorischen Schulzeit

Espaces de liberté – lignes directrices – points de convergence: l’enseignement des mathématiques durant la scolarité obligatoire

Vorschläge zur Harmonisierung
Proposition d’harmonisation

49