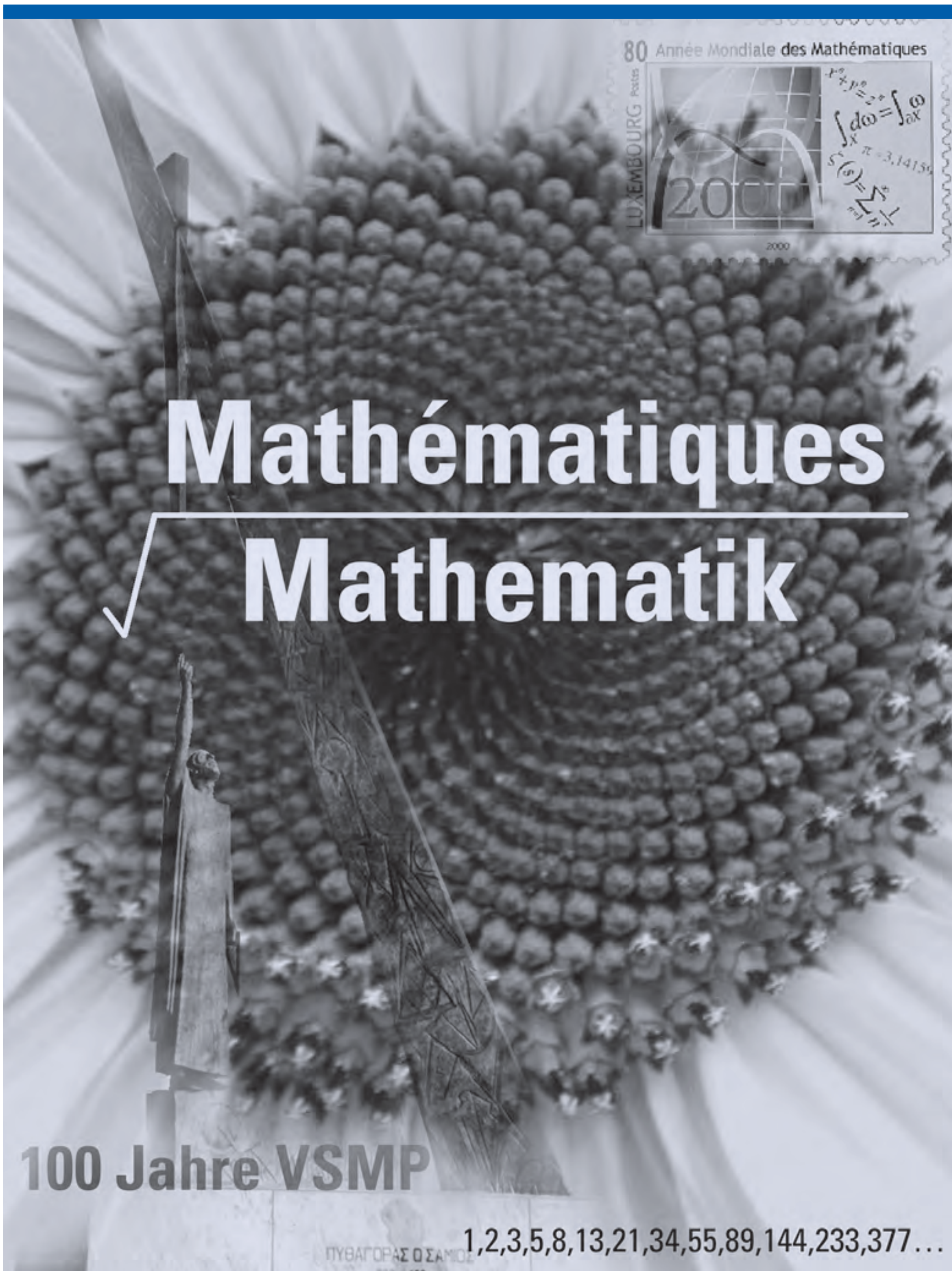
Gymnasium Helveticum

Nr. 1/02



Mathematik

Mathématiques

Entdecker?

Superware!

Die Klett Software

für Mathematik und Naturwissenschaften.

Sparen Sie sich langes Suchen: Wir bieten Ihnen die Medien und Materialien, die Sie für Ihre Arbeit brauchen – alle auf CD-ROM. Manche nennen es editierbare Multimediafolienfilmarbeitsblättersammlung – *wir nennen es Superware!*

Die Klett Mediothek – Superware vom Feinsten

Diese interaktive Mediensammlung bietet Ihnen alles, was Sie zum Vorbereiten und Durchführen anschaulicher Unterrichtsstunden brauchen – zeitsparend, interaktiv und motivierend. Jede Klett Mediothek umfasst mehr als hundert Medien auf einer CD-ROM: interaktive Bildinformationen, Overlays bzw. Folienfolgen, Fotos, Trick- und Videofilme, ein Glossar und weitere interaktive Elemente wie zum Bespiel Modellversuche – vieles auch zum Ausdrucken!

Mediothek Biologie 1 – Zelluläre Phänomene
Einzellizenz: CD-ROM mit Handbuch
3-12-155010-1 Fr. 96.–

Mediothek Biologie 2 – Menschenkunde I
Einzellizenz: CD-ROM mit Handbuch
3-12-155013-6 Fr. 96.–

Mediothek Chemie 1 – Atombau, Periodensystem und chemische Bindung
Einzellizenz: CD-ROM mit Handbuch
3-12-155020-9 Fr. 96.–

Mediothek Mathematik 1 – Geometrie I
Einzellizenz: CD-ROM mit Handbuch
3-12-155030-6 Fr. 96.–

Mediothek Mathematik 2 – Algebra I
Einzellizenz: CD-ROM mit Handbuch
3-12-155033-0 Fr. 96.–

Mediothek Physik 1 – Optik I
Einzellizenz: CD-ROM mit Handbuch
3-12-155040-3 Fr. 96.–

Fordern Sie am besten gleich den kostenlosen Prospekt und die Prüf-CD-ROM Superware an:
Klett und Balmer AG, Verlag, Baarerstrasse 95, 6302 Zug
Telefon 041-726 28 50, Fax 041-726 28 51, info@klett.ch, www.klett.ch

Klett
SCHWEIZ

Gymnasium Helveticum

Nr. 1/02

Inhaltsverzeichnis
Sommaire

Informationen
Tour d'horizon

Titelbild: Wie in vielen Pflanzen, so sind auch in der Sonnenblume die Samen in Spiralen angeordnet, deren Anzahl durch benachbarte Zahlen der Fibonacci-Folge gegeben sind. Im Bild zählen wir deren 55, die nach rechts drehen und 34 linksdrehende. – Finden Sie diese? Foto: Stefanie Hasler

Zu diesem Heft
Éditorial

Der Verein der Schweizer Mathematik- und Physiklehrerinnen und -lehrer (VSMP) feiert demnächst seinen hundertsten Geburtstag. Mit der vorliegenden Nummer macht der Jubilar sich und allen Kolleginnen und Kollegen aus anderen Fakultäten ein Geschenk. Die Artikel richten sich ganz bewusst auch an Nicht-Mathematiker/innen und verstehen sich als Brückenschlag, der das interdisziplinäre Gespräch im Lehrerzimmer anregen soll.

Viele Kolleginnen und Kollegen – die meisten besuchten einst ein Gymnasium – haben keine unbeschwerten Erinnerungen an den Mathematikunterricht, zu sehr empfanden sie Mathematik als Selektionsfach. Gerade sie mag es ganz besonders erstaunen, wie zahlreiche Leute vom Fach auf meine Frage reagierten: «Warum soll man sich für Mathematik interessieren?» Stets lautete die Ant-

La Société suisse des professeurs de mathématiques et de physique fêtera prochainement son 100e anniversaire. Avec ce numéro, la centenaire offre à tous ses collègues un magnifique cadeau; les articles s'adressent consciemment aux non-mathématiciens également et cet effort devrait enrichir les échanges interdisciplinaires dans les salles de professeurs.

Les mathématiques font trop souvent figure de branche de sélection, et plusieurs de nos collègues n'ont pas gardé un bon souvenir de l'enseignement suivi lorsque, pour la plupart, ils étaient au gymnase. Ils ne manqueront certainement pas de s'étonner en lisant que, à la question «Pourquoi donc s'intéresser aux mathématiques?», les spécialistes répondent en chœur: «C'est si beau!». Indépendamment de l'article figurant dans ce numéro, un collègue a notamment mis en

Schweizerische Gesellschaft für Gesprächspsychotherapie und personzentrierte Beratung **SGGT**

Société Suisse pour l'approche et la psychothérapie centrées sur la personne **SPCP**

Praxisbegleitende Fortbildung in personzentrierter Beratung

Zweijährige, praxisbegleitende Fortbildung nach dem Konzept von **Carl Rogers.** Für Personen aus sozialen, medizinischen, pädagogischen, seelsorgerlichen und anderen beratenden Berufen.

Beginn neuer Kurse:

Zweijährige, praxisbegleitende Fortbildung:

in Zürich	Niveau II	Beginn	April	2002
in Zürich	Niveau II	Beginn	Februar	2002
in Zürich	Niveau I	Beginn	September	2002
in Zürich	Niveau II	Beginn	Oktober	2002
in Muri AG	Niveau I	Beginn	März	2002
in Muri AG	Niveau II	Beginn	Mai	2002
in Luzern/Zug	Niveau I	Beginn	Januar	2002
in Luzern	Niveau I	Beginn	Juni	2002
in Basel (Bottmingen)	Niveau I	Beginn	Oktober	2002
in Basel (Bottmingen)	Niveau II	Beginn	Januar	2003

Detaillierte Informationen im SGGT-Kursprogramm 2002
Bestellung und Information beim SGGT-Sekretariat,
Josefstrasse 79, 8005 Zürich
Tel. 01 271 71 70 **Fax 01 272 72 71**
E-mail: sggtspcp@access.ch **Webseite: www.sggt-spcp.ch**

Internet: www.camprock.ch

Der ideale Ort für eine Schulverlegung

Gerne helfen wir Ihnen beim Planen und bei der Durchführung Ihrer nächsten Schulverlegung.

Für Lehrer haben wir ein spezielles Dossier zusammengestellt, das die verschiedenen Ausflugsziele und Sehenswürdigkeiten in unserer Umgebung vorstellt: Naturschutzgebiete, Kletterfelsen, Schlösser, Ruinen, Museen, Zoos, Firmenbesichtigungen, Velo- und Wanderrouten, Besichtigung der Stadt St. Gallen usw.

Neues Jugendlagerhaus in idealer Umgebung direkt an der Sitter, zwischen Bodensee und St. Gallen. Auch für Regenwetter geeignet, da verschiedene Aufenthaltsräume vorhanden sind. Hartplatz, Spielwiese, baden und schläucheln im Fluss und Lagerfeuerarena vor dem Haus, Überwinderparcours.

Auch geeignet für körperlich Behinderte (Invaliden-WC und -Dusche vorhanden).

Preis:
Montag Mittagessen bis Samstag Mittagessen: Fr. 200.–
(inkl. Vollpension, Hepro, Diaprojektor, Video, Spiel- und Sportgeräte, auf Wunsch Abseilen, Führung im Naturschutzgebiet).

wort: «Weil sie so schön ist.» Ein Kollege verwies – unabhängig vom Artikel in diesem Heft – auf die faszinierenden Strukturen, auf die Zusammenhänge zwischen Mathematik und Musik.

Mathematik als Beruf? Eine Hochschulprofessorin begründete ihren Entscheid damit, dass sie nur ungern Sekundärliteratur lese, sich lieber ein Problem stelle, darüber nachdenke und nach einer Lösung suche. Müssen wir daraus schliessen, dass wir in der Mittelschule bloss etwas denkfaul waren? Dank der «mathematischen Geburtstagstorte» haben Sie liebe Kollegin, lieber Kollege Gelegenheit, unbelastet von früherem Notendruck in die mathematische Welt einzutauchen. Und wer mit Mathematik vertraut ist, wird sich über die bunte Palette der dargestellten Probleme freuen.

Dem VSPM gratuliert das «Gymnasium Helveticum» zum frohen Anlass und Ihnen, liebe Kollegin, lieber Kollege wünschen wir ein unbeschwertes Jahr 2002.

Verena E. Müller

exergue la fascination des structures et les relations entre la musique et les mathématiques.

Mathématicien(ne), une profession? Une professeure d'Université justifie son choix en expliquant que la lecture de littérature secondaire ne l'intéresse guère, qu'elle préfère de loin poser un problème, y réfléchir et chercher une réponse. Doit-on en déduire que nous avons été trop paresseux par le passé? Ce «gâteau d'anniversaire» nous offre à tous, chers collègues, l'occasion de plonger dans le monde des mathématiques, libérés de toute pression: pas d'examen, pas de notes! Quant aux mathématiciens chevronnés, ils trouveront à coup sûr leur compte dans la riche palette des problèmes présentés ici.

La Rédaction du Gymnasium Helveticum souhaite à la SSPMP un joyeux anniversaire et vous souhaite à tous, chères lectrices et chers lecteurs, chères et chers collègues, une bonne et heureuse année nouvelle.

Verena E. Müller

Ein ganz herzliches Dankeschön geht an Prof. Ursula Eisler, Präsidentin der Deutschschweizerischen Mathematikkommission und an das Redaktionsteam. Ohne ihre monatelange Vorarbeit wäre das Heft nie zustande gekommen.

Nous remercions chaleureusement la Prof. Ursula Eisler, présidente de la commission des mathématiciens suisses alémaniques ainsi qu'à l'équipe de rédaction. Sans leur engagement au cours des derniers mois, ce numéro n'aurait jamais vu le jour.

Unsere Autorinnen und Autoren / Nos auteurs:

Albert Gächter, Gymnasium Friedberg, Gossau SG
Nicolas Martignoni, Collège Sainte-Croix, Fribourg
Urs Kirchgraber, ETH Zürich
Armin P. Barth, Kantonsschule Baden
Georg Schierscher-Marxer, Liechtensteinisches Gymnasium Vaduz
Peter Gallin, Kantonsschule Zürich Oberland, Wetzikon und Universität Zürich
Aldo Dalla Piazza, Universität Bern
Kristine Barro-Bergflödt, Männedorf

Albert A.Gächter

Grosse Zahlen

Der Autor nimmt uns auf eine Reise durchs Zahlenland mit, wobei er seine Ausführungen durch bekannte und weniger bekannte historische Ereignisse anreichert.

L'auteur nous emmène en voyage au pays des nombres, agrémentant notre périple par le souvenir d'événements historiques.

Anna verstand alles. Sie fand den Aufbau eines Atoms so einfach, wie ein Kanarienvogel es einfach findet, seine Körner aufzupicken. Sie begriff die Grösse des Universums, und die Unzahl der Sterne entlockten ihr nicht mal einen schnelleren Wimpernschlag. Eddingtons Berechnung, wie viele Elektronen es wohl im Weltall gebe, schien ihr beachtlich, aber doch durchaus überschaubar. Es war nicht einmal schwer, sich eine noch grössere Zahl als diese auszudenken. Anna verstand ohne Schwierigkeit, dass Zahlen unendlich weitergehen und dass es keine Grenze gab. Bald entstand allerdings ein Mangel an Wörtern, um diese immer grösseren Zahlen einigermassen zu bezeichnen. Das Wort «Million» reichte für die meisten normalen Dinge. Eine Billion war schon seltener. Wünschte man aber an eine Zahl zu denken, die noch viel viel grösser als Billionen und Trillionen war, so musste man ein Wort erfinden. Anna erfand die «Squillion». Es war ein sonderbar elastisches Wort. Man konnte es beliebig drehen wie ein neues Gummiband. Und Anna brauchte ein solches Wort dringend.

Dieses schöne Zitat stammt aus dem Buch «Hallo, Mister Gott, hier spricht Anna» von einem irischen Mathematiker mit dem Pseudonym Fynn. Im Gegensatz zu Anna haben viele Menschen keineswegs ein so unverkrampftes Verhältnis zu grossen Zahlen.

Zweck der Zahlen ist es, einige wichtige Aspekte unserer riesigen Welt mit wenigen Symbolen zusammenzufassen. Zahlen gehören zum Alltag der Menschen. Staatsausgaben gehen in die Milliarden. In der Computerbranche sind die Kilobytes längst von den Giga- und Terabytes abgelöst worden. Der Vorstoss ins Universum und in den subatomaren Bereich beschert uns oft unfassbare Zahlenmonster und -winzlinge. Dabei stellen wir fest, dass unsere Vorstellungskraft meistens nicht ausreicht. Bereits die Bezeichnungen Billiarde, Trillion, Quintillion usw. tönen ja wie die Namen ausgestorbener Dinosaurier. Die Verwendung von Taschenrechnern und Computern macht heute viele unkritisch gegenüber den Resultaten. Schätzen von Grössenordnungen wird nicht mehr trainiert. Das sorglose Hantieren mit grossen Zahlen in den Medien ist zum Teil erschreckend.

Unsere kurze Reise ins Zahlenland geht folgenden Fragen nach:

- Zahlwörter und Zahlzeichen haben eine lange Geschichte. Weshalb waren sie früher nicht so selbstverständlich wie heute?
- Wie rechnet man schnell mit grossen Zahlen?
- Womit werden grosse Zahlen erzeugt?
- Wie kann man grosse Zahlen veranschaulichen?
- Gibt es Anwendungen für riesige Zahlen?

Die Sandzahl des Archimedes

In seiner Schrift «Die Sandzahl» unternimmt Archimedes den Versuch, neue Zahlworte und Zahlen zu schaffen, welche die alltäglichen Vorstellungen der Griechen bei weitem übertrafen. Was eine Myriade, d. h. 10 000 überstieg, konnte damals nicht mehr vernünftig benannt und geschrieben werden. So schuf Archimedes ein neues eigentümliches Zahlensystem, welches die Zahlworte, nicht aber die Zahlzeichen für grosse Zahlen lieferte. Er schrieb:

Etliche glauben, König Gelon, dass die Zahl der Sandkörner unendlich sei. Ich spreche dabei nicht allein vom Sand um Syrakus und im übrigen Sizilien, sondern auch von dem Sande der ganzen bewohnten und unbewohnten Erde. Andere gibt es, die zwar nicht der Ansicht sind, *dass die Zahl der Sandkörner unendlich sei, die aber meinen, dass es keine so grosse Zahl gebe, die die Zahl der Sandkörner übertreffe. Es ist klar, dass die Vertreter dieser Ansicht, wenn sie sich eine Kugel aus Sand vorstellten, so gross wie die Erdkugel, nachdem in dieser die Meere und alle Vertiefungen bis zur Gipfelhöhe der höchsten Berge aufgefüllt wären, um so mehr der Ansicht wären, dass keine Zahl namhaft gemacht werden könne, die grösser wäre als die Zahl der Sandkörner dieser Kugel.*

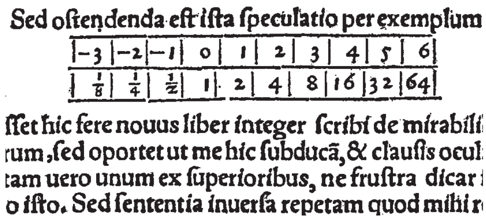
Mit kunstvollen Abschätzungen kam Archimedes zum Schluss, dass in der vom Astronomen Aristarch berechneten Fixsternsphäre mit der heute üblichen Schreibweise 10^{63} Sandkörner Platz finden. Als Zugabe konstruierte er noch die Zahl 10 hoch 80 Billiarden. Wahrlich gigantisch! Den Schluss der Abhandlung bilden die zwei folgenden Sätze:

Ich glaube, König Gelon, dass dies der Menge der nicht mathematisch gebildeten Menschen unglaublich erscheinen wird, den mathematisch gebildeten Menschen, die über die Abstände und die Grössenverhältnisse der Erde, der Sonne, des Mondes und des ganzen Weltalls nachgedacht haben, aber keineswegs. Deshalb glaubte ich, dass es auch dir wünschenswert sein würde, dies zu erkennen.

Ein Wanderprediger hilft weiter

19. Oktober 1533. Pfarrer Michael Stifel hatte auf 8 Uhr den Weltuntergang prophezeit. Der Tag war schon angebrochen, aber nichts geschah. Um 9 Uhr nahmen die kurfürstlichen Reiter aus Wittenberg den enttäuschten Stifel vor der wütigen Menschenmenge in Schutzhaft. Dank der Fürsprache seines Freundes Luther musste Stifel nicht sterben, sondern durfte in Holzdorf weiter als Pfarrer wirken. 1544 erschien seine *Arithmetica integra*, ein Algebrawerk mit vielen neuen Gedanken. Im 3. Buch zeigt er fast beiläufig eine unscheinbare Tabelle. Die obere Zeile enthält eine gleichabständige (arithmetische) Folge, die untere eine gleichverhältige (geometrische) Folge. Dabei entsprechen sich die 0 und die 1. Oben schreitet man vorwärts durch die Addition von 1, unten durch Multiplikation mit 2.

Stifel schreibt, dass Multiplikationen und Divisionen in der geometrischen Folge durch Additionen und Subtraktionen in der arithmetischen Folge geleistet werden können.


Sed ostendenda est ista speculatio per exemplum

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64

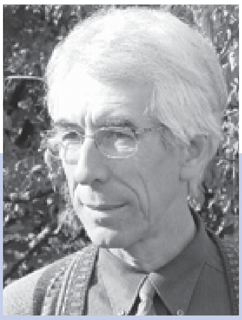
ſſet hic fere nouus liber integer scribi de mirabili
rum, sed oportet ut me hic subducã, & clausis ocul
tam uero unum ex superioribus, ne frustra dicar
o isto. Sed sententia inuersa repetam quod mihi r

Um z. B. 2 mal 16 auszuführen, addiert man die darüber stehenden Zahlen 1 und 4. Unter der 5 steht dann das Resultat 32. Möchte man 32 durch 4 teilen, so subtrahiert man die oben stehenden Zahlen 5 und 2. Unter der 3 findet sich das Ergebnis 8. Sind die Glieder der geometrischen Folge als Potenzen geschrieben, so zeigt sich die ganze Tragweite der Überlegungen von Stifel. Potenzen mit gleicher Basis können multipliziert, dividiert oder potenziert werden, indem man mit den Exponenten eine Stufe tiefer rechnet!

Damit gab Michael Stifel die eigentliche Initialzündung für eine Idee, welche das Rechnen in Zukunft revolutionieren sollte: die *Logarithmen*.

Achtung Vertauschung!

Es gibt genau 24 Möglichkeiten, die Buchstaben des Wortes AMOR zu vertauschen. Auf dem ersten Platz können 4 Buchstaben stehen. Ist dieser gewählt, bleiben für den 2. Platz nur noch 3 Buchstaben übrig. Für den 3. Platz dann 2 und zuletzt ein einziger Buchstabe. Wir erhalten demnach 4*3*2*1 = 24 Möglichkeiten (Permutationen, Vertauschungen). Christian Kramp hat im Jahre 1808 dafür ein neues Symbol geschaffen und es «Fakultät» getauft.
4! = 1*2*3*4 (lies: 4 Fakultät). Diese Produkte mit fortlaufenden Faktoren nehmen wertmässig schnell zu.



Albert Gächter ist seit über 30 Jahren Lehrer am Gymnasium Friedberg in Gossau. Er unterrichtet die Fächer Mathematik und Informatik. Daneben engagiert er sich in der Lehrerfortbildung im In- und Ausland.

20! ist bereits 2 432 902 008 176 640 000. Wir kennen die genaue Sitzordnung der Jünger beim letzten Abendmahl nicht. «Er setzte sich zu Tische mit den Zwölfen» heisst es bei Matthäus 26, 20. Wieviele verschiedene Anordnungen waren möglich, wenn wir annehmen, dass Jesus seinen festen Platz inne hatte?

Es gibt 12! = 479 001 600 Vertauschungen von 12 Personen. Hätten die Jünger alle 5 Minuten eine neue Sitzordnung eingenommen, wären sie noch bis zum Jahre 4557 damit beschäftigt!

Auch Folgen und Reihen stellen Generatoren für grosse Zahlen dar. Nehmen wir an, dass jemand für uns am 1. Jan. des Jahres 1 einen Räppler zu 5% Zins angelegt hat. Über welches Kapital können wir nach 2000 Jahren verfügen?

a) Bei einfacher Verzinsung erhalten wir den ursprünglichen Räppler plus 2000 mal den Zins im Wert von 0.05 Rp pro Jahr. Dies ergibt den stolzen Betrag von ca. 1 Franken!
b) Mit Zinseszins erwarten wir natürlich etwas mehr. Nach jedem Jahr wird das Kapital mit 1.05 multipliziert. 2000 Jahre machen aus dem Räppler einen Betrag von 1.05^{2000} Rappen. Dies sind $2.39*10^{40}$ Fr.

Können wir uns solche Beträge noch vorstellen?

Veranschaulichung

Mathematiker kennen verschiedene Möglichkeiten, um eine Vorstellung von grossen Zahlen zu gewinnen. Sie schliessen diese in nummerierte Käfige ein, erzeugen eine repräsentative Graphik oder vergleichen mit einer vertrauten Situation. Im obigen Beispiel könnten wir uns bei einem heutigen Goldpreis von 15 000 Fr. pro kg mit $2.39*10^{40}$ Fr. etwa 80 Milliarden Erdkugeln aus purem Gold leisten.

Nach einem Bericht des Historikers Ja'qubi (um 880) hat Qaflan für die Tochter des Königs Balhait das Schachspiel erfunden. Als Belohnung hatte er einen Wunsch frei. Qaflan erbat sich Weizenkörner und zwar so, dass auf das erste Feld des Schachbrettes ein Korn, auf das zweite zwei Körner usw. gelegt werden, d. h. auf jedes Feld doppelt soviele wie auf das vorhergehende Feld. Auf dem gesamten Schachbrett befinden sich dann total

18 446 744 073 709 551 615

Weizenkörner. Rechnet man 16 Körner auf einen Kubikzentimeter und füllt Güterwagen à 100 m^3 (grosszügig) und 15 m Länge, so dauert die Vorbeifahrt des Güterzuges mit 100 km/h etwa 170 Jahre!

Von der Enigma bis zur Homöopathie

Die Frage muss kommen: Welchen Nutzen haben grosse Zahlen? Wenn Zahlen zum Zählen da sind, weshalb interessiert man sich für Zahlen grösser als 10^{120}? Stopft man nämlich das gesamte Weltall voll mit «Weizsäckerschen Urs», den kleinsten physikalisch möglichen Teilchen, so benötigt man weniger als 10^{120} Exemplare.

Mathematiker sind stets auf der Suche nach Mustern und Gesetzmässigkeiten. Obgleich einige Stellen für den Alltag genügen, kennt man von der Zahl π momentan 68.7 Milliarden Stellen. π ist vermutlich das älteste Forschungsobjekt der Mathematik. Die Ziffernfolge 0123456789 z. B. tritt nicht vor der 17 Milliardsten Stelle auf. Nebst solchen innermathematischen Interessen gibt es handfeste Anwendungen, welche mit grossen Zahlen arbeiten.

Zur Speicherung riesiger Datenmengen dienen heute Festplatten mit einer Kapazität von bis zu 180 Gigabytes (etwa 180 Milliarden Zeichen). In Schränken zusammengefasst, erreicht man damit problemlos ein Speichervolumen von mehreren Terabytes. Trotz der geringen Bauhöhe besteht eine Festplatte in der Regel aus mehreren Scheiben, welche sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von maximal 10 000 Umdrehungen pro Minute drehen. Dabei sausen die Ableseköpfe in einer Entfernung von nur 0.0003 mm über die Scheiben (Vergleich: ein Menschenhaar besitzt einen Durchmesser von etwa 0.1 mm).

Wer heute E-mails verschickt, Online-Banking betreibt, per Internet einkauft oder an der Tankstelle mit der Kreditkarte Treibstoff bezieht, möchte sicher sein, dass niemand sich betrügerisch einmischt und Daten verfälscht oder stiehlt. Wie kann diese

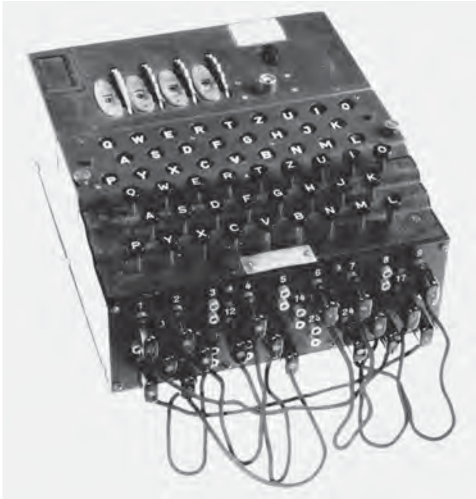
Sicherheit gewährleistet werden? Die Übertragungskanäle des World Wide Web (WWW) sind «offen wie Scheunentore» und mit geringem Aufwand anzuzapfen. Eine gute Antwort heisst Verschlüsselung. Moderne kryptologische Verfahren arbeiten mit grossen Zahlen. 1978 legten die Mathematiker Rivest, Shamir und Adleman ein Verfahren vor, das Primzahlen von der Grössenordnung 10^{200} verwendet. Es existiert noch kein Algorithmus, welcher innert nützlicher Frist ein Produkt von zwei solchen Primzahlen wieder in ihre Faktoren zerlegt. Bei einer neueren Methode kommen elliptische Kurven zum Zuge. Man beginnt mit einem Punkt auf der Kurve. Dieser wird mit einer geheimen Zahl von der Grösse 1060 multipliziert. Das Ergebnis ist ein neuer Kurvenpunkt. Aus der Kenntnis der Punkte ist es nicht möglich, diesen geheimen Multiplikator ausfindig zu machen.

Östlich von Kap Farvel (Grönland) muss das deutsche U-Boot U 110 am 9. Mai 1941 nach stundenlanger Jagd mit Wasserbomben der Engländer auftauchen. Sofort wird es durch die Korvette «Aubrietia» unter Beschuss genommen. Kommandant Julius Lemp und die Besatzung verlassen schwimmend das torkelnde Boot, dessen Sprengung sie befehlsgemäss vorbereitet haben. Der Zerstörer «Bulldog» dreht bei, um die Deutschen aufzunehmen und das U-Boot zu entern. Seit Monaten suchen die Engländer eine Gelegenheit, die Codebücher, den Marine-Funkschlüssel und das Chiffriergerät «Enigma» mit allem Zubehör zu entwenden. Als Lemp merkt, dass sein U-Boot vor der Explosion geentert wird, versucht er zurück zu schwimmen. Er wird von den Briten erschossen. Nach vier Stunden gefahrvoller Arbeit ist das geheime Material in britischem Besitz. Kein Deutscher weiss etwas davon. Die Marine hätte sonst ihren Code radikal umgestellt.

Die Enigma (lat. aenigma: Rätsel) wurde vom deutschen Militär während des zweiten Weltkrieges verwendet, um seine Funksprüche zu verschlüsseln. Wie die einzelnen Buchstaben auf einem Rotor miteinander verdrahtet waren, gehörte zu den ganz streng gehüteten Geheimnissen. Deshalb erhielten die deutschen U-Boot-Kommandanten den Befehl, in kritischer Lage die Rotoren sofort zu zerstören oder zu versenken.

Anfänglich kamen drei feste Rotoren zum Einsatz. Dies ergab bereits 26*26*26 = 17 576 verschiedene Verdrahtungen. Später wurden sie auswechselbar gemacht, was die Möglichkeiten auf das Sechsfache steigerte. Im Verlaufe des Krieges kamen weitere Walzen dazu. Mit der revolutionären Idee des Steckbrettes stieg die Zahl der Verschlüsselungsvarianten ins astronomische.

Die Deutschen waren bis 1974 (!) der Meinung, dass ihre Enigma mit weit über einer Trillion Möglichkeiten der Verschlüsselung absolut unknackbar gewesen ist.



Enigma der Marine
Quelle: Deutsches Museum München

Sie irrten sich. Ab August 1939 wurde im Gut Bletchley nördlich von London mit Hochdruck an der Entschlüsselung von Enigma-Funksprüchen gearbeitet. Dank genialer Vorarbeit dreier polnischer Mathematiker wusste man bereits viel über die Wirkungsweise und die Schwachstellen des Gerätes. Zur Schlüsselfigur im wahrsten Sinn des Wortes im Bletchley-Park avancierte der junge englische Mathematiker Alan Turing. Er konstruierte die sog. bombes, technisch heikle Apparate, welche in den Tausenden von täglich aufgefangenen Sprüchen nach bestimmten Mustern suchten. Seit 1940 konnten die Briten Enigma-Funksprüche in immer grösserem Masse mitlesen.

Das Brechen der Enigma-Verschlüsselung hat den Krieg wohl um Jahre verkürzt und viele Menschenleben gerettet.

Der Meissner Arzt Samuel Hahnemann gilt als Begründer der Homöopathie. Das Wort bedeutet «ähnliches Leiden». Zur Behandlung von Krankheiten dürfen nur solche Medikamente in geringen Dosen verabreicht werden, welche in höheren Dosen beim Gesunden ein ähnliches Krankheitsbild hervorrufen. Nimmt man z. B. homöopathisch zubereitetes, stark verdünntes Bienengift ein, so werden die Folgen von schädlichen Einflüssen behoben, welche gleiche oder ähnliche Beschwerden provozieren wie Bienengift. Die Verabreichung erfolgt in sehr starker Verdünnung, den sogenannten Potenzen. Bei den C-Potenzen (Centesimal, 100) wird 1 Teil Substanz mit 99 Teilen Verdünnungsmedium gemischt, dann verschüttelt oder verrieben und der Vorgang wiederholt (bei C 200 z. B. 200 mal; die Konzentration des Wirkstoffes ist damit auf 1durch 10^{400}gesunken!).

Zum Schluss unserer Reise ins Zahlenland lassen wir nochmals Fynn zu Wort kommen:

Es machte mir mehr und mehr Spass, auf Antworten Squillionen von Fragen zu wissen... Nur das andere Ende der Skala machte mir Sorgen. Ich fand keine einzige Antwort, auf die es nur eine einzige Frage gab.

Haben Sie noch Fragen?

Nicolas Martignoni

Cryptographie: un aperçu historique

Die Kryptographie ist beinahe so alt wie die Sprache; die Verbindung zwischen Mathematik und Kryptographie dagegen ist wesentlich jünger. Der Autor verfolgt die Entwicklung bis in die neueste Zeit.

La cryptographie est presqu'aussi ancienne que la langue; le lien entre cette science et les mathématiques en revanche s'avère beaucoup plus jeune, comme nous l'apprend cet article, relatant le développement de la cryptographie des origines à nos jours.

La cryptographie est presque aussi ancienne que le langage. En effet, dès que les hommes se sont transmis des messages, ils ont eu besoin d'éviter que certaines transmissions ne tombent entre des mains indésirables.

La connexion entre mathématiques et cryptographie est beaucoup plus récente. Elle n'est apparue que lorsque l'on a eu besoin d'analyser des cryptogrammes pour en intercepter le sens, et seulement quand on a eu les moyens techniques à disposition. Ainsi a-t-on pu étudier les diverses méthodes du chiffre au cours des âges, au travers du regard des mathématiques.

Dès le milieu du siècle dernier, l'usage des mathématiques est devenu indispensable pour casser et créer de nouveaux systèmes cryptographiques de plus en plus complexes. Les ultimes développements connus ont abouti aux systèmes actuels à clef publique, dont le meilleur exemple est le système RSA.

Comment préserver le secret d'un message ?

L'objectif de la cryptographie est de transmettre des informations à l'insu de quelqu'un. Il existe au moins deux méthodes pour atteindre ce but. La première consiste à cacher l'existence même du message. Cette méthode est appelée la *stéganographie*. Elle a été employée depuis des temps ancestraux.

La deuxième méthode est le *chiffrement*. Celui-ci ne dissimule pas l'existence du message, mais le rend incompréhensible en transformant le *texte* clair en un *cryptogramme*. Le chiffrement s'effectue à l'aide de deux procédés fondamentaux: la *transposition* et la *substitution*. Dans la transposition, les lettres du texte clair sont mélangées, mais non modifiées. L'ordre d'apparition des lettres est bouleversé. La transformation du mot **CRYPTE** en **PYTCER** est une transposition.

La substitution, au contraire, garde les lettres à la même position dans le texte clair, mais les remplace par d'autres symboles, la plupart du temps par d'autres lettres, ou encore par des chiffres.

Quelques procédés stéganographiques historiques

L'historien grec Hérodote raconte qu'un certain Histiée, voulant prendre contact secrètement avec son gendre, le tyran Aristagoras de Milet, choisit un esclave dévoué, lui rasa la tête et y fit tatouer le message à transmettre. On attendit que les cheveux repoussent pour l'envoyer à Aristagoras avec instruction de se faire raser le crâne.

Toujours d'après Hérodote, pour informer les Spartiates de l'attaque imminente des Perses, un certain Démarate, réfugié chez les Mèdes, utilisa un élégant stratagème. Il prit des tablettes, en racla la cire et grava à même le bois le message secret. Il recouvrit à nouveau les tablettes de cire. De cette façon, la tablette apparemment vierge n'attira pas l'attention. Après quelques tribulations, les Spartiates enlevèrent la cire et lurent le message, qu'ils transmirent aux autres Grecs. La bataille des Thermopyles s'ensuivit, qui permit à Léonidas de retarder les Perses trois jours au prix de sa vie et de celles de ses 300 soldats.

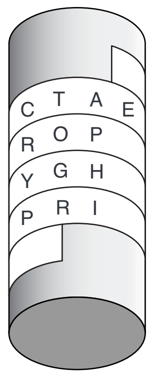
Une autre méthode consistait à marquer d'une piqûre d'épingle, dans un document quelconque, les lettres successives du message à envoyer. Ce moyen a été encore utilisé par les espions allemands durant la Première Guerre mondiale. Au cours de la Seconde Guerre mondiale, ils utilisèrent encore ce procédé en cochant les lettres de journaux avec de l'encre sympathique.

Une transposition: la scytale des Lacédémoniens

L'historien grec Plutarque (50–125 apr. J.-C.) nous raconte comment le gouvernement spartiate correspondait secrètement avec ses généraux en campagne, au V^{e} siècle av. J.-C. L'extrait ci-dessous est tiré de la «Vie de Lysandre», chapitre XIX.

«[...] Cette scytale est une telle chose: quand les éphores[1] envoient à la guerre un général ou un amiral, ils font préparer deux petits bâtons ronds de même grandeur et de même diamètre. Ils en gardent un par devers eux, et donnent l'autre à celui qu'ils envoient. Ces deux petits bâtons sont appelés scytales. Quand ils veulent envoyer un message secret et important, ils prennent un bandeau de parchemin long et étroit comme une courroie, qu'ils entortillent autour de leur bâton rond, sans laisser aucun espace vide entre les bords du bandeau. [...] Ils écrivent alors ce qu'ils veulent sur le parchemin ainsi roulé. Une fois le message écrit, ils déroulent le parchemin et l'envoient sans le bâton à leur capitaine. Celui-ci, quand il l'a reçu, ne peut rien y comprendre – parce que les lettres n'y ont point de suite ni de liaison logique, mais sont désordonnées – à moins qu'il ne prenne sa scytale et enroule autour la courroie de parchemin qu'il a reçue de telle sorte que, la spirale étant restaurée à l'identique, les lettres reforment la suite continue qu'elles ont dans le message.»

Cette façon de faire change l'ordre des lettres, sans les modifier. Il s'agit donc bien d'une transposition. L'exemple ci-dessous montre schématiquement comment le mot **CRYPTOGRAPHIE**, écrit verticalement sur une scytale, est transformé en **CTAEROPYGHPRI**.



Une substitution: le chiffre de César

L'auteur romain Suétone (fin du I^{er}s.-II^{e}s.) nous explique dans les «Vies des douze Césars» la façon dont Jules César chiffrait une partie de sa correspondance, afin qu'elle ne puisse être lue en cas d'interception. Voici l'extrait du livre LVI de la vie de Jules César:

«On possède de César des lettres à Cicéron, et sa correspondance avec ses amis sur ses affaires domestiques. Il y employait, pour les choses tout à fait secrètes, une espèce de chiffre (les lettres étant disposées de manière à ne pouvoir jamais former un mot), et qui consistait, je le dis pour ceux qui vou-

[1] Magistrats lacédémoniens élus par le peuple

dront les déchiffrer, à changer le rang des lettres, à écrire la quatrième pour la première, comme le D pour l'A, et ainsi des autres.»

La substitution proposée par César est donc un décalage de 3 positions dans l'alphabet, ce qui donne la correspondance du tableau ci-dessous.

Alphabet clair:	a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z
Alphabet chiffré:	D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C

Ainsi le texte clair **CRYPTOGRAPHIE** se traduira dans ce système cryptographique par le texte chiffré **FUBSWRJUDSKLH**.

Besoin de méthodes cryptographiques plus sûres

La technique permettant de déduire le texte clair d'un cryptogramme, sans connaître le procédé ou la clef de chiffrement, est appelée *cryptanalyse*. Elle se base notamment sur des calculs statistiques[2].

Les deux méthodes de cryptage exposées ci-dessus sont certes intéressantes du point de vue historique, mais n'offrent pratiquement pas de garantie de sécurité: il est en effet très facile de décrypter de tels messages, à l'aide de la cryptanalyse. Dans la méthode de César, chaque lettre du texte clair est toujours remplacée par le même symbole dans le cryptogramme (pour cette raison un tel chiffre est dit *monoalphabétique*), et il est facile de retrouver les symboles correspondant aux lettres les plus fréquentes, comme E ou S, puis toutes les autres par déduction.

Pour corser la difficulté de la cryptanalyse, on a besoin de systèmes cryptographiques plus complexes, où une lettre du texte clair n'est pas toujours représentée par le même symbole dans le cryptogramme. On parle de chiffre *polyalphabétique*.

Le système de Vigenère

Le plus célèbre des systèmes polyalphabétiques est celui de Blaise de Vigenère (1523–1596), publié en 1586 dans son «Traicté de chiffres ou secrètes manières d'escrire[3]». Son origine est pourtant plus ancienne, et remonte au savant florentin du XVe siècle Leon Battista Alberti. Plus connu pour ses travaux d'architecture – on lui doit la première fontaine de Trevi à Rome – il publia en 1470 dans son «Trattati in Cifra» un système qui utilisait une substitution polyalphabétique.

Le principe du système de Vigenère consiste à appliquer la méthode de César (décalage de l'alphabet) sur chaque lettre, en changeant à chaque fois le décalage. Ce système a eu jusqu'au début du siècle dernier la réputation d'un système inviolable. Il a même été utilisé par les militaires durant la Première Guerre mondiale.

Pourtant Charles Babbage (1791–1871), connu pour avoir posé les principes de l'ordinateur moderne, avait achevé la cryptanalyse de ce chiffre dès 1854. Babbage ne publia jamais sa découverte, mais un officier prussien, Friedrich Wilhelm Kasiski (1805–1881), publia en 1863 dans «Die Geheimschriften und die Dechiffrierkunst» cette cryptanalyse, qu'il avait découverte de manière indépendante.

Dans cet ouvrage, il indique en outre comment découvrir de façon simple la longueur de la clef d'un cryptogramme chiffré par le système de Vigenère, grâce à la méthode qui porte son nom. La connaissance de la longueur de la clef est un indice capital pour le cryptanalyste, et la recherche théorique d'une méthode pour la découvrir a abouti à ce que l'on appelle l'*index de coïncidence*.

L'index de coïncidence et les machines à crypter

En 1920, dans une monographie devenue célèbre depuis, William Friedman (1891–1969) développe les toutes premières applications des mathématiques à la cryptographie. Il y décrit comment calculer ce qu'il appelle l'index de coïncidence.

Cet outil permet notamment de découvrir si un message a été chiffré à l'aide d'une substitution monoalphabétique ou polyalphabétique, et, dans ce dernier cas, de calculer la longueur de la clef ayant servi au chiffrement. Cette première entrée des mathématiques dans le domaine coïncide avec le début de l'ère moderne de la cryptographie et l'avènement des premières machines à crypter, dont la plus connue est *Enigma*.

Les machines de ce type ont permis jusqu'après la Deuxième Guerre mondiale de rendre les cryptogrammes de plus en plus dif-

2 Voir sur ce sujet l'ouvrage [1], qui contient d'innombrables exemples pratiques

3 Pour une description complète du fonctionnement de ce système cryptographique, voir l'excellent livre [4].

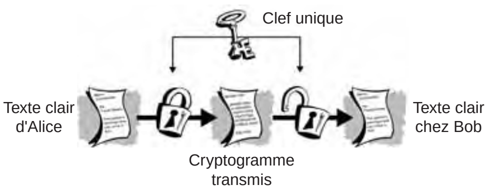
ficiles à décrypter. Elles furent utilisées entre autres dans l'Armée Suisse. Elles constituent la cause principale de l'avènement des premiers ordinateurs, destinés spécifiquement à la cryptanalyse. Le célèbre ouvrage [2] dépeint d'excellente façon les aléas de la cryptanalyse de cette époque, et les balbutiements de l'informatique qui y sont associés.

Méthodes modernes de cryptographie

Quelle que soit cependant la complexité de ce type de cryptage, ses utilisateurs rencontrent toujours deux difficultés importantes:

1. la clef permettant de déchiffrer un cryptogramme doit être gardée secrète et transmise par un canal sûr, car son interception ruinerait toute la confidentialité du message;
2. il est impossible de savoir si l'expéditeur d'un message est bien celui que l'on croit. Un intrus ayant intercepté la clef peut très facilement fabriquer de faux messages.

Les méthodes que nous avons citées jusqu'ici souffrent de ces problèmes. On les appelle des systèmes cryptographiques à *clef privée*, à cause de la première propriété ci-dessus. De tels systèmes, par exemple celui de Jules César, peuvent être schématisés par le dessin ci-dessous[4]. La même clef sert à tous les utilisateurs du système pour chiffrer et déchiffrer les cryptogrammes.

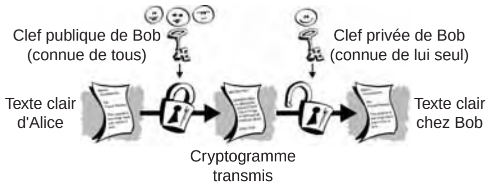


Peut-on éliminer ces défauts majeurs? La réponse est: oui. On a découvert dans les années 1970 des systèmes cryptographiques à *clef publique*, qui ne nécessitent aucune transmission secrète de clef.

Systèmes cryptographiques à clef publique

L'idée a été découverte en 1976 par Whitfield Diffie et Martin Hellman. Chaque utilisateur possède deux clefs, l'une qu'il garde secrète, la clef privée, et l'autre qu'il publie, par exemple sur l'internet.

Supposons qu'Alice veuille envoyer un message à Bob. Elle code son message avec la clef publique de Bob, qu'elle peut obtenir sans difficulté. Elle envoie le cryptogramme à Bob, qui le déchiffre à l'aide de sa clef privée. Autrement dit, tout le monde peut chiffrer un message destiné à Bob, mais il est le seul à pouvoir le déchiffrer.



Une relation mathématique complexe entre ses clefs publique et privée permet à Bob de retrouver le texte clair du message. Pour déchiffrer un cryptogramme avec une clef différente de celle avec laquelle il a été chiffré, il doit exister une relation entre les deux clefs. Cette relation doit être en outre d'un caractère particulier: personne ne doit être capable de retrouver la clef privée d'un individu à partir de sa clef publique.

Le problème peut sembler a priori impossible à résoudre. C'est là que les mathématiques offrent de précieux outils, appelés *fonctions à sens unique*. Ce sont des opérations qu'il est relativement aisé de faire dans un sens, mais extrêmement difficile de faire dans l'autre sens, pour retrouver la situation initiale. On peut comparer la situation à un noeud, qui est facile à serrer, mais demande beaucoup plus d'effort à dénouer.

Le système RSA, du nom de ses inventeurs Ronald Rivest, Adi Shamir et Leonard Adleman, a été découvert en 1978. Il propose comme fonction à sens unique la multiplication de deux grands nombres premiers, par exemple longs de plus de 100 chiffres. Une telle multiplication est aisée à effectuer à l'aide d'un ordinateur. En revanche, si l'on ne connaît que le produit des deux nombres, qui est long de 200 chiffres, il est impossible de retrouver ses facteurs (les deux nombres initiaux) en un temps raisonnable, quelle que soit la puissance de l'ordinateur utilisé. Un tel travail demanderait plusieurs siècles! C'est justement le casse-tête auquel est confronté l'éventuel intercepteur du message d'Alice.

Cette méthode se base sur un théorème de Pierre de Fermat (1601–1665), légèrement

[4] Les trois schémas suivants sont adaptés de [3].

modifié par le célèbre mathématicien bâlois Leonhard Euler (1707–1783). Le résultat est le suivant. Soient p et q deux nombres premiers et a un nombre entier[5]. Alors le nombre $a^{(p-1)(q-1)} - 1$ est un multiple de $p \cdot q$. Ainsi par exemple, si $p = 3$, $q = 5$ et $a = 14$, on a

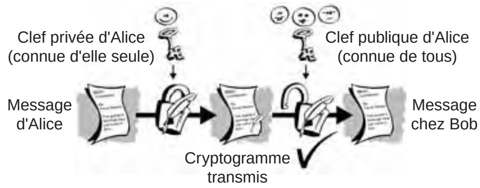
$a^{(p-1)(q-1)} - 1 = 14^8 - 1 = 1\,475\,789\,056 - 1 = 1\,475\,789\,055$,

et ce nombre est un multiple de 15, car $98\,385\,937 \cdot 15 = 1\,475\,789\,055$.

Les systèmes à clefs publiques permettent aussi de résoudre le problème de l'authenticité d'un message. On utilise pour cela le concept de *signature électronique*. Alice veut maintenant envoyer un message (chiffré ou non) de telle façon que Bob soit sûr de son authenticité et de sa provenance.

Elle chiffre le message avec sa clef privée. De ce fait elle le signe, étant la seule à pouvoir le faire. Elle envoie le message à Bob, qui le déchiffre avec la clef publique d'Alice. Si le texte obtenu est cohérent, Bob a la certitude de l'authenticité et de la provenance du message. Dans ce cas, seule Alice peut signer (c'est-à-dire chiffrer) le message, mais tout le monde est capable de le déchiffrer.

Elle crée une signature électronique de son message en le cryptant à l'aide de sa clef privée – elle est la seule à pouvoir le faire. Elle envoie le message et la signature électronique à Bob. Celui-ci «décode» la signature électronique avec la clef publique d'Alice. S'il retrouve le même texte que le message, il a la certitude que le message est authentique.



Ainsi le chiffrement et l'authentification ont lieu sans échanger de clef secrète. Chaque partenaire n'utilise que des clefs publiques et sa propre clef privée. Comme il est quasiment impossible, grâce aux fonctions à sens unique, de découvrir la clef privée d'une personne, le système est fiable.

Références

[1] Helen Fouché Gaines. *Cryptanalysis, A Study of Ciphers and their Solution.* Dover Publications, Inc., New York, new, unabridged and corrected edition, 1956. ISBN 0-486-20097-3.

[2] David Kahn. *La Guerre des Codes Secrets.* InterEditions, Paris, 1980. Traduit, adapté et mis à jour par Pierre Baud et Joseph Jedrusek. ISBN 2-729-60114-1.

[3] Network Associates, Inc. *Introduction à la Cryptographie.* 1999. Fichier PDF, ftp://ftp.pgpi.org/pub/pgp/6.5/docs/french/IntroToCrypto.pdf. Visité le 25 août 2001.

[4] Simon Singh. *Histoire des codes secrets. De l'Égypte des Pharaons à l'ordinateur quantique.* Jean-Claude Lattès, Paris, 1999. Traduit par Catherine Coqueret. ISBN 2-7096-2048-0.

Nicolas Martignoni est né en 1964. Il est marié et père de deux enfants de 5 et 3 ans. Il vit à Fribourg, où il a fait des études de mathématiques. Il a obtenu son Diplôme de Mathématiques en 1992 et son Diplôme de Maître de Gymnase en 1994.

Il enseigne les applications des mathématiques et la physique au Collège Sainte-Croix, à Fribourg. Il s'engage au sein de la Commission Romande de Mathématique depuis 1999, où il participe à la rédaction de plusieurs ouvrages, dont «Formulaire et Tables», paru en automne 2000.

[5] Il faut en outre que les nombres a et $p \cdot q$ soient premiers entre eux, c'est-à-dire que leur PGDC doit être égal à 1.

Urs Kirchgraber

Ideen? Ideen!

Anhand von einfachen Beispielen zeigt der Autor den Stoff, aus dem die Träume der Mathematikerinnen und Mathematiker sind: eine gute neue Frage stellen, einen ganz und gar unvermuteten Zusammenhang entdecken, eine weitreichende Idee generieren und ein offenes Problem lösen.

Au moyen d'exemples simples, l'auteur nous entraîne dans les rêves des mathématiciens: poser La Question, découvrir Le Rapport, lancer L'Idée, résoudre enfin Le Problème insoluble.

1

Ist Mathematik das Fach der Formeln und Rechnungen?
Auch.
Vor allem aber ist es das Fach der Ideen.
Einfälle, Fantasie in der Mathematik?

Nehmen wir die Zahlen des Zählens: 1, 2, 3, ... bis 100. Man soll sie zusammenzählen. Eins plus zwei ist drei, plus 3 ist 6, plus 4 ist 10, plus 5 ist 15, plus 6 ist 21 – uch, ist das mühsam! Gut, gibt es Taschenrechner. Den richtigen Befehl aktivieren und schon wird das Resultat angezeigt: 5050. Und der Rechner summiert auch gern – sagen wir – die Zahlen von 1 bis 272362.

Hinter diesem Knopfdruck steckt nicht nur Computerpower, sondern auch ein Stück Mathematik. Mit dem Zehner-Stellen-System wird ein sehr effektives Symbolsystem zur Bezeichnung von Zahlen benützt. Überdies wird ein Additionsverfahren verwendet, das so einfach ist, dass es von einer Maschine durchgeführt werden kann.

Ich möchte zeigen, wie die Aufgabe dank einer Idee viel effektiver gelöst werden kann. Schauen wir uns die Summe, um die es geht, noch einmal an[1]

$$1+2+3+4+...+96+97+98+99+100.$$

Die folgende einfache Bemerkung eröffnet gewisse Möglichkeiten: Wir müssen die Zahlen *nicht unbedingt* in der «natürlichen» Reihenfolge zusammenzählen. Wenn wir mögen, können wir zum Beispiel zuerst alle ungeraden Zahlen addieren, also

$$1+3+5+7+...+95+97+99,$$

dann zählen wir alle geraden Zahlen

$$2+4+6+...+96+98+100,$$

zusammen und zum Schluss müssten wir noch beide Resultate addieren. Wo ist der Gewinn, werden Sie vielleicht fragen. Ja, das ist nicht so klar. Die interessante Frage ist: Können wir vielleicht eine Reihenfolge für die Zahlen von 1 bis 100 finden, die besonders *günstig* ist, um ihre Summe zu bestimmen?

Ob Sie Lust haben, selber ein wenig mit Papier und Bleistift zu probieren? Wir kommen weiter unten auf die Frage zurück.

2

Betrachten wir vorerst ein anderes Beispiel. Dreiecke! An einem Dreieck gibt es viele Grössen, für die man sich interessieren kann. Die grundlegendsten sind die Längen der drei Seiten a, b, c und die Werte der drei Winkel α, β und γ siehe Abbildung 1.

Grosso modo kann man sagen, dass 3 dieser 6 Stücke das Dreieck festlegen. Betrachten wir den folgenden Fall: Denken wir uns die Längen von zwei Seiten und die Grösse des «eingeschlossenen» Winkels vorgegeben. Also zum Beispiel a, b, und γ.

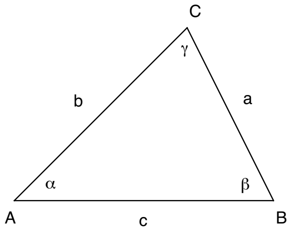


Abbildung 1: Ein Dreieck

Es ist nicht schwer, das Dreieck aus diesen Stücken zu *konstruieren*. Man beginnt, indem man irgendeine Strecke der Länge a zeichnet, siehe Abbildung 2; dann wird mit Hilfe des Transporteurs der Winkel γ abgetragen; schliesslich wird auf dem gezeichne-

[1] Aus Bequemlichkeit haben wir nicht alle Zahlen aufgeschrieben und stattdessen die fehlenden durch Punkte angedeutet.

ten zweiten Schenkel die Strecke b abgetragen. Nun lassen sich die übrigen Stücke an dem konstruierten Dreieck durch Messung jedenfalls näherungsweise bestimmen, insbesondere die Länge der noch unbekannten dritten Seite c sowie die beiden anderen Winkel des Dreiecks.

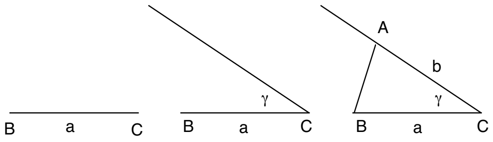


Abbildung 2: Konstruktion eines Dreiecks

Die Kalamitäten beginnen, wenn man die Aufgabe nicht zeichnerisch, sondern rechnerisch lösen will. Angenommen a ist 2.5 cm, b ist 4.0 cm und der Winkel γ hat 42 Grad. Welchen Wert hat c?

Wenn man alle Facetten dieser Aufgabe in Betracht zieht, muss man einräumen, dass ihre Lösung eigentlich gar nicht so einfach ist. Fassen wir der Einfachheit halber daher einen *berühmten Spezialfall* ins Auge. Es sei γ = 90 Grad, d.h. der Winkel zwischen den beiden Schenkeln CA und CB ist ein rechter, das Dreieck sei also rechtwinklig, siehe Abbildung 3.

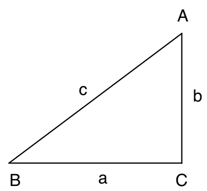


Abbildung 3: Rechtwinkliges Dreieck, rechter Winkel bei Punkt C

In diesem Fall gilt

(1) $c^2 = a^2 + b^2$

Das ist der sogenannte Satz von Pythagoras[2]. Ist etwa a = 2.0, b = 4.8, so folgt

$$c^2 = 2.0^2 + 4.8^2 = 4.0 + 23.04$$
$$= 27.04 = (5.2)^2.$$

Das heisst, die dritte Seite in diesem Dreieck hat die Länge c = 5.2.

Nur: Wieso besteht die Beziehung (1) zwischen den Längen der drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks? Wie findet man sie? Kann man sie «sehen»?

Die Formel (1) hat, wie Sie sich vielleicht erinnern, eine *geometrische Interpretation*. Ein Quadrat der Seitenlänge a hat den Flächeninhalt a^2. Errichtet man über den Seiten des rechtwinkligen Dreiecks Quadrate, siehe Abbildung 4, so sagt Formel (1) daher aus, dass die Fläche des Hypotenusenquadrats gerade so gross ist wie die Flächen der Kathetenquadrate zusammen. «Sieht» man das?

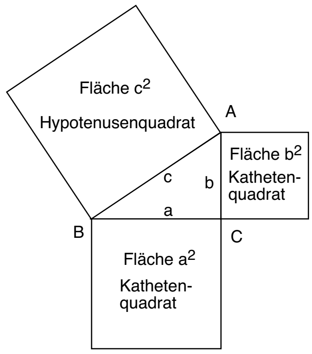


Abbildung 4: Geometrische Interpretation des Satzes von Pythagoras

3

Kehren wir für einen Augenblick zum ersten Problem zurück. Hängig ist die Frage, ob man für die Zahlen von 1 bis 100

1,2,3,4,5,...,49,50,51,52,...,96,97,98,99,100

eine Reihenfolge finden kann, die besonders geeignet ist, um die Zahlen zu addieren.

Hier ist ein Vorschlag. Paaren Sie die erste mit der letzten Zahl, also 1 und 100, sodann die zweite mit der zweitletzten, also 2 mit 99, dann die dritte mit der drittletzten, also 3 mit 98, usw. Mit anderen Worten, wir schreiben die Summe der Zahlen von 1 bis 100 wie folgt auf

1+100+2+99+3+98+4+97+5+96+…
+48+53+49+52+50+51.

Insgesamt haben wir nun 50 Paare und die Pointe ist, dass die beiden Zahlen eines Paares jeweils *die gleiche Summe* haben, nämlich 101:

(1+100)+(2+99)+(3+98)+(4+97)+…
+(49+52)+(50+51)=101+101+101+…+101
=50·101=5050.

Die Summe aller (natürlicher) Zahlen von 1 bis 100 ist demnach 50 · 101 = 5050. Genau gleich findet man die Summe der Zahlen von 1 bis 272362. Sie ist 136181 · 272363 = 37090665703.[3]

Der springende Punkt an unserem Beispiel ist, dass es gelungen ist, die Berechnung der Summe durch eine Multiplikation zu bewerkstelligen. Multiplizieren heisst, die

[2] Pythagoras von Samos (580?–501? v.Chr).
[3] Wenn man die gesuchte Summe konventionell aufaddiert, dauert das selbst auf einem nicht so langsamen Rechner 2–3 Sekunden.

immer gleiche Zahl eine ganz bestimmte Anzahl Mal addieren. Dafür hat man aber effiziente Verfahren. Es sei zum Beispiel an das «schriftliche Multiplizieren» erinnert:

136181 · 272363
272362
953267
272362
408543
817086
408543
37090665703

Beachten Sie: Prima vista ging es bei unserem Beispiel keineswegs um die Addition von gleichen Zahlen. Dass es dann letztlich doch darauf hinaus lief, ist eine kleine Überraschung und erfordert eine geistige Leistung: Zu erkennen, dass man die Addition «reorganisieren» kann, und zu entdecken, dass es eine Variante gibt, die die Aufgabe auf eine einzige Multiplikation reduziert.

Sind schnellere Rechenverfahren im Zeitalter schneller werdender Computer überhaupt noch von Bedeutung? Es stimmt schon: Viele Aufgaben, die noch vor gar nicht so langer Zeit nur mit viel Geschicklichkeit gelöst werden konnten, sind Dank Computerpower trivialisiert worden – man kann sie jetzt einfach mit «brute force» lösen.

Andererseits werden immer schwierigere Probleme angepackt, und da kommen selbst Hochleistungsrechner überraschend schnell an ihre Grenzen. Und deshalb ist es schon berechtigt, wenn G. Strang vom MIT in Boston sagt[4]: *Where computers race for faster calculations, mathematics races for quicker algorithms. An idea that cuts in half the number of steps is as good as a chip that doubles the speed.*

4

Zurück zum Satz von Pythagoras. Wieso hat bei einem rechtwinkligen Dreieck das Hypotenusenquadrat die gleiche Fläche wie die beiden Kathetenquadrate zusammen?

Geometrisch heisst das: Wir sollten die Kathetenquadrate auf das Hypotenusenquadrat legen können, so dass dieses gerade zugedeckt wird. Direkt geht das offenbar nicht. Wir müssen sie zerschneiden. Aber nicht wirklich und mit einer Schere! Sondern im Geiste, und so, dass es für jedes beliebige rechtwinklige Dreieck funktioniert. Mit anderen Worten, wir brauchen ein Verfahren mit dem wir (im Prinzip) die Kathetenquadrate so in Teile zerlegen können, dass sie sich danach zum Hypotenusenquadrat zusammensetzen lassen.

Man kennt verschiedene solche Zerlegungen[5]. Bemerkenswert ist, dass keine einzige dieser Zerlegungen offensichtlich ist. H. Winter schreibt[6]: *Dieser Satz, also der Satz von Pythagoras, motiviert sich nicht ohne weiteres durch das Anblicken rechtwinkliger Dreiecke, und seine Richtigkeit erschliesst sich nicht dem blanken Augenschein. Es bedarf umstrukturierender Denkschritte (des Sehens mit dem Auge des Geistes, wie Platon sagt).*

Eine der Möglichkeiten deutet die in Abbildung 5 gezeigte Figurenfolge an. Es ist ein Beweis ohne Worte, aber bestehend aus vier Bildern, die man nacheinander anschauen, bedenken, und – warum eigentlich nicht? – geniessen kann.

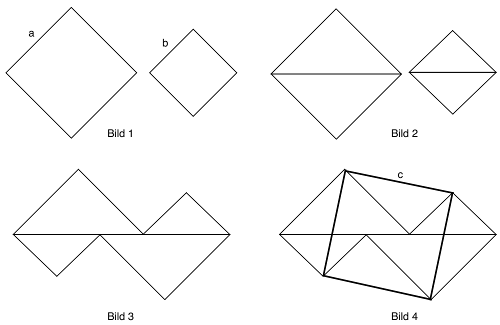


Abbildung 5: Beweis des Satzes von Pythagoras nach H. Winter

Der Satz des Pythagoras ist ein Beispiel für das, was man in der Mathematik tiefliegend nennt, weil die Beziehung zwischen den drei Quadraten nicht auf der Hand liegt, sondern so verborgen ist.

5

Verstehen, dass die Figurenfolge aus Abbildung 5 den Satz des Pythagoras beweist, ist eine Sache. Sie zu entdecken eine ganz andere.

Wie mathematische Ideen entstehen ist immer noch ein Rätsel. Dass eine intensive Beschäftigung mit dem betreffenden Inhalt

4 G. Strang: «Wavelets», American Scientist, 82 (1994) p. 250–255.
5 Es soll inzwischen mehrere hundert verschiedene Beweise für den Satz von Pythagoras geben! Man könnte deshalb auf die Idee kommen zu sagen, dieser Satz sei einer «der am besten bewiesenen Sätze der Mathematik». Gleichwohl, ein einziger Beweis genügt, und die Richtigkeit der Formel (1) ist für alle Zeiten gesichert.
6 Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 61 (1995) p. 41.

Voraussetzung ist, lehrt die Erfahrung. Die Geburt einer Idee ist allerdings meist ein blitzartiger und unerwarteter Vorgang.

Andrew Wiles hat unlängst eines der berühmtesten Probleme der Mathematik gelöst. Er bewies die sogenannte Fermatsche Vermutung. Nach Jahren einsamer Arbeit hielt er eine Vortragsreihe, in der er seine Erkenntnisse skizzierte. Später zeigte sich jedoch, dass der Beweis eine Lücke enthielt, die alles in Frage stellte. Ein ganzes Jahr lang versuchte er, die Schwierigkeit zu überwinden. In einem Film der britischen BBC[7] beschreibt er in anrührender Weise den erlösenden Augenblick: *I was sitting at this desk. I was trying to convince myself that … when suddenly and totally unexpectedly I had this incredible revelation. I was realizing what was holding me up …*

Eine gute neue Frage stellen, einen ganz und gar unvermuteten Zusammenhang entdecken, eine weitreichende Idee generieren und ein offenes Problem lösen – das ist der Stoff aus dem die Träume von uns Mathematikerinnen und Mathematikern sind. Viel wichtiger als die Tatsache, dass die Fermatsche Vermutung nun bewiesen ist, sagen die Experten, sei die Fülle von neuen, tiefen und schönen mathematischen Ideen, die in Wiles' Beweis stecken, weil sie ungeahnte Möglichkeiten für zukünftige Entwicklungen eröffneten.

6

Übrigens – so «betagt» der Satz des Pythagoras ist – verstaubt ist er deswegen noch lange nicht. In der Mathematik ist er täglich in Gebrauch.

Kennen Sie GPS[8] – jenes System, mit dessen Hilfe Sie zu jeder Zeit Ihre Position, wo immer Sie sich befinden, bestimmen können? Im Herzen dieses Systems steckt der Satz von Pythagoras. Das GPS-Gerät ermittelt Ihren Abstand zu drei Satelliten. Um daraus Ihre Position bestimmen zu können, müssen drei Kugeln miteinander geschnitten werden. Dazu wird der Satz von Pythagoras 6 Mal angewendet.

Abbildung 6: Das Pythagoras-Denkmal auf der Insel Samos

Urs Kirchgraber lehrt an der ETH Zürich. Seine Arbeitsgebiete sind Nichtlineare Analysis und Didaktik der Mathematik. Abbildung 6 zeigt ihn 1996 am Pythagoras-Denkmal an der Mole von Pythagorion auf der griechischen Insel Samos.

7 BBC-WGBH-Boston: «Fermat's Last Theorem», 1996.
8 GPS ist die Abkürzung für «Global Positioning System».

Armin P. Barth

«Beweisen, Kurtchen, beweisen!»[1]

Was tut ein Mathematiker, wenn er beweist? Wie sicher ist eine bewiesene Aussage, etwa im Vergleich zu einem Beweis in den Naturwissenschaften oder in der Justiz?

Que fait un mathématicien en établissant une preuve? Cette dernière est-elle certaine? Est-elle comparable à une preuve scientifique ou judiciaire?

Man hört immer wieder, dass mathematische Aussagen gegenüber Aussagen anderer Disziplinen den Vorzug geniessen, beweisbar zu sein, dass es kein Wenn und Aber und Vielleicht gibt und dass man, ist eine Aussage einmal bewiesen, nicht mehr anderer Meinung sein kann, ausser man riskiert bewusst, sich dem Vorwurf der Sturheit und Ignoranz auszusetzen. Was ist es aber, was einen Text zu einem Beweis macht? Was tut ein Mathematiker, wenn er beweist? Und wie sicher ist eine bewiesene Aussage wirklich? Dieser Text versucht, diese Fragen mit verschiedenen Beispielen anzugehen, sie auszuloten und ihnen, wenn möglich, Antworten zu geben.

1 Wer hat nicht schon von der *Neunerprobe* gehört oder sie gar angewendet: Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist. Einige Beispiele, in denen Q immer die Quersumme bezeichne, mögen dies belegen:

- Die Zahl 72 (=8*9) hat Q=9; beide Zahlen sind durch 9 teilbar!
- Die Zahl 198 (=22*9) hat Q=18; beide Zahlen sind durch 9 teilbar!
- Die Zahl 1017 (=113*9) hat Q=9; beide Zahlen sind durch 9 teilbar!

Und auch wenn wir hundert Beispiele rechnen, stets wird sich dieses Besondere ereignen, und einmal werden wir ermüden und denken: Na prima, mit der Neunerprobe hat es wohl seine Richtigkeit. Nun könnte sich aber, wenn wir die Neunerprobe auf diese Weise akzeptieren, ein Gefühl der Unzufriedenheit in uns breit machen: Vielleicht täuschen wir uns doch und hatten mit den bisherigen Beispielen einfach nur Glück. Könnte es nicht sein, dass wir, wenn wir Zahlen ganz anderer Grössenordnung untersuchen, ein Gegenbeispiel finden, eine Zahl, die *nicht* durch 9 teilbar ist, obwohl ihre Quersumme durch 9 teilbar ist? Welchen Wetteinsatz wären wir für die allgemeine Gültigkeit der Neunerprobe bereit zu riskieren? Zudem ist es unbefriedigend, eine Regel allein deswegen zu akzeptieren, weil eine erdrückende Menge von Beispielen sie uns einreden will. Wir müssen zugeben: Wir *verstehen* die Neunerprobe noch nicht!

Im Gegensatz zur Mathematik ist in den Naturwissenschaften eine erdrückende Menge von Beispielen häufig Anlass zur Postulierung eines (Natur-) Gesetzes. Doch während es dort darum geht zu erkennen, das sich etwas *so und so verhält*, und ein naturwissenschaftliches Gesetz Bestand hat bis zum ersten Auftauchen eines Gegenbeispieles, geht es in der Mathematik darum zu verstehen, dass sich etwas so und so verhalten *muss*. Wenn wir *diese* Art von Verständnis anstreben, werden wir durch das Anhäufen von immer weiteren Beispielen die absolute Sicherheit, die letzte Gewissheit nicht erlangen können. Es drängt uns, hinter die Kulissen zu schauen, den tieferen Grund zu erfahren, eine noch verborgene Eigenschaft zu entdecken, die das Auflisten weiterer Beispiele überflüssig und lächerlich macht, es drängt uns, die Situation ganz und gar zu *verstehen*.

Dabei kann uns ein Beweis helfen. Den unwiderlegbaren Belegen ähnlich, die dem Detektiv den Tathergang aufdecken, versetzt uns ein Beweis in die Lage, bezüglich der Neunerprobe absolut sicher zu sein und, mehr noch, zu verstehen, weshalb es sich so, wie in der Neunerprobe behauptet, verhalten *muss*. Und wenn der Beweis vollbracht sein wird, werden wir in uns ein Wohlgefühl wie nach einem gelösten Fall empfinden.

[1] aus F. Dürrenmatt, Die Panne, Werkausgabe in dreissig Bänden, Diogenes, Zürich, 1980

2 Stellen wir uns vor, jemand tritt an uns heran mit der Behauptung *«Alle Zahlen der Form $2^\wedge 2^{n}+1$ für n=1,2,3,... sind prim*[2]*.»* Wie werden wir reagieren? Nun, es kann sich schon lohnen, einige Beispiele zu untersuchen, denn immerhin könnte es sein, dass die Aussage falsch ist und dass wir die Falschheit sofort entdecken:

$2^\wedge 2^{1}+1 = 2^{2}+1 = 5$

$2^\wedge 2^{2}+1 = 2^{4}+1 = 17$

$2^\wedge 2^{3}+1 = 2^{8}+1 = 257$

$2^\wedge 2^{4}+1 = 2^{16}+1 = 65537$

Die Behauptung scheint aber stichhaltig zu sein: 5, 17 und 257 sind sicherlich prim, für 65537 ist ein etwas grösserer Aufwand nötig, doch wenn wir ihn nicht scheuen, zeigt es sich, dass auch diese Zahl prim ist. Wie *sicher* sind wir bezüglich der Behauptung? *Primzahlen* sind widerspenstige Objekte, und es scheint angebracht, vorsichtig zu sein. Betrachten wir noch das nächste Beispiel:

$2^\wedge 2^{5}+1 = 2^{32}+1 = 4'294'967'297$

Ist das prim? Nun sind wir in einer zwiespältigen Situation: Die Zahlen werden so riesig, dass es sich empfiehlt, genau darüber nachzudenken, ob sich der Aufwand lohnt! Sollen wir diese Zahl auf Primheit testen, oder wollen wir von der Richtigkeit der Behauptung schon überzeugt sein und nach einem Beweis dafür suchen?

3 Die Mathematiker haben das Beweisen nicht für sich allein gepachtet. Wenn ein Ankläger erklärt, man habe einen *Indizienbeweis* für die Urheberschaft einer Tat, so meint er damit, dass *starke Gründe* für diese Urheberschaft sprechen, dass freilich die letzten Zweifel noch nicht ausgeräumt sind. Wenn Walter in «Der zerbrochene Krug»[3] ruft:

> *«Zur Sache hier. Vom Krug ist hier die Rede. – Beweis, Beweis, dass Ruprecht ihn zerbrach!»,*

so verlangt er nach juristischen Belegen für die Schuld Ruprechts, die so schlüssig und überzeugend sind, dass eine andere Täterschaft unmöglich ist. Dass juristische Beweise aber heikel sein können, zeigt etwa das Beispiel des Alfredo Traps aus Dürrenmatts «Die Panne», der den ihm vom Gericht der Pensionierten zur Last gelegten Mord erst zurückweist («Beweisen, Kurtchen, beweisen!»), dann aber, während des gewaltigen Besäufnisses, in einer Anwandlung von Stolz und dem Wahn eigener Bedeutsamkeit, das Verbrechen für sich reklamiert und sich erhängt, obwohl die Beweise ihn nicht eines Verbrechens überführen, das juristisch verfolgt werden könnte. Gleichwohl scheint ein mathematischer Beweis doch einen *höheren Grad an Sicherheit* zu erzeugen. Während durch juristische Beweise schon oft Unschuldige verurteilt wurden, ist kein einziger einmal anerkannter und überprüfter mathematischer Beweis jemals nachträglich verworfen worden. Wir werden uns fragen müssen, woran das genau liegt.

Zuerst geben wir aber Auflösungen zu den oben besprochenen Problemen an: Um zu beweisen, dass die Behauptung aus **2** falsch ist, muss lediglich ein *Gegenbeispiel* angeführt werden: In der Tat ist die letzte von uns notierte Zahl nicht prim. Euler fand nämlich die Zerlegung

$4'294'967'297 = 641*6'700'417.$

Die in **1** formulierte Neunerprobe ist korrekt, wie ein Beweis zeigt: Wir führen ihn für vierstellige Zahlen; bitte überzeugen Sie sich davon, dass er analog für jede andere Stellenzahl geführt werden kann. Sei also n eine beliebige vierstellige Zahl. Wir notieren sie in der Form

n = | a | b | c | d |

wobei die Ziffern a, b, c, d der Menge {0,1,2,...,9} entstammen. Da wir im Zehnersystem rechnen, kann n auch so notiert werden:

$n = 1000*a + 100*b + 10*c + d.$

Drei einfache Umformungen führen zu:

$n = (999+1)*a + (99+1)*b + (9+1)*c + d$

$\Rightarrow n = (999*a + 99*b + 9*c) + (a+b+c+d)$

$\Rightarrow n = (999*a + 99*b + 9*c) + Q.$

Nun sehen wir, dass jede beliebige Zahl n stets so in zwei Summanden zerlegt werden kann, dass der eine Summand gleich der Quersumme und der andere Summand jedenfalls durch 9 teilbar ist. Somit entscheidet allein die Quersumme darüber, ob die Zahl durch 9 teilbar ist oder nicht, d. h. n ist genau dann durch 9 teilbar, wenn Q durch 9 teilbar ist. Damit ist ein Verständnis dafür erwachsen, dass es *logisch unmöglich* ist, dass die Neunerprobe versagt.

---

2 Eine natürliche Zahl >1 heisst *prim*, genau dann wenn sie nur durch 1 und durch sich selber ohne Rest teilbar ist.

3 aus H. von Kleist, Der zerbrochene Krug, Reclam, Stuttgart, 1993

Armin P. Barth, geboren 1962, unterrichtet seit 6 Jahren als Hauptlehrer im Vollamt an der KS Baden und verbrachte das Wintersemester 2001/2002 an der ETH Zürich im Rahmen des Projektes «ETH für die Schule».

4 Was ist ein mathematischer Beweis? Fermat schrieb, das Wesen eines Beweises sei, *«Glauben zu erzwingen»*[4]. Erzwungen kann der Glaube an die Aussage aber nur werden, wenn es *logisch unmöglich* ist, dass die Aussage verletzt werden kann. Wie genau schafft es die Mathematik, diese logische Unmöglichkeit herbeizuführen? Betrachten wir dazu einen weiteren Beweis: Auf die Pythagoreer[5] geht die Entdeckung der *irrationalen Zahlen* zurück. Dass irrationale Zahlen (wie etwa $\sqrt{2}$) existieren, passte so wenig in die Lehre des Pythagoras, wonach alle Vorgänge der Welt sich durch Verhältnisse natürlicher Zahlen (also durch rationale Zahlen) ausdrücken lassen, dass der den Lehren des Meisters sehr streng verpflichtete Teil der Pythagoreer (die *Akusmatiker*[6]) den Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ unter allen Umständen zu verheimlichen suchte. Wir wagen es dennoch, den Beweis hier anzugeben.

Angenommen, $\sqrt{2}$ wäre nicht irrational, also rational, so wäre eine Darstellung

$$\sqrt{2} = a/b$$

mit natürlichen Zahlen a und b ($b \neq 0$) möglich. Quadrieren wir diese Gleichung, so erhalten wir

$$2 = a^2/b^2,$$

wobei wir die Definition von «Wurzel» (dass nämlich $(\sqrt{2})^2 = 2$ ist) sowie ein Potenzgesetz (dass nämlich $(a/b)^2 = a^2/b^2$ ist) benutzen. Durch Multiplikation mit b^2 erhalten wir

$$2b^2 = a^2$$

Denken wir uns nun die beiden Zahlen a und b in Primfaktoren zerlegt. Nach einem bewiesenen Satz ist diese Primfaktorzerlegung eindeutig, und es gilt zudem, dass das Quadrat einer Zahl jeden Primfaktor entweder gar nicht oder aber in gerader Anzahl enthält. (Warum?) Daher enthält a^2 den Primfaktor 2 entweder gar nicht oder in gerader Anzahl, und dasselbe lässt sich über b^2 sagen. Der Term $2b^2$ enthält demnach den Faktor 2 sicher in ungerader Anzahl! Daraus folgt nun, dass, *wenn* $\sqrt{2}$ rational *wäre*, eine Gleichung entstünde, deren rechte Seite den Primfaktor 2 entweder gar nicht oder in gerader Anzahl, und deren linke Seite ihn in ungerader Anzahl enthielte. Das ist wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung logisch unmöglich!

Was macht diesen Beweis nun so robust, so unanfechtbar und immun gegen jede Art von Zweifel? Beachten Sie, welcher Art unsere Begründungen waren: Wir haben die Definition von «Wurzel», ein Potenzgesetz und einen Satz über Primfaktorzerlegung benutzt: Eine Definition und schon bewiesene Sätze, nichts anderes. Wer wollte Zweifel an einer Definition anmelden? Es handelt sich ja um eine Konvention, eine Bezeichnung oder Sprechweise für einen bestimmten unzweideutig vorgegebenen mathematischen Sachverhalt. Und wer wollte einen schon bewiesenen Satz in Zweifel ziehen? Freilich wird nun klar, dass der von uns bewiesene Satz *gleich sicher* ist wie die in seinem Beweis benutzten früher bewiesenen Sätze. Wie sicher sind aber diese Sätze? Nun, natürlich gleich sicher wie die in ihren Beweisen benutzten noch früher bewiesenen Sätze. Und wie sicher sind diese Sätze? – Das erinnert an das endlose Fragen eines wissbegierigen Kindes, und genau so, wie man dabei das Gefühl hat, dass die Fragen ein Ende finden müssen, verspüren wir bei den mathematischen Sätzen den Drang, das Absteigen zu immer früheren Sätzen zu stoppen. Wie kann das Ende dieses Abstiegs bzw. der Anfang aller Sätze aussehen? Nun, wir müssen einmal zu den «ersten» Sätzen vordringen, die sich nicht aus noch früher bewiesenen Sätzen beweisen lassen. Mathematiker nennen diese Sätze *Axiome*[7]. Es handelt sich dabei einerseits um Aussagen grösstmöglicher Plausibilität oder einfach nur um von (fast) allen akzeptierte Sätze, die die Mathematik wie eine Art Spiel in Gang setzen. Die Axiome selbst sind nicht beweisbar, doch wenn wir sie zum Beweis von Sätzen heranziehen, so sind diese Sätze dann *sicher relativ zu den Axiomen*. Wenn wir von der Korrektheit der mathematischen Axiome überzeugt sind, können wir an den aus ihnen erzeugten Sätzen nicht zweifeln.

Zudem wird in der Mathematik festgelegt, welche *Schlussweisen* erlaubt sind, d. h. wie genau man von einer schon begründeten Aussage zu einer nächsten voranschreiten kann, und dieses streng reglementierte Schlussfolgern ermöglicht dann den Aufbau von aus den Axiomen bewiesenen Sätzen und einen nach oben offenen Überbau von immer neuen bewiesenen Sätzen. Und das macht die mathematischen Beweise so sicher: Es wer-

4 aus einem Brief Fermats an Clerselier: «La qualité essentielle d'une démonstration est de forcer à croire.»
5 von Pythagoras (etwa 580-500 v. Chr.) gegründete Schule, die über seinen Tod hinaus Bestand hatte.
6 die «Hörer».
7 von griech. *axioun*: für recht halten

den zur Begründung der einzelnen Schritte ausschliesslich Definitionen, Axiome und schon bewiesene Sätze herangezogen, und es gibt davon nur endlich viele; zudem sind die Schlussweisen vorgeschrieben, und alles ist in einer Kunstsprache abgefasst, die keinen Raum lässt für Zweideutigkeiten und Missverständnisse.

5 Wenn Descartes alles Bezweifelbare niederreisst und nach einem sicheren Grund für seine Philosophie sucht[8], so sucht er gewissermassen die Axiome seiner Philosophie, einen festen Stand, von dem aus sich Aussagen ableiten lassen, die sicher relativ zu den Axiomen sind. Wenn Luther fordert[9], «der Legat oder selbst der Papst sollen nicht nur sagen, du irrst, du hast falsch gelehrt, sondern den Irrtum in der Bibel nachweisen und Begründungen anführen», so sind die Aussagen der Bibel für ihn die Axiome, und er fordert, dass jede theologische Sentenz daraus zu «beweisen» ist. Übrigens hat sich die Theologie verschiedentlich der in **4** besprochenen mathematischen Beweismethode bedient. In der Absicht, die Existenz Gottes zu beweisen, hat etwa Anselm[10] definiert:

Gott = Dasjenige, wozu nichts grösseres gedacht werden kann[11].

Dann «bewies» er, dass Gott *in Wirklichkeit* existieren muss, da aus der Annahme, Gott würde *nur im Geist* existieren, geschlossen werden könnte, dass etwas grösseres gedacht werden kann, nämlich der in der Wirklichkeit existierende Gott; dann aber wäre Gott nicht mehr dasjenige, wozu nichts grösseres gedacht werden kann. Widerspruch! Anselms «Beweis» stützt sich also auf eine Definition und mindestens auf das Axiom, dass ein in Wirklichkeit existierendes Ding grösser ist als das entsprechende nur im Geist vorhandene Ding. Damit versucht Anselm, seine Schlussfolgerung unempfindlich gegen Kritik zu machen, und in der Tat ist die Schlussfolgerung korrekt; die Definition und das Axiom sind aber, genau so wie in der Mathematik, keineswegs geschützt gegen Kritik!

Es darf nicht verschwiegen werden, dass bei der alltäglichen Arbeit des Mathematikers und der Mathematikerin die Orientierung an Definitionen, Axiomen und früher bewiesenen Sätzen nicht im Vordergrund steht. Soll eine neue Vermutung bewiesen werden, so ist zunächst ein guter Einfall, eine starke Idee nötig. Erst danach kann der Beweis zu einer Abfolge begründeter Schritte ausformuliert werden, die alle Bezug nehmen auf Definitionen, Axiome und früher bewiesene Sätze.

Zum Schluss sei noch ein kleines mathematisches Problem gestellt, zu dessen Lösung ein guter Einfall nötig ist. Sie sind herzlich eingeladen, sich an dem Beweis zu versuchen. (Eine Lösung finden Sie in den Anmerkungen[12].) Wir behaupten: *Aus den 3^k Zahlen ($k \geq 2$)*

$0,1,2,3, \ldots ,3^k-1$

können mindestens 2^k verschiedene Zahlen ausgewählt werden mit der Eigenschaft, dass drei beliebige Zahlen $a<b<c$ dieser Auswahl mit Sicherheit unterschiedliche Abstände haben, d.h. dass $c-b \neq b-a$ ist. Können Sie das beweisen?

6 Die Mathematik ist einem speziellen optischen Gerät vergleichbar, das Teile der Welt sichtbar macht. Genau genommen macht es diese Teile nicht sichtbar, sondern bildet sie durch einen komplizierten, undurchschaubaren Mechanismus ab. Wenn wir Beweise führen, so beweisen wir nicht Sachverhalte der Welt, sondern immer nur Sachverhalte dieser Abbildung; wir beweisen, dass gewisse Elemente der Abbildung in gewissen Beziehungen zueinander stehen. In diesem Sinne lässt sich über die Mathematik sagen, was K. Popper[13] über das menschliche Wissen sagte: *«Unser Wissen ist ein kritisches Raten, ein Netz von Hypothesen, ein Gewebe von Vermutungen.»* In diesem Gewebe sind die mathematischen Beweise reissfeste Stränge, doch ihre Enden sind an tausend Stellen mit dem restlichen Gewebe verknüpft, und an diesen Stellen kann das Gewebe reissen…

8 nämlich das «Dubito, ergo sum», meist zitiert als «Cogito, ergo sum». Descartes selbst schrieb aber: «Dubito, ergo sum, vel, quod idem est: Cogito, ergo sum.»

9 aus einem Brief Luthers an seinen Landsherren, Nov. 1518; aus: M. Luthers Werke, Briefwechsel, Bd.1. Weimarer Ausgabe, 1930

10 Anselm von Canterbury, 1033–1109, Benediktiner, später Erzbischof von Canterbury

11 Deus = ens, quo maius cogitari non potest

12 Wir stellen die 3^k Zahlen im 3er-System dar: 0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, ... Dabei sind maximal k Stellen nötig. In dieser Menge lassen sich 2^k Zahlen finden, in denen die Ziffer «2» nicht vorkommt. Wir wählen gerade diese Zahlen aus! Seien $a<b<c$ drei beliebige Zahlen dieser Auswahl, so kann unmöglich $c-b=b-a$ gelten. Wäre das nämlich so, so müsste ja $c+a=2b$ sein. Die Zahl 2b enthält aber nur die Ziffern 0 und 2, während c+a an mindestens einer Stelle eine 1 enthalten muss! (a und c sind verschieden, d.h. es gibt mindestens eine Stelle, an der a eine 0 und c eine 1 aufweist oder umgekehrt.)

13 K. R. Popper, Objektive Erkenntnis, Hamburg 1974

Georg Schierscher-Marxer

Geographischer Mittelpunkt von Liechtenstein

Wie lässt sich der geographische Mittelpunkt eines Landes bestimmen und ins Gelände übertragen? Der Autor erörtert diese Frage anhand von Liechtenstein.

Comment définir le centre géographique d'un pays, comment le placer sur le terrain? L'auteur répond à ces questions, prenant pour exemple le Liechtenstein.

Im Zusammenhang mit einem Artikel in der NZZ (Nr. 131, 1999, S. 14) stiessen wir auf eine Fotografie vom geographischen Mittelpunkt der Schweiz, ein Bild, das uns nicht mehr losliess: Mittelpunkt eines Landes – was ist das? Wie wird er bestimmt und dann ins Gelände übertragen? Ein Thema für den Mathematikunterricht?

Solche und weitere Fragen beschäftigten uns vor einer in zweifacher Hinsicht besonders motivierenden Zeit. Einerseits war nämlich das Folgejahr von der Internationalen Mathematikervereinigung zum World Mathematical Year 2000 erklärt worden, für das die Unesco die Patenschaft übernommen hatte. Dabei galt eines seiner Ziele der Popularitätssteigerung der Mathematik. Andererseits lag es nahe, die Problemstellungen in das am liechtensteinischen Gymnasium angebotene Sonderwochenprojekt Vermessung aufzunehmen.

Briefmarke zum Weltjahr 2000 der Mathematik

Als rechnerisches Ergebnis lagen dann im letzten Herbst die Koordinaten des geographischen Mittelpunktes von Liechtenstein vor:

Y = 760 361, X = 223297.

In diesem Punkt wurde ein Findling als Markstein gesetzt und eingeweiht.

Didaktisch entpuppte sich das Projekt als sehr beziehungshaltig, greift es doch in Wissenschaften wie Mathematik, Physik, Informatik, Kartographie, praktische Vermessung, Petrographie und Geologie. Vielleicht regt es dazu an, in künftigen Facharbeiten den geographischen Mittelpunkt dieser oder jener Gemeinde zu berechnen.

Österreich, Schweiz, Europa

Ein gezielter Blick ins Internet belegt, dass viele Länder Europas und Europa selbst ihren geographischen Mittelpunkt bestimmt und dort einen Markstein gesetzt haben. 1949 wurde Bad Aussee in der Steiermark zum geographischen Mittelpunkt Österreichs «erhoben», derjenige unseres Nachbarlandes Schweiz liegt auf der Alp Älggi oberhalb von Sachseln OW. Das Bundesamt für Landestopographie hat ihn 1988 anlässlich seiner 150-Jahrfeier berechnet und ausgemessen. Nach den Berechnungen von 1989 durch das Nationale Geographische Institut von Frankreich befindet sich «Europos Centras» (erwartungsgemäss?) in Litauen nahe bei Wilna!

Mittelpunkt eines Landes – was ist das?

Wir sind uns einig über den Mittelpunkt eines Kreises und/oder eines Quadrates, aber schon beim Dreieck geraten wir etwas in Verlegenheit, da sein Inkreis- und sein Umkreismittelpunkt sowie sein Schwerpunkt im allgemeinen verschieden sind, ganz zu schweigen von einer Figur mit vier, fünf oder mehr Ecken, die normalerweise weder einen In- noch einen Umkreis besitzt und deren Schwerpunkt beispielsweise bei V-Form sogar ausserhalb der Fläche liegt.

In Deutschland beanspruchen rund ein halbes Dutzend Ortschaften – mit guten Gründen – Träger des Landesmittelpunktes zu sein. Diese Tatsache ist nicht in jedem Falle Ungenauigkeiten der Daten oder der Ermittlung anzulasten, sondern fusst auf verschiedenen Interpretationen des Begriffes der geographischen Mitte.

Aus der Literatur sind uns um die zehn Verfahren bekannt, nach denen der geographische Mittelpunkt seine jeweilige Bedeutung bekommt, so z.B.:

- Man wählt auf der Landesgrenze in regelmässigen Abständen Punkte aus und ermittelt dann jenen Ort im Landesinneren, für den die Summe der Entfernungen von diesen Grenzpunkten minimal ist.
- Die Landesfläche wird verkleinert, indem deren Aussenlinien auf Orthogonalen zu diesen um jeweils gleiche Strecken nach innen verschoben werden, bis man einen Punkt (oder unter Umständen eine Linie oder mehrere Punkte) erhält.
- Die Landesfläche wird von innen durch ein Rechteck, einen Kreis oder eine andere geometrische Figur maximaler Fläche ausgefüllt und dann der entsprechende Mittelpunkt festgestellt.

Entscheid für den Flächenschwerpunkt als geographischer Mittelpunkt

Die Methoden solcher Art sind recht unterschiedlich in der Praktikabilität und vor allem in der Rechenintensität. Ungeachtet des jeweiligen Arbeitsaufwandes richtet sich die Methodenwahl eventuell auch nach der besonderen Form eines Landes. *Wir haben uns für den Flächenschwerpunkt als geographischen Mittelpunkt von Liechtenstein (gMFL) entschieden.*

Experimentell-anschaulich können wir diesen wie folgt bestimmen: Wir schneiden irgend ein Land – in unserem Falle Liechtenstein – aus einer ebenen, homogenen Platte längs seiner massstäblich verkleinerten Landesgrenzen aus. Durch Probieren lässt sich der Ort finden, in dem man die Platte unterstützen muss, damit sie dort, auf einer Spitze gelagert, zur Balance kommt. Dieser Ort ist der (Flächen-) Schwerpunkt der Platte. Der Experimentalphysiker würde diese als Pendel aufhängen und den Schwerpunkt als Schnittpunkt zweier Lotgeraden erhalten. Ein Planzeichner könnte den Flächenschwerpunkt traditionell mit einem Planimeter eruieren.

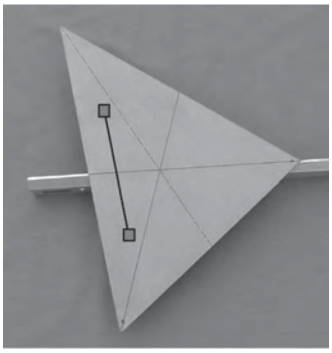
Solche experimentell gewonnenen Resultate vermögen so oder so dem fachüblichen Anspruch nach Metergenauigkeit nicht zu genügen, entspricht doch einer Abweichung von einem Millimeter auf der Karte im Massstab 1:25000 eine solche von 25 Metern in der Wirklichkeit. Abgesehen vom «Berufsstolz» blieb uns also nichts anderes übrig, als nach einer *rechnerischen* Lösung zu suchen.

Schwerpunkt von Dreiecken und Dreiecksystemen

Eine unserer Methoden zur Berechnung des Flächenschwerpunktes wird so verlaufen, dass wir die Fläche Liechtensteins in Dreiecke zerlegen, von jedem Dreieck den Schwerpunkt und dann den Schwerpunkt dieses Systems von Dreiecken berechnen.

Schwerpunkt eines Dreiecks

Die Abbildung unten zeigt ein allgemeines Dreieck, das längs einer Seitenhalbierenden s_1 auf der schmalen Kante eines Lineals ruht. Wie das Experiment zeigt, befindet sich das Dreieck im Gleichgewicht; der Schwerpunkt liegt somit auf der Strecke s_1, die sich daher als Schwerlinie erweist. Physikalisch-geometrisch können wir uns das dadurch erklären, dass zu jedem Flächenelement oberhalb von



Auf Linealkante balancierendes Dreieck

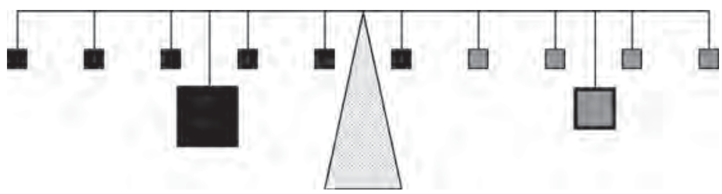
s_1 ein solches unterhalb von s_1 vorhanden ist. Beide Flächenteile haben gleichen Abstand von der (schiefen) Symmetrieachse und liegen auf dem selben Symmetriestrahl, halten sich also die Waage.

Die analoge Erfahrung machen wir mit den Seitenhalbierenden s_2 und s_3. Aus der Geometrie ist bekannt, dass sich die drei Schwerlinien in einem Punkt, dem Schwerpunkt des Dreiecks, treffen und dass dieser die Schwerlinien im Verhältnis 2:1 teilt. Mit diesem Wissen ist die Schwerpunktslage eines beliebigen Dreiecks berechenbar.

Schwerpunkt eines Dreiecksystems

Zur Berechnung des Gesamtschwerpunktes unseres aus knapp 2200 Dreiecken bestehenden Systems können wir uns die Masse eines jeden Dreiecks in seinem Schwerpunkt – im Massenmittelpunkt, wie er auch genannt wird – vereinigt denken. Mit der Masse, in unserem Falle mit der dazu proportionalen Fläche, geht die Grösse eines jeden Dreiecks in den Kalkül ein. Der Gesamtschwerpunkt ergibt sich durch die fortgesetzte Berechnung des Schwerpunktes des jeweiligen Teilsystems von Dreiecken und des folgenden Dreiecks. Man kann sich dieses System als komplexes Mobile mit den knapp 2200 Dreiecken als Anhängsel vorstellen: sein Schwerpunkt liegt auf der Verlängerung des obersten, zur Zimmerdecke führenden Fadens.

Das Problem läuft auf die Frage nach der Lage des Schwerpunktes zweier Massen (Dreiecke) hinaus. Die Idee zur Antwort sei am Beispiel zweier Dreiecke mit den Massen (Flächen) 3 und 2 erläutert. Sie lehnt sich an ein Gedankenexperiment von Archimedes (287? – 212 v. Chr.) an.



Veranschaulichung zum Hebelgesetz

An den masselos gedachten Hebelarmen hängen die Massen 3 und 2. Diese werden beziehungsweise durch drei und zwei Paare symmetrisch angebrachter, äquidistanter Massen ½ ersetzt, wie die obige Zeichnung zur Veranschaulichung des Hebelgesetzes ersichtlich macht. Der Schwerpunkt dieses symmetrischen Systems liegt in der Mitte desselben. Nun fällt auf, dass die Masse 3 zwei Längeneinheiten links und die Masse 2 drei Längeneinheiten rechts vom Schwerpunkt entfernt ist. Dieser Spezialfall steht im Einklang mit der Lehre vom Hebel und vom Schwerpunkt, dass nämlich

- der Schwerpunkt zweier Massen auf deren Verbindungslinie liegt und
- er diese im umgekehrten Verhältnis der Massen teilt.

Varianten der Berechnung des gMFL

Es war eine verlockende Herausforderung, den bis anhin unbekannten geographischen Mittelpunkt von Liechtenstein mit den Mitteln der Schulmathematik zu berechnen. Das FL-Tiefbauamt übergab uns vertraulich zu diesem Zwecke die digitalisierten, auf Meereshöhe reduzierten Koordinaten der Landesgrenzpunkte.

Nun galt es, zwei Schlüsselprobleme zu lösen: Eine adäquate Berechnungsmethode zu finden und entsprechende Programme zu schreiben, da die Datenfülle und viele Graphiken ohne Computer nicht zu bewältigen gewesen wären.

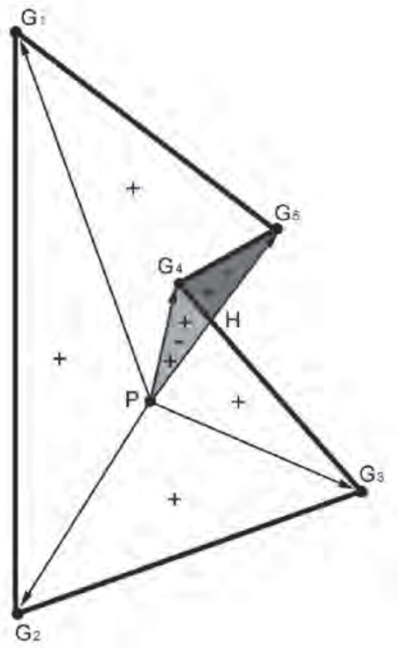
Aus theoretischem Interesse und aus Freude an der Methodenvielfalt, aber auch zu Kontrollzwecken, dachten wir uns die folgenden drei Berechnungsverfahren aus.

1. Berechnung mit Triangulation

In der folgenden Prinzipskizze (S. 26) seien G_1 bis G_5 die Landesgrenzpunkte. In Wirklichkeit sind es n = 2185 an der Zahl; ihre Koordinaten x und y beziehen sich auf das schweizerische Landeskartennetz. Wir wählen einen beliebigen Punkt P – aus praktischen Gründen ungefähr beim vermuteten Flächenschwerpunkt – verbinden ihn mit allen Grenzpunkten und erzeugen auf diese Weise ein über die Landesfläche gelegtes Dreiecksnetz.

Nun wird aus den Eckenkoordinaten von jedem der n Dreiecke der Schwerpunkt $S_i(x_i/y_i)$, für i = 1, 2, …, n, und aus allen diesen Schwerpunkten durch Gewichtung mit dem jeweiligen Dreiecksflächeninhalt A_i der Gesamtschwerpunkt $S(x_S,y_S)$ berechnet.

Da aber die Landesfläche nicht konvex ist – zwei «Flächenbewohner» also nicht von allen Positionen aus Sichtkontakt zueinander haben – kann es wie im Falle des ΔPG_4G_5 vorkommen, dass Teile davon sogar unterschiedlich oft in die Rechnung eingehen (ΔHG_4G_5 zweimal, ΔPG_4H dreimal) und dass Teile (ΔHG_4G_5) gar nicht zur Landesfläche gehören!



Prinzipskizze

Wir ziehen uns dadurch aus der Schlinge, dass wir mittels des (sog.) Vektorproduktes die Orientierung der Flächen ins Spiel bringen und so für die Dreiecke PG_1G_2, PG_2G_3, ..., PG_5G_1 je nach Umlaufsinn positive (Gegenuhrzeigersinn) oder negative (Uhrzeigersinn) Flächeninhalte errechnen.

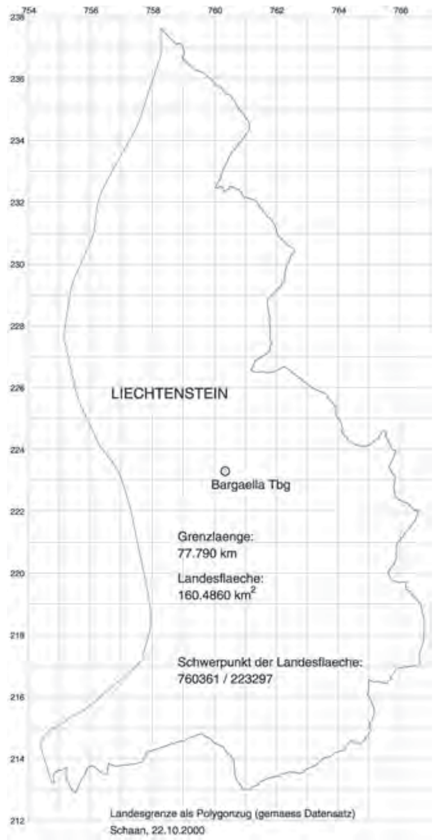
Auf diese Weise geht die Fläche von ΔPG_4H bzw. deren Drehmoment im Endeffekt genau *ein*mal (positivwertig) in die Schwerpunktsberechnung ein, während dasjenige von ΔHG_4G_5 wie gewünscht aus der Rechnung fällt.

2. Weitere Berechnungsmethoden

a) Quadratraster-Methode

Wir betten die Landesfläche in ein Rechteck ein und überdecken dieses schlicht mit einem Quadratraster. Der Gesamtschwerpunkt ergibt sich dann aus den Schwerpunkten jener Quadrate, die ganz im Landesinneren liegen oder zumindest deren Mittelpunkte. Mit der Verkleinerung der Rasterquadrate kann die Genauigkeit (theoretisch beliebig) gesteigert werden. Damit erhöht sich aber auch die Rechenzeit des Computers und findet darin seine Begrenzung. Bei Quadraten mit 25 m Seitenlänge (Salongrösse) liefert dieses Verfahren die Schwerpunktskoordinaten bereits metergenau.

b) Monte-Carlo-Methode



Liechtenstein im CH-Landeskartennetz

Bei dieser Methode wird – wie der Name verrät – der Schwerpunkt «erwürfelt». Dazu wird die Landesfläche wiederum in ein Rechteck eingebettet. Letzteres wird mit Millionen von computergesteuerten Würfen nach dem Pseudozufallsprinzip mit Punkten «gleichverteilt» überdeckt (vgl. Bild S. 27 links) – Schneeflocken gleich, die in zufälliger Weise auf ein Stück Erde fallen. Aus den ins Landesinnere fallenden Punkten (Treffer) kann in Anlehnung an die Methode a) auf den Gesamtschwerpunkt geschlossen werden.

Unserem Auge fällt es leicht zu erkennen, ob ein Punkt im Landesinneren liegt oder nicht. Nicht so beim Computer: Die Erzeugung eines solchen Erkennungsalgorithmus und dessen Programmierung verlangte einige Denkarbeit.

Die beiden Methoden aus 2. sind unvergleichlich viel rechenintensiver als die Triangulationsmethode aus 1., aber alle drei Varianten liefern die gleichen, metergenau erwünschten Koordinaten des geographischen Mittelpunktes von Liechtenstein, nämlich

Y = 760 361 X = 223 297.

Sie beziehen sich – wie oben schon erwähnt – auf das schweizerische Landeskartennetz; der gMFL liegt somit 160 361 Meter östlich und 23 297 Meter nördlich vom Nullpunkt, der bei der ehemaligen Sternwarte in Bern liegt.

Bild mit bloss 5000 Würfen

Vermessung des gMFL

Nach der Berechnung des gMFL musste dieser Punkt auf der Alp Bargälla vermessen werden. Da es dort oben nur ganz wenige, zudem ungünstig gelegene Vermessungspunkte gibt, entschieden wir uns für Satellitenvermessung mit Referenzpunkt (DGPS). Wir wählten einen Tag aus, an dem von ca. 11 bis 12 Uhr eine erfolgversprechende Konstellation von 9 empfangbaren Satelliten vorhergesagt war. Doch der gMFL lag auch zu diesen Zeiten überwiegend im Funkschatten des nahen Berghanges. Wenig abseits, wo wieder volle Funkverbindung gegeben war, errichteten wir daher eine ca. 100 m lange Basislinie und steckten den gMFL von dort aus traditionell mit dem Tachymeter ab.

Markstein mit Inschrift

Monate später setzte ein Grosshelikopter den 4½ Tonnen schweren Findling mit der im Bild unten erkennbaren, symbolisch nach Osten ausgerichteten Inschrift im gMFL ab. Der Markstein stammt aus dem österreichischen Abschnitt des Saminatales, das Liechtenstein in der Süd-Nordrichtung durchzieht. Er ist ein offizielles Geschenk der Republik Österreich an unser Land.

Anhand von Gesteinsproben wurde der erratische Block petrographisch untersucht; Prof. Allemann, der Verfasser der geologischen Karte von Liechtenstein, hat eigens in einem kurzen Bericht dessen Herkunft und Werdegang beleuchtet. Die Kosten wurden vom Land und von der Trägergemeinde Triesenberg übernommen.

Markstein im geographischen Mittelpunkt von Liechtenstein

Georg Schierscher-Marxer
studierte in Fribourg Mathematik und Physik und unterrichtet heute am (einzigen!) Liechtensteinischen Gymnasium in Vaduz.

Peter Gallin

Vom Sinn des Mathematikunterrichts

Lässt sich Mathematikunterricht als «Schule des Denkens» rechtfertigen? Mit dem Bild einer Bergwanderung zeigt der Autor auf, wie der Unterricht für Lehrende und Lernende sinnvoll wird.

L'enseignement des mathématiques peut-il être défini comme une «école de pensée»? L'auteur en montre le sens, pour les professeurs comme pour les élèves, en filant la métaphore de la randonnée en montagne.

Die Mathematik geniesst eine hohe Wertschätzung in unserer Gesellschaft. Vielen ist bekannt, dass das Rechnen im Alltag und im Bankwesen dank mathematischer Formalisierungen effizient abgewickelt werden kann, dass die Ingenieurwissenschaften ohne Mathematik nicht auskommen und dass die Computer, die eng mit Mathematik verbunden sind, die Raumfahrt erst ermöglicht haben. Der Siegeszug des Computers in allen Lebensbereichen ist der greifbare Beweis dafür, dass die Mathematik eine Schlüsselstellung für alle technischen Errungenschaften und für jeden naturwissenschaftlichen Fortschritt innehat. Wer wollte angesichts dieser Tatsachen die starke Stellung der Mathematik im Kanon der Schulfächer in Zweifel ziehen? Da hat es der Lateinunterricht an unseren Gymnasien schon schwerer, sich zu rechtfertigen. Er muss sich auf tiefer liegende Bildungswerte berufen, denn der direkte Nutzen des Lateins im Alltag ist nicht mit Händen zu greifen. Vielleicht blickt das Latein sogar mit Neid auf die Mathematik, deren Stand so fest und so einfach zu begründen ist.

Schauen wir uns die Schule aber etwas näher an, ziehen Wolken am strahlenden Himmel der Mathematik auf. Was hat denn die Mathematik, die nach der Primarschule unterrichtet wird, mit dem Leben der Jugendlichen zu tun? Wer braucht denn nur schon den Dreisatz, der am Schluss der Primarschulzeit vermittelt wird? Mitten in der Schulzeit kümmert es die Lernenden wenig, dass die Mathematik in Technik und Wissenschaft intensiv genutzt wird. Sie möchten wissen, wozu sie hier und jetzt gut ist. «Wozu müssen wir das lernen?» ist die gefürchtete Schülerfrage. Angesichts der starken Stellung seiner Wissenschaft ist es begreiflich, dass ein erfolgsgewohnter Mathematiker mit Hinweisen auf die Zukunft antwortet: «Warte nur bis du einmal gross bist, dann wirst du erkennen, wie wichtig die Mathematik für die Menschheit ist.» Oder in einer anderen Variante: «Lerne zuerst einmal die Grundtechniken, dann wirst du später die Schönheiten der Mathematik verstehen und geniessen können.» Erstaunlicherweise werden diese vertröstenden Zukunftsargumente häufig akzeptiert

Peter Gallin wohnt seit 1977 in der Zürcher Gemeinde Bauma, ist verheiratet und hat zwei Kinder. Geboren wurde er 1946 in St. Moritz (Schweiz) und besuchte das Gymnasium «Lyceum Alpinum» im benachbarten Zuoz. Es folgte ein Studium der theoretischen Physik an der ETH in Zürich mit Diplomabschluss. Anschliessend war Peter Gallin zwei Jahre Assistent für theoretische Physik und bildete sich gleichzeitig zum Gymnasiallehrer für Mathematik und Physik weiter. Seine Dissertation befasst sich mit der n-dimensionalen Spiegelungsgeometrie. Seit 1973 ist er Professor für Mathematik an der Kantonsschule Zürcher Oberland in Wetzikon und zusätzlich seit 1985 Lehrbeauftragter für Fachdidaktik der Mathematik an der Universität Zürich.

und verinnerlicht. Damit wird ein Argumentationsmuster zementiert, das die Lernenden, wenn sie selbst einmal erwachsen sind, ihrerseits repetieren und so von Generation zu Generation weitergeben. Um aber der Frage nach dem Sinn des Mathematikunterrichts auf den Grund zu gehen, wäre es manchmal besser, wenn diese Verweise auf eine sich erfüllende Prophezeiung von den Lernenden zurückgewiesen und unter Protest andere, auf die Gegenwart bezogene Antworten eingefordert würden. Das würde die Mathematiklehrerinnen und -lehrer zwingen, nach anderen, besseren Argumenten Ausschau zu halten, Argumenten, die das Lernen von Mathematik im Hier und Jetzt erleichtern könnten.

Als junger Gymnasiast habe ich einmal auf dem Schulweg älteren Mitschülern gegenüber die Vermutung geäussert, im Latein würde man schon denken lernen, weil die Wörter, die zusammengehörten, so weit im Text verstreut seien. «Nein, nein», war deren überzeugte Meinung, «logisch denken lernt man in der hohen Schule der Mathematik.» Ich höre heute noch den dezidierten und zugleich würdevollen Tonfall, mit dem die damals vielleicht 17-Jährigen mir diesen Lehrsatz vermittelten. Vielleicht wurde hier eine Weiche in meiner Berufswahl gestellt, denn im Verlauf der weiteren Gymnasialzeit fühlte ich mich tatsächlich mehr und mehr von der «Schule des Denkens» in der Mathematik angezogen. Aber nicht vielen erging und ergeht es so. Jetzt, nachdem ich Mathematiklehrer geworden bin, stelle ich fest, dass auch dieses Argument nicht unbedingt verfängt, denn auch ihm haftet eine Zukunftsorientierung an: «Du wirst logisch denken lernen, wenn du dich mit Mathematik beschäftigst.» Obwohl das Argument besser auf das Wesen der Mathematik passt als nur der Hinweis auf die Nützlichkeit der Mathematik für die Menschheit, kann es missbraucht werden, um scheinbare Sinnlosigkeit in der Gegenwart mit einem versprochenen Paradies in ferner Zukunft zu entschuldigen. Ausserdem kann natürlich jedes Schulfach für sich beanspruchen, eine «Schule des Denkens» zu sein.

Wir stehen also vor der zentralen Frage: Wie wird Sinn in der Gegenwart produziert? Schauen wir uns doch einmal ausserhalb der Schule um. Wann finden wir, dass etwas sinnvoll ist? Niemand wird wohl behaupten, dass eine Bergwanderung zum Beispiel keinen Sinn habe. Und doch, nüchtern betrachtet, bringt einen eine Bergwanderung kaum weiter: Am Schluss ist man ja meist wieder am Ausgangspunkt und hätte doch ebenso gut gleich dort bleiben können. Weshalb unterzieht man sich denn freiwillig einigen Mühen und Strapazen und setzt sich manchmal sogar lebensbedrohenden Gefahren aus? Es scheint die Befriedigung zu sein, die man nach überstandener Anstrengung erlebt, wenn man zurück schaut auf das durchwanderte Gebiet, oder wenn man vom Aussichtspunkt aus eine wunderbare Fernsicht hat, oder wenn man spürt, wie die eigenen Glieder ermüdet sind, oder wenn man im Kreis der Gefährten von Erlebnissen erzählen kann. Genuss und Befriedigung sind sinnstiftend, aber wohl nur dann, wenn davor eine Anstrengung liegt. Dabei ist entscheidend, dass die Anstrengung absehbar, erträglich und vor allem freiwillig gewählt ist. Wird aber das Genussvolle verabreicht, ohne dass eine Eigenleistung vorangeht, bleibt – vor allem, wenn das immer wieder passiert – ein schaler Nachgeschmack übrig. Ein Mensch sucht sich offenbar genau dasjenige Mass von Anstrengung aus, das zu erbringen er fähig ist. Das zeichnet seine Vitalität aus. Das hinterlässt Befriedigung.

Das Bild von der Bergwanderung passt recht gut auf die Mathematik, weil Mathematik-Treiben von der Sache her zuerst einmal eine ganz private Angelegenheit ist, so privat, wie die Leistung des Aufstiegs auf der Bergwanderung, die jede teilnehmende Person höchst persönlich erbringen muss. Niemand wird – in der Regel – auf einer Sänfte hoch getragen. Dass es auch genussvoll sein kann, zur Abwechslung einmal mit einer Bergbahn hochzufahren, sei keineswegs verschwiegen. Besonders, wenn die Klippen allzu steil sind, mag das durchaus sinnvoll sein. Nun sind aber die Berge der Mathematik im Bereich der Schulmathematik in der Regel nicht unbezwingbar. Das meiste kann bei mittlerer Kondition aus eigener Kraft bewältigt werden. Gerade im Gegensatz zu anderen Schulfächern wird in der Mathematik sehr wenig Weltwissen und Lebenserfahrung vorausgesetzt. Mathematische Zusammenhänge können tatsächlich allein mit Bleistift und Papier erforscht und erfunden werden. Es braucht keine Literatur, keine Experimente und keine

Experten, um mathematisch tätig werden zu können. Es reicht, wenn man zählen kann. Das ist so elementar wie das Singen und das Gehen. Darum gibt es in der Mathematik und in der Musik die jüngsten Wunderkinder. Natürlich hat sich die Mathematik – wie auch die Musik – zu einer hohen Wissenschaft entwickelt, in der es viel zu lernen gibt, und die schliesslich nur noch für Leute mit Spitzenkondition zu erklimmen ist. Das Charakteristische an ihr ist aber trotzdem, dass sie mit den geringsten Voraussetzungen auskommt, die ausserhalb des Wissenschaft treibenden Individuums liegen. Diese spezielle Eigenart der Mathematik kann nun pädagogisch nutzbar gemacht werden, damit die Schülerinnen und Schüler den Mathematikunterricht nicht nur als nützlich für die Zukunft, sondern auch als sinnvoll im Hier und Jetzt erleben können.

Eine Englischlehrerin gestand mir kürzlich: «Sinn machte der Mathematikunterricht immer dann, wenn ich das Gefühl hatte, etwas zu durchschauen und etwas zu können.» Man muss den Lernenden also die Gelegenheit geben, aufgrund individueller und angemessener Anstrengung einen Durchblick und ein Können zu erlangen, das sie als befriedigend erleben können. Die Lernenden sollen spüren, wie sie sich aus eigener Kraft von einer verwirrlichen, chaotischen Situation zu einer klärenden Struktur, einem eindrücklichen Muster emporarbeiten können. Kein Fach offeriert ein derart elementares Tätigkeitsfeld zum Erfahren und Trainieren der eigenen Kräfte wie die Mathematik. Descartes' «cogito, ergo sum» erfährt eine pädagogische Färbung und Umdeutung zu «ich treibe Mathematik, also spüre ich mich selbst». Das hat weit reichende Konsequenzen auf die Gestaltung des Unterrichts.

Als junger Mathematiklehrer habe ich diverse Stufen der Vermittlung von Mathematik erprobt. Zuerst glaubte ich, ich müsste alles nur gut erklären, damit es die Lernenden verstehen. Das ist auch recht gut gelungen, aber alles war so schnell wieder vergessen, dass bereits zu Hause nicht mehr klar war, was in der Stunde erklärt worden ist. Dann glaubte ich, dass mit den Themen der Mathematik mehr Lebensbezug, also eine Verbindung zur realen Welt hergestellt werden müsste. Dies hatte vielfach den Effekt, dass die Problemstellungen rapid schwierig wurden und die Lernenden bald überforderten. Ausserdem bestand dabei die Gefahr, dass ich den obligatorischen Lehrplanstoff nicht mehr in der vorgesehenen Zeit behandeln konnte. Schliesslich bin ich zu reinen Fragestellungen der Mathematik, zu den ganz elementaren, im Lehrplan vorgesehenen Stoffen, zurückgekehrt und stelle sie zuerst einmal ins Zentrum. Im Unterschied zu früher lasse ich aber den Schülerinnen und Schülern beim Erkunden den Vortritt. Das bedeutet, dass ich nicht mehr so viel erkläre wie früher, sondern die Lernenden mit geeigneten Aufträgen und Lernaufgaben dazu auffordere, möglichst auf eigenen Wegen sich das neue Stoffgebiet zurechtzulegen und dabei über ihre Probleme, Erfolge, Misserfolge und Schwierigkeiten schriftlich Protokoll zu führen. So wird die Arbeit der Lernenden im Mathematikunterricht nicht unbedingt bequemer und einfacher, denn es gibt immer wieder Durststrecken auszuhalten. Im schlimmsten Fall aber kann ich immer helfend eingreifen. Ich stürme einfach nicht mehr mit wehenden Fahnen und dem Motto «mir nach!» voran, sondern sage «geh du voran!» Wer kennt nicht das Problem der Orientierung in einer fremden Stadt? Hat man einen Führer, der einem lückenlos den Weg weist, wird man den gleichen Weg am nächsten Tag nur noch mit Schwierigkeiten finden. Hatte man dagegen einen Stadtplan, mit dem man in eigener Regie den Weg zusammenstellte, wird man sich am nächsten Tag problemlos an ihn erinnern und vielleicht sogar Verbesserungen anbringen.

Der Lohn für die Erkundungsarbeit ist für die Lernenden der Genuss, sich dem Ziel aus eigener Kraft genähert oder es sogar erreicht zu haben. Dann gibt es viel zu erzählen und die Erlebnisse bleiben lange haften. Auch jene, die das Ziel nicht ganz erreichten und schliesslich auf meine Hilfe angewiesen waren, haben das Problem aus nächster Nähe kennengelernt und sind in der Regel dankbar für meine Antworten auf ihre Fragen. Das erleben oft sogar bestandene Mathematiker, wenn sie an die eigenen Grenzen stossen und sich Hilfe bei Kollegen und in Büchern holen müssen. In diesem Sinn wird also die Beschäftigung mit Mathematik zu einem Ort der Selbsterfahrung. Man lernt seine Stärken und Schwächen genau kennen, ohne in psychologisierende Bereiche zu geraten. Man muss ja nicht gleich an Aischylos denken, der die berühmte Formel «durch Leiden lernen» geprägt hat. Der Lernende kann nämlich das Mass der Anstrengung selbst bestimmen und darf auch manchmal die Bergbahnen benützen, die auf alle Gipfel der Schulmathematik gebaut worden sind.

Es zeigt sich, dass sich mein Mathematikunterricht über die Jahre hinweg angereichert hat: Neben die genaue Analyse und Dosierung der Schulstoffe, neben das einfühlsame, geduldige und variantenreiche Erklären, neben den Einbezug von Alltagssituationen, in denen Mathematik gebraucht werden kann, trat die Überzeugung, dass – wenn immer möglich – der Lernende produktiv tätig sein muss, damit seine von ihm selbst dosierten Anstrengungen mit Befriedigung belohnt werden und seine Erkenntnisse eine längere Lebensdauer haben. Im Gegensatz dazu steht ein Unterricht mit Schwergewicht auf der Rezeption des Stoffs, der normierte Anstrengungen abverlangt und bei dem der tatsächliche Stand der Lernenden viel schwerer einzuschätzen ist. Wenn ich heute mit Studierenden und angehenden Mathematiklehrern diskutiere, so stelle ich mit erstaunlicher Regelmässigkeit fest, dass sie einen anregenden und sinnvollen Mathematikunterricht immer gleichsetzen mit dem Behandeln von spannenden Anwendungen der Mathematik in Technik und Alltag, sowie der bis ins Detail ausgeklügelten Wissensvermittlung. Nur selten werden diese beiden Fundamente mit dem Aspekt der singulären Tätigkeiten der Lernenden verknüpft. Es mag einem jungen Mathematiker schon unheimlich vorkommen, wenn man beim Lehren und Lernen von Mathematik die unberechenbare Seite des Lernenden zum unterrichtsbestimmenden Wegweiser macht. Tut man dies, hat aber der Mathematikunterricht tatsächlich mit dem Leben der Lernenden etwas zu tun, wie es die für die Schule Verantwortlichen, also Ausbildner und Aufsichtspersonen, immer wieder fordern. Nur ist dieser Zusammenhang wohl ein etwas anderer, als ihn sich diese vorgestellt haben. Sie denken nämlich, wie die Studierenden, auch zuerst an diejenigen Aspekte der Mathematik, die man im Alltag und später in der Wissenschaft brauchen kann. Dass damit nur bedingt Sinn erzeugt wird, haben wir oben gesehen. Nein, der Bezug mit dem Leben der Jugendlichen wird dadurch hergestellt, dass sie sich durch ihre Eigentätigkeit selbst besser kennen lernen. Das ist die Stärke, die der Mathematikunterricht ausspielen kann und die vielfach unterschätzt wird. Neuere Forschungsergebnisse belegen gerade auch im Primarschulbereich, dass die Kinder motiviert mit Aufgaben in ihrer mathematisch reinen Form arbeiten, bei denen also bewusst auf einen Bezug zur realen Lebenswelt der Kinder verzichtet worden ist. Wichtig ist nur, dass die Kinder selbst Entscheidungen treffen und auf eigenen Wegen forschen dürfen. Ein erwünschter Nebeneffekt der damit möglichen Konzentration auf den abstrakten Lehrplanstoff ist, dass das Zeitbudget besser eingehalten werden kann und die Maturziele trotz verkürzter Mittelschuldauer und verminderter Wochenstundenzahl eingehalten werden können.

In meinem heutigen Mathematikunterricht kommt es nur noch selten vor, dass ich vorgängig irgend welche Rezepte – sogenannte Algorithmen – erkläre, die dann von den Kindern getreulich ausgeführt werden sollen. Ich habe erfahren, dass Algorithmen – im wahrsten Sinne des Wortes – nicht jugendfrei sind. Sie sollen nicht einem unerfahrenen Gehirn präsentiert werden, weil sie sonst Schädigungen hervorrufen, Schädigungen am Selbstwert des Jugendlichen. Algorithmen sind zwar nützlich und auch unschädlich, wenn sie von mühsamen Tätigkeiten, die man ausführen will, entlasten oder sogar befreien. Deshalb ist das umständliche Hantieren in einem mathematischen Problemfeld notwendige Voraussetzung für das Verstehen von Algorithmen. Ausserdem verhindern die vorgängigen, individuellen Bewegungen der Lernenden den Aufbau eines ungesunden Abhängigkeitsverhältnisses von der Lehrperson. Groteske Züge von Abhängigkeit konnte ich kürzlich bei der 12-jährigen Elisabeth erleben, die bei der Lektüre von Schülertexten zum Zehnerübergang ausser sich geriet, weil drei von vier Schülern unkonventionelle Wege zum Berechnen der Summe von 8 und 9 vorschlugen. Sie lamentierte unter Tränen, dass nur der von ihrer Lehrerin vermittelte Zehnerübergang korrekt sei und dass alles andere verboten werden müsste. So sehr hat Elisabeth ihre Lehrerin in Schutz genommen, dass dabei die Mathematik auf der Strecke bleibt. Denn eine typisch mathematische Fragestellung ist es gerade: «Wie könnte man es denn auch noch anders machen?»

Schliesslich darf die Lehrperson auch an sich selbst denken. Auch ihr stehen Genuss und Befriedigung zu, um den Unterricht als sinnvoll zu erleben. Das reibungslose Funktionieren von perfekten Algorithmen zu überwachen, ist auf die Dauer nicht sehr befriedigend, besonders weil in Tat und Wahrheit immer wieder ärgerliche Defizite zu Tage treten, die korrigiert werden müssen. Viel genussvoller ist es, wenn mathematisch Unerwartetes erfunden und mitgeteilt wird. Aus diesem Grund sollte auch von der Seite der Lehrperson dem Unerwarteten, dem Überraschenden, eben dem Singulären, im Unterricht Raum gegeben werden. So kommt das Prinzip der Befriedigung beiden, Lehrenden und Lernenden, zugute. Ein erfahrener Universitätsdozent meinte einmal ironisch zum Lehrberuf: «Und Spass möchtest du dabei auch noch haben!» Ja, indem ich ein paar allzu enge Auffassungen zum sinnvollen Mathematikunterricht erweitert habe, indem ich die singulären Produktionen der Lernenden einbeziehe, habe ich Spass beim Unterrichten: Der Unterricht ist für mich sinnvoll geworden.

Inserat

Quatre fois par année, **la politique extérieure** vous est présentée de façon captivante, grâce à une foule d'informations, dans **«La Suisse et le monde»**, le magazine du Département fédéral des affaires étrangères (DFAE). Pour des raisons techniques, seule l'édition allemande est jointe au présent numéro. Mais «La Suisse et le monde» **paraît aussi en français et en italien**. Vous pouvez vous y abonner gratuitement à l'adresse suivante: «La Suisse et le monde», c/o Schaer Thun AG, Industriestrasse 12, 3661 Uetendorf ou par e-mail: druckzentrum@schaerthun.ch.

La politica estera, in modo appassionante e informativo, è trattata quattro volte all'anno in **«Svizzera oltre»**, la rivista del Dipartimento federale degli affari esteri (DFAE), che vi alleghiamo per motivi tecnici solo nella versione tedesca. Su richiesta, «Svizzera oltre» è però ottenibile gratuitamente **anche in italiano o francese**. Basta rivolgersi a: «Svizzera oltre», c/o Schaer Thun SA, Industriestrasse 12, 3661 Uetendorf oppure via e-mail: druckzentrum@schaerthun.ch.

NOVEX MÖBELBAU

ScuolaBox.

Büro- und Schuleinrichtungen
Baldeggstrasse 20, CH-6280 Hochdorf
Tel. 041-914 11 41, Fax 041-914 11 40
e-mail: info@novex.ch
www.novex.ch

Aldo Dalla Piazza

Rupture dans l'enseignement des mathématiques: l'avènement du socio-constructivisme?*

In der Westschweiz sollen bis 2005 alle Klassen den Mathematikunterricht auf gemeinsamer Grundlage erhalten. Der Autor fragt nach Vor- und Nachteilen sowie nach der Rolle didaktischer Theorien, die sich in der Praxis bewähren müssen.

En Suisse romande, toutes les classes devront, d'ici à 2005, bénéficier d'un enseignement de mathématiques sur une base générale. L'auteur explore les avantages et les inconvénients d'un tel processus, ainsi que le rôle des théories didactiques qui définissent la pratique.

Aldo Dalla Piazza est professeur de didactique des mathématiques à l'Université de Berne et expert au sein de la commission de lecture 7-8-9, responsable des aspects relevant spécifiquement des mathématiques.

Des nouveaux moyens d'enseignement pour la scolarité obligatoire

La coordination romande aboutira en 2005 à une réalisation concrète très forte: à partir de cette année-là, les élèves de Suisse romande, de la $1^{\text{ère}}$ à la $9^{\text{ème}}$ année, vivront un enseignement des mathématiques basé sur des moyens d'enseignement communs. L'introduction systématique des nouveaux moyens 1P–4P ($1^{\text{ère}}$ à $4^{\text{ème}}$ année primaire) s'est réalisée en 1997, celle des nouveaux moyens de $5^{\text{ème}}$ en 2001. Les moyens de $6^{\text{ème}}$ suivront en 2002 puis, en 2003, les moyens 7-8-9. Un même esprit devrait alors envelopper l'entier de la formation mathématique des élèves, à travers l'ensemble des degrés.

Une telle réalisation est évidemment conditionnée par un jeu de contraintes et de choix fondamentaux qui la compliquent considérablement. En ce qui concerne les moyens 7-8-9, qui sont aussi ceux qui touchent de plus près aux études gymnasiales, il convient notamment de relever les aspects suivants:

- Le moyen d'enseignement 7-8-9 sera commun à tous les élèves, quelle que soit leur orientation. Ce choix relève d'une volonté de ne pas installer de discrimination en considérant qu'il y aurait des mathématiques pour les uns différentes de celles valables pour les autres. Cela ne revient toutefois pas à nier l'existence de différences liées au développement de la personnalité, au rythme d'apprentissage, à l'aisance dans le raisonnement ou encore à l'histoire ou au degré de maturité de chaque individu. Ainsi, le moyen d'enseignement doit offrir un vaste choix d'activités pouvant être traitées à différents niveaux d'approfondissement et être exploitées de diverses manières.

* Le texte se base sur deux exposés tenus lors de l'ouverture de la formation continue préparant l'introduction de ces moyens d'enseignement dans la partie francophone du Canton de Berne.


Zepf & Zepf ASW

- Le moyen d'enseignement sera commun aux élèves des trois degrés: 7, 8 et 9. Il doit donc couvrir les programmes des trois années, sans découpage annuel. Ce choix est lié au précédent: offrir des opportunités de différenciation pédagogique. Mais il est aussi lié à une conception d'un apprentissage peu cloisonné, basé sur une progression en spirale dans laquelle une même notion doit être reprise, graduellement approfondie, abstraite, enrichie de facettes et de connexions à un réseau de plus en plus étendu de notions sœurs, dans une démarche d'élargissement graduel du champ de concepts dans lequel elle s'inscrit. Ainsi, certaines activités doivent pouvoir être reprises et approfondies successivement, dans une diversité d'approches et de regards.
- Le moyen d'enseignement sera commun aux élèves de toute la Suisse romande. Pour tenir compte des habitudes locales, il doit contenir des éléments très divers, qui peuvent frapper là où ils ne sont pas coutumiers: vecteurs pour satisfaire les demandes des uns, trigonométrie ou développement de la rigueur et de la démonstration dans le cadre de la géométrie pour satisfaire celles des autres. Bien que commun, le moyen d'enseignement ne sera cependant utilisé d'une manière identique ni partout ni par tous. Chacun mènera son cours selon sa propre représentation, selon l'esprit de son école ou de son canton et les exigences de son plan d'études.

Au-delà de moyens communs, une méthode et un credo communs

Derrière des moyens communs, c'est bien une méthodologie et une application communes de certaines théories didactiques qui s'imposent, des degrés 1 à 9. La fin des années soixante avait vu l'arrivée des mathématiques modernes, une représentation, voire une idéologie commune des mathématiques, issue du cercle des mathématiciens. Aujourd'hui ce serait le tour du socio-constructivisme, une méthode, voire une idéologie commune de l'enseignement des mathématiques. Elle nous viendrait du cercle des didacticiens des mathématiques.

Le fait socio-constructiviste est incontournable. Ce conditionnel ne marque donc pas des doutes quant au bien-fondé des choix effectués mais vise à mettre en garde face à une schématisation abusive de la situation. Le parallèle avec les mathématiques modernes n'est pas évoqué par hasard. Il y a bien à apprendre d'un tel échec, ne serait-ce qu'au sujet des risques liés à toute application d'une doctrine.

De fait, la méthodologie qui sous-tend ces moyens n'est ni le socio-constructivisme ni son application directe et unique. Elle reste sujette au débat et comporte probablement des excès. La lecture du livre du maître frappe par exemple par la répétition de certains termes: situation, situation-problème, problème ouvert, jeux, dévolution du problème, institutionnalisation, stratégie de résolution, démarche scientifique des élèves, activités, activités de recherche, activités de structuration, activités de consolidation, activités d'entraînement, etc. Ainsi même les exercices, au sens usuel, sont présentés sous l'étiquette «activités», avec la volonté claire d'éviter de trop mettre en évidence les aspects répétitifs liés à l'entraînement des techniques. Certes, les théories didactiques donnent de nombreux arguments pour aller dans cette direction et centrer la démarche sur le questionnement par l'élève. Mais sans en faire une systématique absolue. Parce que les choses sont subtiles et complexes. Contradictoires aussi. Il est aisé de trouver des textes qui montrent l'ambiguïté des choses, comme l'illustrent les quelques exemples suivants:

- Apprentissage à partir d'activités ou activisme pédagogique? Bkouche[1] relève (p. 18–19): Il est vrai qu'en opposition à cette illusion du bon langage [les maths modernes] s'est développé depuis quelques années un activisme pédagogique tout aussi illusoire. Devant les difficultés rencontrées dans l'enseignement, on a inventé ce qu'on appelle aujourd'hui des activités considérées comme préparatoires à l'acquisition de la connaissance, l'activité mathématique réduite aux activités, avec le vague espoir qu'à force d'activités plus ou moins bien choisies, les élèves atteindraient le savoir vrai [...]. Mais que représentent de telles activités dont les élèves

1 Bkouche, R., Charlot, B., Rouche, N.: Faire des mathématiques: le plaisir du sens, Armand Colin, 1991.

ne voient pas toujours la signification [...], où sont les problèmes, c'est-à-dire les questions fondatrices qui conduisent à penser le besoin d'une construction rationnelle?

Et plus loin (p. 179–180): *Pour expliquer [l'échec scolaire], on dit que les mathématiques sont difficiles parce qu'elles sont abstraites et on en déduit qu'avec les élèves en difficultés scolaires il faut enseigner les mathématiques en partant du concret. [...] On élabore à cet effet du matériel, des situations, des stratégies qui, à l'analyse, se révèlent en fait comme pseudo-concrètes [...] Il y a là une confusion entre pédagogie active et pédagogie concrète [...] Ce qui est important c'est l'activité intellectuelle de l'élève [...]: la pensée part d'un problème, pose des hypothèses, opère des rectifications, des transferts, des généralisations, des ruptures, etc., pour construire peu à peu des concepts, et, à travers cette construction des concepts, pour édifier ses propres structures intellectuelles.*

- Construction de compétences au travers de situations: savoir inerte? Prenzel[2] (p. 23–24) décrit un courant prônant et développant un apprentissage réalisé au travers de situations vraies ancrées dans un contexte social. L'attrait de cette approche tient en ce qu'on imagine que la construction du savoir au travers d'une situation développe des compétences qui pourront être transférées dans de nouvelles situations, plus ou moins similaires. Il cite cependant de nombreux auteurs qui ont mis en évidence le fait que le savoir acquis de cette façon en milieu scolaire reste souvent inerte et qu'il n'est pas réinvesti par les sujets dans des situations extra-scolaires, contre tout espoir.
- Apprentissage centré sur la résolution de problèmes? Prenzel (p. 28–29) présente une approche particulière d'apprentissage par résolution de problèmes et rappelle les caractéristiques évoquées par ses défenseurs pour la fonder. Celles-ci sont en tout point compatibles avec les thèses socio-constructivistes. Il rapporte cependant aussi des résultats qui mettent en évidence le fait que l'apprentissage réel et le transfert des connaissances acquises ne se corrèlent pas de manière significative avec la richesse et la diversité des outils mis à disposition pour résoudre les problèmes. Alors que, par contre, la présentation de solutions toutes faites, à titre d'exemple ou d'illustration, provoque sur ces points un effet clairement marqué.

Ces remarques ne sont nullement destinées à condamner l'approche préconisée dans les nouveaux moyens d'enseignement. Elles ne signifient surtout pas qu'il faudrait renoncer à l'apprentissage par la résolution de problèmes et passer plutôt par une série de présentations de solutions toutes faites! Elles montrent seulement que les choses méritent d'être nuancées.

Quatre interprétations à nuancer

- La méthodologie préconisée relèverait du socio-constructivisme. L'accent est volontairement mis sur l'article «du» parce que celui-ci marque l'unicité. Or un congrès s'est tenu à Genève en l'an 2000 sous le titre «Les socio-constructivismes». Il s'agissait de faire le point sur les théories et les multiples courants qui peuvent raisonnablement être rangés sous cette bannière. A lui seul l'article de Prenzel, déjà évoqué plus haut, recense, explique et oppose au moins trois variantes fondamentales de socio-constructivisme, avant d'en développer une multitude de sous-catégories. Il n'y a pas unité. Il semble bien au contraire que toute avancée dans la compréhension des mécanismes de l'apprentissage résulte en un foisonnement de théories partiellement concurrentes. C'est probablement d'ailleurs une caractéristique de la science: toute théorie qui n'est pas idéologie doit porter en elle les mécanismes qui permettent de la mettre en question.
- Cette méthodologie relèverait des derniers développements des théories de l'apprentissage, de la didactique et de la psychologie. Mais il faut savoir que si le(s) socio-constructivisme(s) ont eu le vent en poupe depuis la fin des années 80, les fondements en sont anciens et se trouvent déjà chez Dewey (1916[3]), Piaget (1954), Bruner (1966) et Wygotski (1974) pour ne citer que ceux qui sont restés les plus connus. La méthodologie proposée est donc avant tout actuelle parce qu'elle est proposée

2 Prenzel, M. et al: Computereinsatz im naturwissenschaftlichen Unterricht – Ein Überblick über die pädagogisch-psychologischen Grundlagen und ihre Anwendung, à paraître.
3 les années sont liées à des publications caractéristiques qui revêtent un caractère fondateur

aujourd'hui. Et non parce que les théories sur lesquelles elle se fonde datent tout juste d'hier. Le savoir théorique le plus actuel est sûrement plus développé et, probablement, moins convergent.

- Cette méthodologie serait la concrétisation du socio-constructivisme. Au risque de décevoir, il faut insister sur le fait que la théorie didactique n'est jamais conçue pour s'appliquer directement dans la pratique. Elle est là pour comprendre la pratique, pour tenter de l'expliquer, éventuellement pour la modéliser. Mais pas pour fonder une pratique d'une manière univoque. Même si elle influe bien entendu sur les pratiques. Du moins est-ce à espérer. L'interprétation pratique qu'on peut vouloir faire des théories n'est pas nécessairement unique. On pratique d'ailleurs de manière assez différente dans d'autres régions du pays ou dans d'autres pays, tout en se fondant sur les mêmes bases théoriques qu'ici. On peut s'en rendre compte en étudiant les propositions développées en Suisse alémanique par Wieland ou en Allemagne par Wittmann. Le fait que les travaux de Piaget aient été une des justifications du discours sur les mathématiques modernes en est une autre illustration. Les mêmes théories de base, les mêmes textes fondamentaux peuvent être invoqués par des courants très différents et, surtout, il y a parfois loin, du discours à sa réalisation!
- L'introduction de cette méthodologie constituerait une rupture et remplacerait les paradigmes antérieurs. Dans un travail portant sur la mise en œuvre des nouveaux moyens 1P/2P, Kupfer[4] met en évidence une répartition assez uniforme entre les enseignantes adoptant une attitude de conformité, celles appliquant la nouvelle méthode de manière pragmatique, celles en faisant une application libre et celles qui en font une application pour le moins distancée. Pourquoi en irait-il autrement au degré secondaire? En outre, cette catégorisation porte sur ce qui est observable de l'extérieur, sur la façon formelle d'appliquer la méthode et sur les intentions annoncées

[4] Kupfer, C., avec la collaboration de C. Tièche Christinat: Nouvel enseignement des mathématiques. Analyse des entretiens conduits auprès des enseignantes 1P/2P, IRDP, 2000.

100 Jahre VSMP
Wir gratulieren!

Adelmeyer Call & Put · **Biner/Frei/Grentz/Stahel/Vogelsanger/Zimmermann** Fundamentum - Mathematik und Physik **Biner/Friedli/Friedrich/Geering/Hofer/Rychener/Steiner/Storrer/Walser** Analysis · **Binz/Friedli** Vektorgeometrie · **Binz/Friedli/Friedrich/Gebauer/Geering/Thöni** Geometrie · **Binz/Friedrich/Gebauer/Höhn/Ineichen/Kappus/Marzetta/Schilt/Schnyder/Thöni** Formeln und Tafeln · **Blumer** Mathematik · **Buchner** Algebra 4 · **Dändliker/Schläpfer** Darstellende Geometrie · **Deller/Gebauer/Zinn** Algebra 1/2 · **Deller/Gebauer/Zinn** Algebra 1 · **Deller/Gebauer/Zinn** Algebra 2 Aufgaben · **Deller/Gebauer/Zinn** Algebra 3 Aufgaben und Ergebnisse · **Gonseth** Elementare und nichteuklidische Geometrie · **Grimm/Ruf** Analytische Geometrie Leitfaden · **Hohler** Inzidenzgeometrie · **Höhn/Brunner/Gebauer/Zinn** Algebra 1 · **Höhn/Deller/Gebauer/Zinn** Algebra 2 · **Ineichen** Wahrscheinlichkeitsrechnung · **Ineichen** Elementare Beispiele zum Testen statistischer Hypothesen · **Jeger/Ineichen** Kombinatorik, Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung · **Läuchli/Müller** Physik - Aufgaben · **Läuchli/Müller** Physik - Lösungen **Lehmann/Bieri** Algebra Sek. I · **Leutenegger/Surbeck** Trigonometrie · **Mettler/Vaterlaus** Stereometrie - Aufgabensammlung · **Moser/Gonseth** Planimetrie für Sek. I · **Preisig/Regli** Analytische Geometrie Aufgaben · **Roth** Astronomie · **Stähli/Lehmann** Algebra 1 · **Stähli/Meyer** Algebra 2 · **Stohler** Algebra 3 · **Thöny/Weiss** Planimetrie 1 · **Thöny/Weiss** Planimetrie 2 · **Voellmy** Mathematische Formeln und Tafeln · **Voellmy/Mautz** Leitfaden der Algebra· **VSMP** Quadratzahlen
Adelmeyer Call & Put · **Biner/Frei/Grentz/Stahel/Vogelsanger/Zimmermann** Fundamentum - Mathematik und Physik **Biner/Friedli/Friedrich/Geering/Hofer/Rychener/Steiner/Storrer/Walser** Analysis · **Binz/Friedli** Vektorgeometrie · **Binz/Friedli/Friedrich/Gebauer/Geering/Thöni** Geometrie · **Binz/Friedrich/Gebauer/Höhn/Ineichen/Kappus/Marzetta/Schilt/Schnyder/Thöni** Formeln und Tafeln · **Blumer** Mathematik · **Buchner** Algebra 4 · **Dändliker/Schläpfer** Darstellende Geometrie · **Deller/Gebauer/Zinn** Algebra 1/2 · **Deller/Gebauer/Zinn** Algebra 1 · **Deller/Gebauer/Zinn** Algebra 2 Aufgaben · **Deller/Gebauer/Zinn** Algebra 3 Aufgaben und Ergebnisse · **Gonseth** Elementare und nichteuklidische Geometrie · **Grimm/Ruf** Analytische Geometrie Leitfaden · **Hohler** Inzidenzgeometrie · **Höhn/Brunner/Gebauer/Zinn** Algebra 1 · **Höhn/Deller/Gebauer/Zinn** Algebra 2 · **Ineichen** Wahrscheinlichkeitsrechnung · **Ineichen** Elementare Beispiele zum Testen statistischer Hypothesen · **Jeger/Ineichen** Kombinatorik, Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung · **Läuchli/Müller** Physik - Aufgaben · **Läuchli/Müller** Physik - Lösungen **Lehmann/Bieri** Algebra Sek. I · **Leutenegger/Surbeck** Trigonometrie · **Mettler/Vaterlaus** Stereometrie - Aufgabensammlung · **Moser/Gonseth** Planimetrie für Sek. I · **Preisig/Regli** Analytische Geometrie Aufgaben · **Roth** Astronomie · **Stähli/Lehmann** Algebra 1 · **Stähli/Meyer** Algebra 2 · **Stohler** Algebra 3 · **Thöny/Weiss** Planimetrie 1 · **Thöny/Weiss** Planimetrie 2 · **Voellmy** Mathematische Formeln und Tafeln · **Voellmy/Mautz** Leitfaden der Algebra· **VSMP** Quadratzahlen
orell füssli Verlag · Mathematik

Dietzingerstrasse 3, Postfach, 8036 Zürich, Telefon 01 / 466 74 44, Telefax 01 / 466 74 12, E-Mail SBartholdi@ofv.ch

face à cette application. Mais le fait qu'elle soit appliquée fondamentalement, et pas seulement en apparence, dépend étroitement de la représentation que se fait l'enseignant de sa discipline et de la façon de l'enseigner. Ces représentations, issues du parcours personnel de chacun, s'avèrent très individuelles. Souvent implicites, elles n'évoluent généralement que lentement. Lors d'une récente défense de travail de diplôme, à l'Université de Berne, un candidat s'étonnait de la co-existence de représentations très diverses observées chez la plupart des personnes qu'il avait interviewées. Ce qui lui paraissait contradictoire, voire incohérent, constitue probablement plutôt une marque propre au professionnel qui sait tirer parti d'influences et d'apports variés pour développer une approche adaptée aux circonstances. Quoi qu'il en soit, ce travail montrait la persistance de courants divergents, remontant parfois à des racines lointaines, au sein même des individus. Les nouveaux moyens d'enseignement doivent compter avec cela. Outre que ce serait insultant pour ce qui se fait aujourd'hui et que cela reviendrait à nier la valeur de l'expérience et des savoir-faire actuels, il serait illusoire d'imaginer que ce qui se fera demain ne comportera plus rien de ce qui se fait aujourd'hui et que ce qui se fait aujourd'hui ne comporte rien de ce qui se faisait hier!

Au-delà des critiques, des raisons d'y croire

Passées ces critiques, il n'en reste pas moins que les moyens d'enseignement qui nous arrivent sont porteurs de grands espoirs et de qualités bien réelles.

D'abord, ils comportent une richesse mathématique profonde et susceptible de stimuler la pensée de tous les élèves, indépendamment des capacités et des niveaux de connaissance individuels. Ensuite, les diverses représentations des enseignants sur les mathématiques, leur enseignement, les formes et les méthodes qui conviennent pour telle notion, tel domaine ou telle phase de l'apprentissage peuvent y trouver un terrain d'application. Ils ne sont pas unilatéraux et n'imposent nullement une démarche particulière à suivre en classe, même si les commentaires méthodologiques qu'on y trouve privilégient ouvertement une approche spécifique. Le pari, c'est que celle-ci s'affirmera dans les faits comme une de celles permettant le mieux, en général et pour la plupart des contenus et des objectifs poursuivis, l'apprentissage des mathématiques ainsi que le développement du savoir et de la personnalité des élèves. Pas question cependant de se saisir de la méthodologie proposée comme d'une panacée contre la difficulté des mathématiques et l'échec scolaire. Ce type d'attitude a montré ses effets avec les mathématiques modernes. La réforme ne peut pas réussir simplement par l'affirmation de la supériorité des méthodes préconisées et leur application formelle. Elle ne peut réussir que si ses principes sont compris, si les divers principes sur lesquels se basent les pratiques d'aujourd'hui sont explicités, si la façon dont ils peuvent co-exister est clarifiée et si chacun conserve la liberté de choisir ceux à appliquer, de cas en cas. Cela nécessite une mise en œuvre basée sur une formation continue intégrant l'expérience des enseignants et développant une culture de la réflexion sur le quoi, le pourquoi et le comment des actions en classe. Une culture de la réflexion menée a priori sur les actions qu'on prépare, de l'observation de l'action durant son déroulement et de la réflexion portée a posteriori, en confrontant action préparée et action observée.

C'est là que servent les théories didactiques, dans la pratique!

Ecole Polytechnique Fédérale Lausanne

Journées de visite pour gymnasiennes et gymnasiens à l'EPFL
Besuchstage für Maturandinnen und Maturanden an der ETH Lausanne

14–15 mars 2002 *ou* **21–22 mars 2002**

Le jeudi est consacré à la présentation des études offertes à l'EPFL et des perspectives professionnelles dans le cadre de séances d'information et d'un forum. Le lendemain les élèves peuvent participer à ***un stage*** *sous forme de travaux pratiques en laboratoire ou sur le terrain, à des cours ou encore à des visites d'entreprises.*
Sont invités tous les élèves se présentant aux examens de maturité en 2002 et 2003.

Les inscriptions se font par les secrétariats des gymnases et le délai d'inscription est fixé au 8 février 2002.
Pour plus de détails, consultez
http://infosgymnases.epfl.ch
Le Service d'orientation et conseil de l'EPFL est également à votre disposition
maria.enz@epfl.ch, tél. 021 693 22 83 ou fax 021 693 60 80

Kristine Barro-Bergflödt

Mathematik in der Musik – Thema mit Variationen

Die Autorin nimmt uns mit auf einen Streifzug durch die Kulturgeschichte und zeichnet die geheimnisvolle Verbindung von Mathematik und Musik von Pythagoras bis ins 20. Jahrhundert nach.

L'auteure nous fait découvrir l'histoire de l'art, en nous révélant les rapports secrets de la musique et des mathématiques, de l'époque de Pythagore au 20e siècle.

Mathematik und Musik, zwei Welten, die bei aller Verschiedenheit eine tiefe innere Verbindung zu haben scheinen. Die gemeinsame Geschichte beginnt im Abendland mit der pythagoräisch-platonischen Musikauffassung: Mathematik und Musik gelten im Grunde als Ausprägungen und Manifestationen der Weltordnung, des Kosmos oder – poetischer – der Weltseele. Diese Vorstellung strahlt aus bis weit ins Mittelalter. Mit dem Beginn der Neuzeit im 17. Jahrhundert bahnt sich eine Trennung der beiden Disziplinen an. Doch im 20. Jahrhundert bekommt die Ansicht Leibniz', Musik sei ein unbewusstes Zählen der Seele, eine erstaunliche neue Realität, denn viele Komponisten bedienen sich abermals mathematischer Strukturen.

Über die mannigfache Beziehung zwischen Mathematik und Musik ist von Philosophen, Komponisten, Musiktheoretikern und Mathematikern viel geschrieben worden. Und dennoch bleibt sie geheimnisvoll. Dieser Beitrag nimmt den Leser mit auf einen kleinen Streifzug durch die Kulturgeschichte und beleuchtet anhand einiger historischer Abschnitte und Episoden das vielfältige Zusammenspiel von Mathematik und Musik.

Alles ist Zahl

Dass zwischen Tönen und Zahlen eine Analogie besteht: Diese Entdeckung wird heute den Pythagoräern im antiken Griechenland zugeschrieben. Vor rund 2500 Jahren experimentierten sie mit dem Monochord, einem einfachen, einsaitig bespannten Hohlkörper. Sie stellten fest, dass das menschliche Ohr den Zusammenklang zweier Töne als angenehm, schön und rein empfindet bei Saitenlängen mit besonders einfachen Zahlenverhältnissen, wie etwa bei der Oktave 2:1, der Quinte 3:2 oder der Quarte 4:3. Für die Pythagoräer war dieser Zusammenhang von Klang und Zahl überwältigend. Sie gelangten zur Auffassung, dass sich in den Proportionen der musikalischen Klänge die göttliche Ordnung zeige. Und sie nahmen an, berichtet Aristoteles, *die Elemente der Zahlen seien die Elemente aller Dinge, und der ganze Himmel sei Harmonie und Zahl*. Die Zahlen erhielten in der pythagoräischen Lehre eine magische Bedeutung. Zahlengruppen wie 4 3 2 1 oder 12 9 8 6 bildeten eine heilige *Tetraktys*, denn sie brachten die musikalischen und damit auch die kosmischen Harmonien zum Ausdruck.

Platon (427–347 v. Chr.) baute die pythagoräische Lehre der Verbindung von Harmonie und Kosmos weiter aus. Sie blieb über Jahrhunderte hinweg lebendig, auch wenn ihr Aristoteles und sein Schüler, der Musiktheoretiker Aristoxenos, eine diesseitigere, stärker dem Subjektiven und Ästhetischen verpflichtete Sicht entgegenstellten.

Durch die Schriften von Boethius, um 510 Konsul von Rom, wird das pythagoräische Gedankengut ins Mittelalter getragen. Wie in der Antike gehören auch im Mittelalter Musik, Arithmetik, Geometrie und Astronomie zusammen. Diese Disziplinen bilden das so genannte *Quadrivium* innerhalb der *artes liberales*, der sieben freien Künste im Bildungskanon des Mittelalters. (Das *Trivium* umfasst Grammatik, Dialektik und Rhetorik.) Die führenden Musiktheoretiker sind wie Boethius meist auch Mathematiker. Die göttliche Ordnung, die sich noch immer in den harmonischen Proportionen manifestiert, soll in der Kunst sichtbar werden. In Musikstücken stehen daher die Längen einzelner Abschnitte oft in Verhältnissen, die aus der pythagoräischen Tetraktys hervorgehen. Vor allem im 13. sowie im 15./16. Jahrhundert entwickelt sich eine polyphone Musik mit komplexen Beziehungsgeflechten, die auf einer rechnerischen Grundlage basieren. Zudem ist die Notierungsweise so kompliziert, dass sie geradezu mathematische Kenntnisse erfordert.

Wie schon Vitruv in der Antike, fordert die mittelalterliche Architekturtheorie, dass auch der Baumeister sich die Kenntnis musikalischer Proportionen aneigne, um sie in seinen Werken zu verwenden.

Der Dom von Florenz

Einen besonderen Ausdruck fand die Verbindung von Architektur und Musik im Florentiner Dom. Für die Weihe am 25. März 1436 komponierte Guillaume Dufay (1400–1474) die Festmotette *Nuper rosarum flores*. Sie gilt als ein Musterbeispiel zahlenorientierten Komponierens. Eine ganze Reihe von speziellen Zahlenverhältnissen, auch biblischen Ursprungs, sind in der Motette zu finden. Der Dom wurde nach dem Vorbild des Salomonischen Tempels in den biblisch überlieferten Proportionen 6:4:2:3 (Langhaus : Querschiff : Apsis : Höhe) gebaut. Dieselben Proportionen finden sich in Dufays Musik.

Des Weiteren lassen sich in der Motette Verhältnisse ausmachen, die auf den Zahlen

2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

beruhen. Jede Zahl ist die Summe der beiden vorangehenden Zahlen. Die Folge lässt sich nach diesem Gesetz fortsetzen: 89 + 144 = 233 usw. Man nennt diese Zahlen die Fibonacci-Zahlen, benannt nach dem Mathematiker Fibonacci (ca. 1170–1250), der sie in seinem *Liber abaci* ausführlich behandelte. Sie wurden in der Architektur und in der Musik des Öfteren verwendet, denn zwei aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen stehen angenähert im Verhältnis des Goldenen Schnitts, der schon in der Antike bedeutungsvoll war und in der griechischen Architektur eine grosse Rolle gespielt hatte.

(Eine Strecke ist im Goldenen Schnitt geteilt, wenn sich der kleinere Abschnitt zum grösseren verhält wie der grössere Abschnitt zur ganzen Strecke. Dieses Verhältnis lässt sich berechnen und beträgt

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618034$$

Die Verhältnisse benachbarter Fibonacci-Zahlen sind zum Beispiel
5:8 = 0.6, 8:13 ≈ 0.615385, 55:89 ≈ 0.617978, 89:144 ≈ 0.618056, 144:233 ≈ 0.618025)

Mit der Verwendung der Fibonacci-Zahlen nun verweist Dufay auf die Ausmasse der Domkuppel. Sie betragen – es ist schriftlich überliefert – 144, 89 und 55 florentinische Bracci.

Gradus suavitatis

Im 17. Jahrhundert wird das metaphysische Harmoniekonzept von der Naturwissenschaft einerseits und von einem neuen ästhetischen Bewusstsein andererseits abgelöst. *Der Zweck des Tones ist letzten Endes, zu erfreuen und in uns verschiedene Gemütsbewegungen hervorzurufen*, schreibt René Descartes (*Compendium musicae*, 1618). Bei der Untersuchung von Tönen wird empirisch vorgegangen und der Begriff der Schwingung tritt in den Vordergrund. Der Pariser Mönch Marin Mersenne (1588–1648) entdeckt in seinen vielen Versuchen mit Saiten die Obertöne. Er gibt auch eine Berechnung für die temperierte Stimmung an, die dem neuen ästhetischen Empfinden besser Rechnung trägt. Damit verliert die mathematisch-kosmische Musikvorstellung ihre Grundlage. Musik und Mathematik beginnen eigene Wege zu gehen. Das Quadrivium löst sich auf.

Gleichwohl, ein grosser Mathematiker des 18. Jahrhunderts lässt es sich nicht nehmen, in den Auseinandersetzungen um ein neues Musikverständnis ein Wort mitzureden. Leonhard Euler (1707–1783), aus Basel stammend und tätig in Petersburg und Berlin, fragt nach den objektiven Bedingungen für die Schönheit von Intervallen, Akkorden und Akkordfolgen sowie des Rhythmus und schliesslich eines ganzen Musikstücks. Euler konstruiert mit Hilfe von Primzahlen eine zahlentheoretische Funktion, die es gestattet, zunächst Intervallen einen *gradus suavitatis*, einen Grad der «Annehmlichkeit», zuzuordnen. Er erweitert dann diese Funktion, so dass sie schliesslich auch erlaubt, den Annehmlichkeitsgrad eines ganzen Musikstücks anzugeben. Er ist sich bewusst, dass sein *gradus suavitatis* die wirkliche Wahrnehmung nur ungenügend beschreibt, und ergänzt seine Überlegungen um eine Theorie des «Zurechthörens»: Komplizierte akustische Ereignisse werden oft durch einfachere Vorstellungen ersetzt – eine Sicht, die wir heute noch teilen.

Aus seinen Berechnungen mit dem *gradus suavitatis* zieht Euler einen bemerkenswerten Schluss. Seiner Meinung nach gäbe es viel mehr Möglichkeiten, gute, «annehmliche» Musik zu schreiben – auch ausserhalb der gängigen Tonsysteme – , als die zeitgenössischen Komponisten es wahrhaben wollten. Wie weit er damit in die Zukunft gesehen hatte, ahnte Euler wohl selber nicht.

Die Kunst der Fuge

Gestern Bachs «Kunst der Fuge». Herrlich!! Ein Werk, das bisher für Mathematik gehalten wurde, von einem jungen Deutschen instrumentiert: tiefste Musik!!, schrieb der Komponist Alban Berg am 26. März 1928 an seine Gattin. Am Abend zuvor hatte er im Zürcher Fraumünster die «Kunst der Fuge» in einer Orchesterfassung des Mathematikers und Bachforschers Wolfgang Graeser gehört.

Die «Kunst der Fuge» ist das letzte Werk Johann Sebastian Bachs (1685–1750), ein kunstvoller Reigen von 20 Fugen und Kanons, gewoben aus einem einzigen unscheinbaren Thema. Die Möglichkeiten des Kontrapunkts, der Technik polyphoner Komposition, werden verdichtet und ausgeschöpft wie in keinem anderen Werk. Und doch fand die «Kunst der Fuge» im 19. Jahrhundert keine grosse Anhängerschaft. Der Bachforscher W. Kolneder bemerkt, dass damals *die Zeit für das Hören der harmonischen Kühnheiten Bachs noch nicht reif war.* Dies zeigt etwa das Urteil des Bachkenners C.v.Bruyck von 1861: Obwohl sich in dem Werk auch schöne, beseelte Partien fänden, sei nicht zu leugnen, *dass Bach ... der Herrschaft des rein Abstrakten und Formellen verfiel, so dass wir in den letzten Fugen und insbesondere den Kanons, endlich Musik erhalten, die in Wahrheit keine Musik mehr ist, sondern ... zu einer Art kontrapunktischer Katzenmusik ausartet.*

Da Bach nichts über die Instrumentierung schrieb, wurde sogar bezweifelt, dass er bei dem Stück überhaupt an eine Aufführung gedacht hatte. Eine Musik nur für die Augen – so die verbreitete Meinung.

Es war ein junger Mathematiker, Wolfgang Graeser (1906–1928), der es unternahm, die «Kunst der Fuge» einer neuartigen Analyse zu unterziehen. Seine Schau war massgeblich von neuen Entwicklungen der Mathematik, insbesondere der Gruppentheorie, beeinflusst. (Eine Gruppe ist eine Menge, in der zwei Elemente miteinander verknüpft werden können, so dass das Ergebnis dieser Verknüpfung wieder ein Gruppenelement ist.)

Ergriffen von seiner neuen Einsicht in das Werk, schrieb Graeser 1924/25 eine Fassung für Orchester mit dem Ziel, der «Kunst der Fuge» den gebührenden Platz in der musikalischen Welt zu sichern. Nachdem sich Projekte einer Aufführung mehrmals im letzten Moment zerschlagen hatten, kam es 1927 endlich zu einem ersten Konzert in Leipzig. Die Aufführung wurde stark beachtet, und die Spannweite der Kritik ging von enthusiastischem Lob bis zu völliger Ablehnung. Heute hat die «Kunst der Fuge» ihren festen Platz im Repertoire der musikalischen Darbietungen und wird gewöhnlich im Streichquartett oder auf dem Klavier gespielt. Graeser hatte sein Ziel erreicht. Doch hinter ihm lag ein zäher Kampf mit den Traditionalisten einer *festgefahrenen Musikwissenschaft* (Kolneder). Ein Kampf, der zu viel war für den in seiner Genialität so fragilen und noch ungefestigten Graeser. Zweiundzwanzigjährig machte er im Juni 1928 seinem Leben nach einem Nervenzusammenbruch ein Ende.

Graeser konnte seine Ideen einer neuen Musiktheorie nicht mehr ausarbeiten. Doch sein Vorschlag, gruppentheoretische Methoden für das Verstehen von Musik miteinzubeziehen, erfährt seit den sechziger Jahren eine eindrückliche Realisierung und Erweiterung. Unter anderen versucht der Komponist und prominente Vertreter der mathematischen Musiktheorie Guerino Mazzola von der Universität Zürich Musikstücke mit modernsten algebraischen und geometrischen Methoden zu analysieren. Dabei soll völlige Objektivität erreicht werden, ein Ziel, das schon Euler mit dem *gradus suavitatis* vor Augen hatte.

Musik als Organismus

Die Wende im 20. Jahrhundert war ein Wendepunkt in der Geschichte der modernen Musik. Vielen begann die Masslosigkeit der Romantik unerträglich zu werden, und es gab Komponisten, die das Gefühl hatten, unser Weg führe ins Uferlose, es sei denn, wir brächen mit dem 19. Jahrhundert. Unschätzbare Hilfe kam diesem Wandel, dieser Verjüngung, von einer Art Bauernmusik, die bislang unbekannt war. So beginnt ein Artikel aus dem Jahr 1921 des ungarischen Komponisten Béla Bartók (1881–1945). Bartók sammelte und analysierte mehr als 6000 Volkslieder aus dem osteuropäischen und nordafrikanischen Raum. Er entdeckte dabei eine bisher unbekannte musikalische Welt, die ihn völlig in ihren Bann zog. *Volksmusik ist eine Naturerscheinung ... Ihre Formen haben sich mit derselben organischen Freiheit entfaltet, wie es andere lebende Organismen tun: die Blumen, Tiere ...* Bartók empfand eine ausgesprochene Liebe zur Natur. Die Bauernmusik, die in ihm so viel zum Schwingen brachte, führte Bartók schliesslich zu einer ganz neuartigen, sehr persönlichen Tonsprache.

Wer irgendein Musikstück Bartóks spielt, kann bald eine grosse innere Logik, einen unerhört organischen Aufbau bemerken. Der Forscher Ernö Lendevai unterzog viele seiner Werke einer genauen Analyse. In seinem Buch *Béla Bartók: An Analysis of his Music* (1971) hat Lendevai erstaunliche Ergebnisse dargelegt. Nachstehend einige Beispiele: Im ersten Satz der *Sonate für zwei Klaviere und Schlagzeug*, stellt Lendevai fest, *steigt jeder neue Themeneinsatz eine Sprosse höher auf der Leiter der Fibonacci-Reihe.* In der Tat haben die angesprochenen Themen einen Ambitus (das ist die Spanne vom tiefsten bis zum höchsten Ton) von zunächst 8, dann 13 und schliesslich 21 Halbtonschritten. – Die gesamte Sonate dauert genau 6432 Achtelnoten lang. Der zweite, langsame Satz beginnt nach 3975 Achtelnoten. Da $6432 \cdot 0.618 = 3974.9$ ist, entspricht diese Einteilung genau dem Goldenen Schnitt. – Das Fugenthema in der *Musik für Saiteninstrumente, Schlagzeug und Celesta* hat 89 Takte, die durch den Höhepunkt in 55 + 34 Takte unterteilt sind. Diese Abschnitte weisen wiederum eine Gliederung in 34 + 21 respektive 13 + 21 Takte auf; bei den letzten 21 Takten ist nochmals eine Gliederung in 13 + 8 festzustellen.

Lendevais Analysen legen nahe, dass Bartók Fibonacci-Zahlen im Kleinen wie im Grossen und horizontal wie vertikal verwendete. Bartók hat aber, wie die meisten Komponisten, seine Ideen nicht verraten. Bekannt ist nur, dass er im täglichen Leben mit Zahlen auffallend genau war, und bekannt ist auch ... seine Naturliebe. Genau diese benützt Lendevai zur Stützung seiner These, Bartók habe in seine Musik bewusst oder unbewusst die Fibonacci-Zahlen und den Goldenen Schnitt eingeflochten. In der Natur findet man nämlich ebenfalls Fibonacci-Zahlen, zum Beispiel in der Sonnenblume. Im Kopf einer Sonnenblume sind zwei Scharen gegenläufiger Spiralen sichtbar. In der einen Schar sind es 89, in der anderen 55 Linien oder, je nach der Art, auch 34 und 55. Natürlich waren Sonnenblumen Bartóks Lieblingsblumen.

Ähnliche, nicht ganz so weit gehende Beobachtungen hat übrigens Roy Howat an Werken von Claude Debussy angestellt und sie in seinem Buch *Debussy in Proportion* (1983) dargelegt.

Ordre et Désordre

Die Loslösung der Musik von der Mathematik in der Neuzeit war offenbar nur vorübergehend. Bartók und Debussy blieben im 20. Jahrhundert keine Einzelfälle. Im Gegenteil. Jahrhundertelang gewachsene Bausteine der Musik lösten sich auf und es musste grundsätzlich Neues entstehen. Wieder beginnt mathematische Berechnung in der Musik eine grosse Rolle zu spielen. *Warum so oft diese Analogie zur mathematischen Methode, werde ich gefragt. Ich habe zwischen Musik und Mathematik nie direkte Beziehungen, wohl aber einfache Vergleichsbeziehungen hergestellt; weil*

Kristine Barro-Bergflödt ist Mathematik- und Klavierlehrerin. Sie unterrichtet an den Zürcher Kantonsschulen Freudenberg und Stadelhofen und ist wissenschaftliche Mitarbeiterin an der ETH Zürich.

die Mathematik die Wissenschaft ist, die zur Zeit die am weitesten entwickelte Methodologie besitzt, war mir daran gelegen, sie zum Vorbild zu nehmen, das uns helfen kann, unsere gegenwärtigen Schwachstellen zu beheben, heisst es 1960 in einem Text von Pierre Boulez (*1925) zur Methodologie der Komposition.

Anders als im Mittelalter gehen die Komponisten nun aber sehr individuelle Wege, und jeder Komponist bestimmt selber, welche Funktion der Mathematik in seinem Schaffen zukommt. Auch ist es jetzt eine ganz andere Mathematik, die zur Verfügung steht – und sie wird vielfältig genutzt. Nicht wenige Komponisten besitzen eine mathematische Ausbildung. Herausragende Beispiele sind Pierre Boulez und der Grieche Iannis Xenakis.

Xenakis (1922–2001) verwendet in seinen Kompositionen Konzepte aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der Gruppentheorie, der Mengenlehre und einigen weiteren Gebieten. Er gehört auch zu denjenigen Künstlern des 20. Jahrhunderts, die an die Tradition der Antike und des Mittelalters anknüpfend eine neue Verbindung von Architektur und Musik suchen. So schuf er als Mitarbeiter von Le Corbusier den Philips-Pavillon der Brüsseler Weltausstellung (1958) in Anlehnung an ein Musikstück. Musik und Architektur sind in der Musikphilosophie von Xenakis symbolische Manifestationen einer zugrunde liegenden mathematischen Ordnung. Er nennt seine Musik denn auch eine *musique symbolique*.

Einen anderen Weg wählt György Ligeti (*1923), wie Bartók ein ungarischer Komponist: *Weitere Einflüsse, die mich bereicherten, kommen aus der Geometrie (die Musterdeformationen aus der Topologie und selbstähnliche Gebilde aus der fraktalen Geometrie), wobei ich Benoît Mandelbrot und Heinz-Otto Peitgen wesentliche Anregungen verdanke.* In den achtziger Jahren lernte Ligeti die moderne Chaostheorie sowie die fraktale Geometrie kennen und verwendete Konzepte dieser Mathematik in seinem Klavierkonzert (1985-88) und in den Klavieretüden (1985), insbesondere der ersten Etüde *Désordre*. Ligeti: *Ich arbeite aber stets empirisch, nicht-mathematisch, nicht-wissenschaftlich, eher handwerksmässig, aber in unbewusster Annäherung an geometrische Denkweisen. Bewusst wurde mir die «in der Luft liegende» Parallelität zwischen den mathematischen Forschungen seit den sechziger Jahren und meinen gleichzeitigen kompositorischen Bestrebungen erst 1984, als ich die ersten Computerdarstellungen der Juliamengen und der Mandelbrot-Menge sah.* Hier wird die Mathematik fruchtbar gemacht für kompositorische Kreativität, und sie verhilft komplexen Ideen zu hörbarer Gestalt in der Musik ... *Désordre* ist ein Stück von ausserordentlicher Schönheit.

Convention de Collaboration

entre le SER (Syndicat des enseignants romands) et la SSPES

Plusieurs rencontres ont eu lieu entre une délégation des membres du comité central de la SER et de la SSPES pour aboutir en septembre dernier à une convention de collaboration entre les deux associations. Cette convention comblera une lacune d'information mutuelle et de structure d'échange (notamment pour les consultations, les déclarations et prise de position) au niveau des enseignants romands.

Le texte de la convention sera soumis aux deux comités centraux et aux autres instances statutaires.

Nachrichten des VSG / Nouvelles de la SSPES

Delegierten- und Plenarversammlung 2001

Zentralvorstand

Martin Rüegg (BL) tritt auf Ende des Vereinsjahr 2000/2001 aus dem Zentralvorstand zurück. Sein grosser Einsatz für den VSG wurde anlässlich der Delegiertenversammlung 2001 in Luzern gewürdigt. Neu nimmt Hans Peter Dreyer (SG) in den Vorstand Einsitz. Er wurde von den Delegierten einstimmig gewählt. Hans Peter Dreyer übernimmt den Vorsitz einer Gruppe, die sich mit dem Projekt einer Studienwoche im Jahre 2005 auseinandersetzt. Der Zentralvorstand hofft darauf, dass sich weitere Kolleginnen und Kollegen bereit erklären zu einer Mitarbeit im Vorstand. Michel Aubert führt aus, dass sich der ZV im laufenden Vereinsjahr schwerpunktmässig mit folgenden Themen auseinandersetzt: Strukturen, Verbandspolitik, Studienwoche, Bologna-Erklärung, Dauer der gymnasialen Bildung.

In verschiedenen Sitzungen im letzten Jahr haben sich die ZV-Mitglieder mit Delegationen der kantonalen Vereine aus den Kantonen Basellandschaft, Tessin, Graubünden, Wallis und Bern, aber auch mit Vertretern der EDK und des Parlamentes getroffen. Die Diskussionen drehten sich um die gymnasiale Bildung in den angesprochenen Kantonen, um das VSG-Leitbild, um das VSG-Positionspapier, um Fragen rund um die Weiterbildung von Gymnasiallehrern, aber auch um die Entwicklung auf der Ebene der Hochschulen, ausgelöst von der Erklärung von Bologna. Alle Parteien haben die Gespräche als wertvoll empfunden.

Delegiertenversammlung 2001 in Luzern

Die VSG-Delegiertenversammlung, die gut besucht war, fand am Donnerstag, den 8. November 2001, in Luzern statt. An dieser Stelle sei der Direktion der Kantonsschule Alpenquai, die uns für diesen Anlass die Aula zur Verfügung stellte, nochmals gedankt. Zudem konnten diverse Fachverbände ihre Jahresversammlung in den Räumlichkeiten der Kantonsschule Alpenquai durchführen. Zur Sprache kam unter anderem an dieser DV die Rechnung, die mit einem kleinen Defizit abschliesst. Zurückzuführen ist dies auf die geringeren Einnahmen aus Mitgliederbeiträgen. Der ZV/VSG sucht intensiv Wege und Mittel, um vermehrt an jüngere Kolleginnen und Kollegen zu appellieren, in den VSG einzutreten. In diesem Zusammenhang votierten die Delegierten dafür, den Mitgliederbeitrag für das Vereinsjahr 2002/2003 um Fr. 10.– zu erhöhen.

Die auf Antrag der DV 2000 vom ZV durchgeführte MAR-Umfrage wurde von etwa 7% der SSPES-Mitglieder beantwortet. Die detaillierte Auswertung erscheint im GH 2/02. Die Delegierten beschlossen, eine neue Umfrage in etwa 2 Jahren zu machen.

Urs Tschopp informierte ebenfalls über eine Umfrage der Universität von Zürich, die im Auftrag der Konferenz Schweizerischer Gymnasialrektoren gemacht wird. Sie befragt Studenten im 3. Semester, die die Matura nach dem MAV gemacht haben. Aufgrund ihrer Erfahrungen lassen sich Unterschiede zwischen MAV und MAR festhalten. Die AGYM hat ein Konzept verabschiedet zur Evaluation dreier Felder: Laufbahn und Erfolg, Bewertung der allgemeinen Bildungsziele mit Schwerpunkt auf dem selbstständigen Lernen und der Interdisziplinarität, organisatorische Bewältigung der Reform. Dazu kommt eine summative Evaluation. Diese Evaluation soll bestehende ergänzen und Standards zur gymnasialen Bildung formulieren helfen.

Anita von Arx präsentierte das bildungspolitische Papier des Zentralvorstandes, das in bildungspolitischen Kreisen verbreitet werden soll. Eine erste Diskussion mit Vertretern aus der Bildungspoltik verlief positiv. Der ZV erhofft sich Reaktionen aus der Öffentlichkeit. Dieses Papier soll laufend weiter entwickelt werden. Auf Wunsch der Delegierten sollen darin die Ziele explizit genannt werden, die der ZV erreichen will.

Plenarversammlung 2001

Das Thema der Plenarversammlung hiess Interdisziplinarität. Professor em. Alfred Lang, Universität Bern, und Professor Jean-Jacques Aubert, Universität Neuenburg, referierten über dieses Thema. Während der Psychologe Alfred Lang eine Lanze für die Interdisziplinarität auf der Ebene der Hochschulen brach (vgl. Vorschau auf das Referat in GH Nr. 5/01), befasste sich der Altphilologe Jean-Jacques Aubert mit einem konkreten Projekt im Lateinunterricht. Der ZV bedauert die geringe Beteiligung der Mitglieder an der PV. An einem Podiumsgespräch, geleitet von Urs Tschopp, Vizepräsident des VSG, nahmen die beiden Referenten, Frau Regula Kyburz, Professorin für Mittelschulpädagogik, Höheres Lehramt der Universität Zürich, Frau Heitzmann, Fachdidaktikerin für Biologie am Höheren Lehramt der Universität Bern, und Charles de Carlini, Chemiker und Rektor des Collège Rousseau in Genf, teil.

Für das Protokoll: Thomas Peter

Assemblée des délégué(e)s et assemblée plénière 2001

Comité central

Martin Rüegg (BL) a donné sa démission pour la fin de l'exercice 2000/2001. Il a été remercié pour son travail et son engagement lors de l'Assemblée des délégué(e)s de Lucerne, qui a par ailleurs élu à l'unanimité Hans Peter Dreyer nouveau membre du Comité central. Hans Peter Dreyer préside un groupe chargé d'élaborer un projet pour une Semaine d'études en 2005. Le Comité central espère que d'autres collègues s'intéresseront à une participation active. Michel Aubert cite les thèmes qui occuperont le CC dans l'année à venir: structures, politique de la Société, Semaine d'études, Déclaration de Bologne, durée de la formation gymnasiale. A l'occasion de diverses séances, les membres du CC ont, l'an dernier, rencontré des délégations des associations cantonales de Bâle Campagne, du Tessin, des Grisons, du Valais et de Berne, ainsi que des représentants de la CDIP et des parlementaires. Les discussions ont porté sur la formation gymnasiale dans les différents cantons, sur les Objectifs généraux de la Société, sur la Prise de position de la SSPES en matière de politique de l'enseignement gymnasial, sur la question de la formation continue des enseignant(e)s de gymnase, mais également sur les conséquences de la Déclaration de Bologne sur les développements des Ecoles supérieures. Les entretiens ont été appréciés par tous les participants.

Assemblée des délégué(e)s 2001 de Lucerne

L'Assemblée des délégué(e)s de la SSPES a eu lieu le 8 novembre 2001 à Lucerne. Nous profitons de cette occasion pour remercier une fois encore la direction de l'école cantonale Alpenquai, qui a mis son aula à la disposition des nombreux participants. De plus, diverses associations de branche ont pu profiter des salles de l'école cantonale pour tenir leur assemblée annuelle.

Les comptes de la Société montrent un léger déficit, dû à la diminution du nombre de cotisations. Le CC-SSPES recherche activement des moyens de recruter de jeunes collègues. Dans ce contexte, les délégué(e)s ont voté une augmentation de Fr. 10.– pour les cotisations de l'exercice 2002/2003.

Les réponses aux questionnaires RRM, effectué à la demande de l'AD 2000, n'ont pas dépoussées un taux de 7% des membres de la SSPES. Une évaluation paraîtra dans le GH 2/02. Les délégués out décidé de ne pas lancer un autre questionnaire avant 2 ans.

Urs Tschopp a présenté un sondage de l'Université de Zurich, effectué sur mandat de la Conférence des directeurs de gymnases suisses auprès d'étudiant(e)s de 3^{e} semestre titulaires d'une maturité RRM. Leurs expériences mettent en lumière les différences entre l'ordonnance et le règlement de reconnaissance des maturités. L'AGYM a adopté un concept pour l'évaluation de trois domaines: carrière et succès, évaluation des objectifs généraux de formation (l'accent étant mis sur l'apprentissage individuel et l'interdisciplinarité) et la gestion de la réforme au niveau de l'organisation. Une évaluation sommative s'y ajoute, destinée à aider à formuler des normes pour l'enseignement gymnasial et à compléter ce qui a déjà été réalisé.

Anita von Arx a présenté la Prise de position de la SSPES en matière de politique de formation gymnasiale, destinée aux instances intéressées à la politique de l'éducation. Une première discussion avec des représentants de ces dernières a connu des résultats très positifs. Le CC espère des réactions de la part du public. La Prise de position demande à être continuellement développée: en effet, à la demande des délégués les buts que le CC désire atteindre seront à formuler explicitement.

Assemblée plénière 2001

L'Assemblée plénière a été consacrée à l'interdisciplinarité. Les Professeurs Alfred Lang (Université de Berne) et Jean-Jacques Aubert (Université de Neuchâtel) se sont exprimés à ce sujet. Alors que le psychologue A. Lang a plaidé pour l'interdisciplinarité au niveau des Ecoles supérieures (voir à ce sujet la présentation de sa contribution dans le GH 5/01), J.-J. Aubert, philologue, a présenté un projet concret pour l'enseignement du latin. Une table ronde, animée par Urs Tschopp, a réuni les deux conférenciers, Mme Regula Kyburz, professeur de pédagogie pour le degré secondaire II (Höheres Lehramt, Université de Zurich), Mme Heitzmann, professeur de didactique pour la biologie (Höheres Lehramt, Université de Berne) et Charles de Carlini, professeur de chimie et recteur du Collège Rousseau de Genève. Le CC a regretté la participation peu nombreuse des membres de la SSPES.

Procès-verbal: Thomas Peter

Aktuelles aus dem VSG

Delegierten- und Plenarversammlung 2002 zum Thema Bologna

Die Erklärung von Bologna und ihre Folgen für das Gymnasium wird Thema der Plenarversammlung 2002 sein. Sie findet am 7./8. November 2002 in Baden statt.

Studienwoche – grundlegende Veränderungen der Rahmenbedingungen

Der Präsident der Planungsgruppe für die nächste Studienwoche, Hans Peter Dreyer, will bei der Planung grundlegende Veränderungen berücksichtigen, die sich seit der letzten durchgeführten Studienwoche 1993 ergeben haben:

- Dominanz der Wirtschaft über die Politik
- Bedeutung des PC für die Schule
- Englisch als lingua franca
- Schulsystem der Schweiz von der Vor- bis zur Hochschule sehr stark im Wandel (u.a. Bologna)
- höhere Ansprüche von Eltern und Schülern an die Schule.

Es bestehen Ideen für einen Schüler- oder Lehrpersonenenaustausch für die Zeit der Studienwoche, die voraussichtlich im Herbst 2004 oder 2005 in Zürich stattfindet. Die von der Präsidentinnen- und Präsidentenkonferenz 2001 eingesetzte Planungsgruppe wird im Sommer 2002 ihre Vorschläge für eine neue Studienwoche veröffentlichen.

Schulhauskorrespondentinnen und -korrespondenten

Der Zentralvorstand will in Zusammenarbeit mit den Kantonalverbänden und der WBZ ein Netzwerk von Schulhauskorrespondentinnen und -korrespondenten errichten. Kontakte mit Präsidien, Schulleitungen und der Direktion der WBZ sind aufgenommen. Erste Antworten aus den Kantonen sind eingetroffen. Michel Aubert und Urs Tschopp arbeiten ein Mandat aus. Das Netzwerk soll an der Präsidentinnen- und Präsidentenkonferenz im März 2002 vorgestellt werden. Mitglieder, die sich als Korrespondentinnen oder Korrespondenten zur Verfügung stellen möchten, erhalten beim Sekretariat VSG, Tel. 031 311 07 79, nähere Auskünfte.

Passerelle Gymnasium – Universität

Berufsmaturandinnen und -maturanden sollen an die Universitäten und Hochschulen übertreten können. Ein entsprechender Entwurf ist bis im Frühjahr 2002 in der Vernehmlassung. Der Vorschlag einer von Prof. Rolf Dubs, St. Gallen, präsidierten Arbeitsgruppe sieht vor, dass Berufsmaturandinnen und -maturanden den vollen Universitätszugang nach erfolgreichem Abschluss einer Prüfung in 5 Gebieten erlangen, die eine Zusatzausbildung von rund einem Jahr verlangen: eine Fremdsprache freier Wahl, Mathematik, Integrationsfach Naturwissenschaft/Technik, Integrationsfach Gesellschaftswissenschaften/Philosophie, Verteidigung der Interdisziplinären Projektarbeit (entspricht in etwa der gymnasialen Maturaarbeit) in einer andern Fremdsprache als der oben geprüften. Anbieter der Vorbereitung auf die Prüfungen sollen Gymnasien, Berufsmaturitätsschulen oder Private sein können. Die SMK soll die Prüfung organisieren. Der Bericht kann von *http://www.bbw.admin.ch* herunter geladen werden.

Vernehmlassung Sprachengesetz

Der VSG wurde via LCH Ende November gebeten, auf die Vernehmlassung zur Bundesvorlage für eine Regelung des Sprachengesetzes eine Antwort zu verfassen. Dieses zukünftige Gesetz fordert u.a. ein grösseres Engagement von Bund und Kantonen zugunsten der Nationalsprachen.

Da eine Konsultation in der von LCH anberaumten Frist von einer Woche nicht möglich war, hat der ZV beschlossen, die Antwort direkt einzuschicken. Die Kantonal- und Fachverbände haben die Unterlagen erhalten und wurden gebeten, ihre Kommentare bis zum 4.1.2002 zurückzusenden.

Die Unterlagen können unter *http://www.bak.admin.ch* (Bundesamt für Kultur, Sprachenpolitik) vom Internet herunter geladen werden.

Die Evaluation MAR läuft an

Das auf Anregung der Arbeitsgruppe Gymnasium AGYM von EDK und BBW in Auftrag gegebene Projekt zu einer gesamtschweizerischen Evaluation der MAR-Umsetzung nimmt Formen an. Noch im alten Jahr ist die Projektleitung bestimmt worden: Sie setzt sich zusammen aus Erich Ramseier (Amt für Bildungsforschung des Kantons Bern), Gesamtprojektleitung und Leitung Teilprojekt 1 «Laufbahn und Erfolg»; François Grin, Consortium romand, Leitung Teilprojekt 2 «Bildungsziele»; Felix Oggenfuss, BPZ Zentralschweiz, Leitung Teilprojekt 3 «Organisatorische Bewältigung der Reform», und Emanuele Berger, USR Bellinzona, Koordination der Projekte in der italienischen Schweiz. Im Frühjahr 2002 werden das Erhebungsdesign und die weiteren Schritte vorgestellt. Über die Ergebnisse wollen die zuständigen Stellen laufend orientieren. Auskünfte sind erhältlich bei Andreas Hirschi, Generalsekretariat der EDK (031 309 51 30) bzw. beim Präsidenten AGYM (031 961 60 55). Der VSG verfolgt die Entwicklung des Projekts mit Interesse.

Urs Tschopp — Dezember 2001

■ Actualités de la SSPES

Assemblée des délégué(e)s et Assemblée plénière 2002 sur le thème de la Déclaration de Bologne

L'Assemblée plénière 2002 sera consacrée à la Déclaration de Bologne et à ses conséquences sur le gymnase. Elles auront lieu les 7 et 8 novembre 2002 à Baden.

Semaine d'Etudes: modifications des conditions-cadre

Le président du groupe de projet chargé de la planification de la prochaine Semaine d'Etudes, Hans Peter Dreyer, désire prendre en considération des modifications survenues depuis la dernière Semaine d'Etudes en 1993:

- La prédominance de l'Economique sur le Politique
- L'importance de l'ordinateur pour l'Ecole
- L'anglais comme «lingua franca»

- Le profond changement du système scolaire suisse, de l'école enfantine aux Ecoles supérieures (cf. Déclaration de Bologne)
- Les exigences accrues des parents et des élèves par rapport à l'Ecole

On prévoit entre autre un programme d'échanges d'enseignants et d'élèves pendant la période de la Semaine d'Etude, qui aura lieu en principe en automne 2004 ou 2005 à Zurich. Le groupe de projet, mandaté par la Conférence des Président(e)s 2001 présentera ses propositions en été 2002.

Correspondant(e)s dans les écoles

En collaboration avec les Associations cantonales et le CPS, le Comité central envisage d'établir un réseau de correspondant(e)s dans les écoles. Des contacts ont été pris avec les présidents, les directions d'écoles et la direction du CPS. Les premières réponses des Associations cantonales nous sont déjà parvenues. Michel Aubert et Urs Tschopp élaborent un mandat. Le réseau doit être présenté à la Conférence des Président(e)s en mars 2002. Les membres de la Société, qui seraient prêts à fonctionner comme correspondant(e)s sont priés de contacter le Secrétariat de la SSPES (tél. 031 311 07 79) pour de plus amples renseignements.

Passerelle Gymnase – Université

Les titulaires d'une maturité professionnelle doivent pouvoir accéder aux Universités et aux Ecoles supérieures. Un projet est soumis à consultation jusqu'au printemps 2002. La proposition d'un groupe de travail présidé par le Prof. Rolf Dubs de Saint-Gall prévoit que les titulaires d'une maturité professionnelle pourront accéder à toutes les études universitaires après avoir passé un examen dans 5 domaines, dont la préparation demandera environ une année: une langue étrangère à choix, mathématiques, une branche intégrative sciences naturelles-technique, une branche intégrative sciences sociales – philosophie, défense d'un travail de projet interdisciplinaire (plus ou moins correspondant au travail de maturité gymnasial) dans une autre langue étrangère que celle déjà matière d'examen. La préparation à ces examens pourra être assurée par les gymnases, les écoles de maturité professionnelle et les écoles privées. La CSM organisera les examens. Le rapport peut être consulté à l'adresse électronique suivante: *http://www.bbw.admin.ch*.

Consultation «loi sur les langues»

Une consultation sur les langues nationales et la compréhension entre les communautés linguistiques parvint à la SSPES. La réponse ne pouvait pas se faire dans le délai d'une semaine, imparti par LCH. C'est pourquoi le CC a décidé d'envoyer la réponse par la voie directe.

Les associations de branche et les associations cantonales ont reçu les documents et envoient leurs commentaires jusqu'au 4.1.02.

Les documents peuvent être consultés à l'adresse électronique suivante: *http://www.bak.admin.ch* (Département fédéral chargé de la culture, politique des langues).

Evaluation RRM

Le projet d'une évaluation globale de l'application de l'ORRM à l'échelle nationale, initié par le groupe de travail Gymnase AGYM, mandaté par la CDIP et l'OFES, prend forme. La direction du projet a été nommée l'an dernier: Erich Ramseier (Office de recherche pédagogique du canton de Berne), responsable de l'ensemble du projet et directeur du projet 1 «Carrière et réussite»; François Grin (Consortium romand), directeur du projet 2 «Objectifs de formation»; Felix Oggenfus (BPZ Suisse centrale), directeur du projet 3 «Gestion et organisation de la réforme»; Emanuele Berger (USR Bellinzone), coordination des projets pour la Suisse italienne. Les prochaines étapes seront présentées au printemps 2002. Des informations régulières sur les résultats sont prévues par les instances responsables. Pour plus de renseignements, il est possible de s'adresser à Andreas Hirschi, secrétariat général de la CDIP (031 309 51 30) ou au président de l'AGYM (031 961 60 55). La SSPES suit avec intérêt le développement de ce projet.

Urs Tschopp Décembre 2001

Rapport annuel du président pour l'année 2000/2001

L'exercice 2000/2001 de la SSPES a été riche en consultations, en résolutions, en prises de position. Le contexte actuel de la politique de l'éducation en Suisse et dans nos cantons, toujours en changements et en évolution, nous conduit naturellement à nous situer dans le paysage scolaire.

Les organes de la SSPES, son Assemblée des Délégué(e)s, sa Conférence des Président(e)s, son Comité central, n'ont donc pas manqué de mener des réflexions approfondies, d'affirmer notre identité, ainsi que notre rôle dans la formation des étudiants, et de faire connaître nos positions aux cercles concernés. Parallèlement, une réorganisation de nos structures est en cours, qui se poursuivra encore ces prochaines années.

1. Organes de la SSPES

1.1 Comité central et Bureau

Le Comité central s'est réuni sept fois, lors de séances plénières de plusieurs jours, durant l'exercice 2000/2001, et le Bureau trois fois. Par ailleurs, deux groupes de travail (groupe «Structures» et groupe «Politique») ont tenu huit séances.

Il n'y a pas eu de changements au sein du Comité central cette année, dont font partie Urs Tschopp, vice-président, Roger Friche, trésorier, Thomas Peter, secrétaire (tous trois membres avec le soussigné du Bureau), Anita von Arx, Christa Dubois-Ferrière et Martin Rüegg. Nous espérons vivement que de nouveaux membres pourront être élus bientôt au Comité central.

Mes remerciements vont cette année encore à tous les membres du Comité central pour leur engagement et leur apport à la réalisation de nos tâches et de nos objectifs.

1.2 Secrétariat

Mme Agnes Käser s'occupe toujours parfaitement du Secrétariat. Nous la remercions pour son travail et sa disponibilité, en particulier pour la nouvelle tâche consistant à tenir le fichier des adresses des membres de la SSPES.

1.3 Assemblée des Délégué(e)s et Conférence des Président(e)s

L'Assemblée des Délégué(e)s 2000 de la SSPES a eu lieu le 9 novembre 2000 à Langenthal. Lors du repas réunissant les délégués, les membres du comité central et les invités, une petite commémoration a permis de marquer les 140 ans de la SSPES. Le 10 novembre 2000, les participants à l'Assemblée plénière de la SSPES, placée sous le thème «L'Ecole: pour la vie ... ou pour la nouvelle économie ?», ont pu suivre un exposé du Professeur Beat Burgenmeier et participer à une table ronde animée par Mme Nadia Brendle, de la TSR.

La conférence des Président(e)s du 25 octobre 2000, à Lucerne, a été consacrée à «l'avenir du CPS et sa collaboration avec la SSPES et ses sociétés affiliées». Des présentations de MM. Hans Ambühl, secrétaire général de la CDIP, Armand Claude, directeur du CPS, et Theo Wirth, membre de la commission «Formation initiale et formation continue», ont permis d'amorcer la discussion sur le thème de la conférence.

L'adoption d'une résolution et de thèses sur la formation continue, ainsi qu'un débat sur le document «Politique de l'enseignement gymnasial», ont été à l'ordre du jour de la conférence des Président(e)s tenue à Olten le 21 mars 2001.

1.4 Commissions permanentes

Les commissions permanentes de la SSPES, CLV (Commission Langues Vivantes), CPP (Commission psycho-pédagogique), F+P (Commission pour la formation initiale et continue), CGU (Commission Gymnase–Université), ont poursuivi ou développé leurs activités durant cette année. On trouvera de plus amples renseignements sur leur travail pendant l'exercice écoulé dans les rapports annuels de leurs présidents: Hannelore Pistorius (CLV), Rosemarie Meyer-Ott (CPP), Helmut Meyer (F+P) et Alois Kurmann (CGU).

Quelques nouveaux membres ont pu être élus dans les commissions; mentionnons aussi qu'un ou deux membres du Comité central font partie désormais de chaque commission, ce qui facilite la planification et la coordination des objectifs de la SSPES.

Par ailleurs la CGU, recréée en 2000, a redéfini son mandat et celui-ci a été adopté récemment par le Comité central.

1.5 Gymnasium Helveticum

Nous remercions cette année encore nos rédacteurs, Verena E. Müller et Claude Wannenmacher, de leur travail sans relâche pour la parution du *Gymnasium Helveticum*. Nous leur savons gré de la planification des thèmes, de la chasse permanente aux auteurs, de la gestion du volume des articles, ainsi que de leurs contributions rédactionnelles personnelles (en particulier des éditoriaux réguliers de V.E. Müller).

Nos remerciements vont également à Christine Jacob-Hugon, qui a assuré durant plusieurs années les traductions allemand-français des articles du GH et qui a assisté à de nombreuses séances du Comité central. Nous formons tous nos vœux pour la poursuite de ses activités professionnelles en Australie.

D'autre part, le Comité central étudie encore sous quelle nouvelle forme les «nouvelles de la SSPES» pourraient être présentées dans le *Gymnasium Helveticum.*

2. Résolutions, prises de position, consultations

2.1 Résolution de l'Assemblée des Délégué(e)s 2000 de la SSPES

Lors de l'Assemblée des Délégué(e)s du 9 novembre 2000 à Langenthal, une résolution a été adoptée, dénonçant la détérioration des conditions d'enseignement au secondaire II et demandant que des moyens suffisants soient accordés au secteur de l'enseignement, pour que la mission qui est la sienne puisse être remplie de manière optimale.

Cette résolution a été transmise à toutes les autorités dont dépend la formation gymnasiale, tant au niveau des cantons qu'à celui de la Confédération.

2.2 Résolution et thèses sur la formation continue

Suite à ses deux réunions de Lucerne (25 octobre 2000) et d'Olten (21 mars 2001), la Conférence des Président(e)s, se préoccupant des conditions actuelles dans lesquelles les maîtres de gymnase ont la possibilité de suivre des cours de perfectionnement et soucieuse de leur garantir la meilleure formation continue (entre autres par le biais des cours mis sur pied par ses sociétés de branches affiliées, dans le cadre du programme du CPS), a adopté une résolution à l'attention des départements cantonaux de l'Instruction publique des cantons suisses.

Par ailleurs, la Conférence des Président(e)s a également adopté les «thèses pour la formation continue des professeurs de gymnase» élaborées par la Commission Formation et formation continue (F+P).

2.3 Positionspapier

Le Comité central a confié à un groupe de travail «Politique» (formé de Anita von Arx, Christa Dubois-Ferrière, Martin Rüegg et Michel Aubert) la rédaction d'un «Positionspapier» présentant les options politiques de la SSPES, plus précisément de son Comité central.

Cette prise de position, préparée par le groupe de travail, adoptée par le Comité central et soutenue par la Conférence des Président(e)s, est intitulée «Politique de l'enseignement gymnasial» et présente nos préoccupations du moment. Il est prévu qu'elle soit réactualisée ces prochaines années.

Ce document a déjà été diffusé auprès de divers partenaires de la SSPES et publié dans le GH. Il sera encore soumis à la Conférence des Président(e)s du 19 septembre 2001 et sera présenté à l'Assemblée des Délégué(e)s du 8 novembre 2001 à Lucerne.

2.4 Consultations

La SSPES, ses sociétés de branches ou ses associations cantonales ont été amenées à répondre à plusieurs consultations de la CDIP cette année: «Coordination de l'enseignement des langues au niveau de la scolarité obligatoire», «Concept cadre pour la formation des maîtres de sport de tous les niveaux», «Recommandations de la CDIP concernant la formation et l'intégration des jeunes de langue étrangère au degré secondaire II».

2.5 Enquête ORRM

Suivant le mandat donné par l'Assemblée des Délégué(e)s 2000, le Comité central a lancé une enquête interne sur la mise en place de l'ORRM, dans le No 2/01 du *Gymnasium Helveticum*.

Souhaitant que plus de collègues s'expriment sur le sujet et pour obtenir un nombre plus significatif de réponses à faire valoir dans une analyse ou des prises de position futures, le Comité central a décidé de prolonger le délai de cette consultation au 10 octobre 2001. Ce thème est d'ores et déjà agendé à la prochaine Conférence des Président(e)s du 19 septembre 2001, ainsi qu'à l'Assemblée des Délégué(e)s du 8 novembre 2001.

3. Autres travaux du Comité central

3.1 Administration

Suite aux réorganisations de l'année dernière, le *Gymnasium Helveticum* est imprimé et expédié par l'imprimerie Trüb-Sauerländer AG d'Aarau, la recherche des annonces est confiée à Lenzin & Partner d'Erlinsbach (AG), tandis que la maison IPO de Bösingen (FR) tient le fichier et se charge de l'envoi des cotisations. Les changements d'adresses, les admissions et démissions sont traités directement par le secrétariat de la SSPES (Waisenhausplatz 14, Postfach, 3001 Bern).

Notre site Internet *www.vsg-sspes.ch* a maintenant trouvé sa vitesse de croisière et il est régulièrement tenu à jour, grâce aux bons soins de notre vice-président Urs Tschopp et de la maison ISM de Disentis (GR). Nous serions encore heureux d'enrichir ce site de liens – de et vers – les sites des sociétés affiliées ou d'autres organisations.

3.2 Champs d'activités du Comité central en 2001

Le Comité central s'était fixé pour 2001 cinq champs d'activités (ou de réflexion), qui ont été présentés à l'Assemblée de Délégué(e)s 2000: Politique de la SSPES (cf. 2.3), Structures (cf. 3.3), Concept des langues (cf. 2.3 + 2.4), Secondaire II (cf. GH 4/01), Semaine d'études (cf. 3.7).

3.3 Organisation du Comité central, structures, départements

Suite à des propositions de réformes des structures remontant à quelques années, le Comité central a créé en 2000 un groupe de travail temporaire «Structures» (formé de Roger Friche, Thomas Peter, Martin Rüegg et Michel Aubert), avec mandat d'étudier plusieurs variantes (non exclusives): mise en place de départements au sein du Comité central, instauration d'un poste de directeur exécutif (ou de secrétaire général), renforcement de la présidence.

Le groupe de travail a procédé à une analyse approfondie des tâches du Comité central et du secrétariat, défini le profil et le cahier des charges d'un éventuel directeur exécutif et estimé les coûts des diverses variantes.

En bout de compte, le Comité central, dans sa séance des 3–5 mai 2001, a décidé de ne pas proposer de modifications des statuts visant à l'instauration d'un poste de directeur exécutif (essentiellement pour des raisons financières). Les travaux du groupe de travail seront par contre très utiles pour la mise en place des départements du Comité central, qui est actuellement en cours.

3.4 Questions financières

L'étude des structures de la SSPES ne saurait être dissociée de sa situation financière. On se référera à ce propos aux comptes et budget présentés à l'Assemblée des Délégué(e)s 2001 par notre trésorier Roger Friche, qui tient toujours avec compétence et efficacité les cordons de la bourse de la SSPES.

L'augmentation des charges, de nouvelles structures plus efficaces, mais aussi une certaine diminution du nombre de nos membres, nous obligeront naturellement à repenser l'enveloppe budgétaire globale de la SSPES à l'avenir.

3.5 Recrutement

Chaque année, une (ou des) campagne(s) d'information et de recrutement est (sont) lancée(s) auprès des enseignants de certains cantons ou de certaines disciplines. Nous constatons malgré cela que la SSPES, ainsi que ses sociétés affiliées, demeurent peu connues, spécialement auprès de nos jeunes collègues.

Diverses mesures sont dès lors envisagées pour favoriser cette information et ce recrutement. Nous pensons entre autres réinstaller un réseau de correspondants d'écoles performant (cf. 3.6), et aussi offrir de nouveaux avantages aux membres de la SSPES, comme des prix préférentiels pour participer à une semaine d'études (cf. 3.7) et éventuellement à des cours de perfectionnement de nos sociétés affiliées.

Par ailleurs, une information en connexion avec les actions promotionnelles du CPS est envisagée. M. Armand Claude, directeur du CPS, a déjà fait des présentations dans les départements de didactique des universités suisses, où il a eu l'occasion de mentionner l'existence de la SSPES et de ses sociétés affiliées.

3.6 Correspondants d'écoles

Le Comité central étudie la possibilité de trouver dans chaque gymnase ou lycée un correspondant de la SSPES et du CPS. Son rôle serait de s'occuper de la promotion de la SSPES, éventuellement de l'association cantonale de son canton, des sociétés de branche de la SSPES, de leurs manifestations, des cours de perfectionnement du CPS. Il pourrait recevoir des informations directes de la SSPES et du CPS et les tenir à disposition de ses collègues.

3.7 Semaine d'études

Après plusieures années où ce thème n'a plus été abordé, le Comité central a décidé de relancer l'idée d'organiser une semaine d'études de la SSPES. La Conférence des Président(e)s du 19 septembre 2001 déciderera du lancement de ce projet, ainsi que de la création d'un groupe de planification. Différents partenaires de la SSPES, dont le principal serait naturellement le CPS, pourraient être associés à ce groupe de planification. Cette prochaine semaine d'études de la SSPES pourrait avoir lieu à Zurich en 2004 ou en 2005.

3.8 Argus de la presse

Le Comité central a renoncé à créer son propre Argus de la presse, mais a décidé de s'abonner à celui que notre collègue Paul Strasser réalise régulièrement à l'attention de TRI S2, en collectant des articles concernant l'enseignement dans la presse suisse.

4. Contacts extérieurs

4.1 Rencontres CDIP–SSPES

Cette année, nous avons rencontré à deux reprises M. Hans Ambühl, secrétaire général de la CDIP, et ses collaborateurs. Le 1er septembre 2000, nous avons pu passer en revue les nouveaux statuts du CPS et recevoir des informations sur le projet de futur centre national de compétences. Le 30 mai 2001, lors de la traditionnelle rencontre annuelle CDIP–SSPES, nous avons pu avoir de nombreux échanges sur des sujets aussi variés que le Secondaire II, la déclaration de Bologne, les prises de position de la SSPES, l'état de la situation du CPS, l'éventuelle future semaine d'études de la SSPES, les évaluations de l'ORRM, le concept des langues.

4.2 CPS

Nos contacts et notre collaboration avec le CPS ont été très intenses cette année, tant au plan de nos rencontres avec sa direction qu'à celui, traditionnel et régulier, des cours de perfectionnement que mettent sur pied nos sociétés affiliées.

Les nouveaux statuts du CPS prévoient que l'ancienne «Commission de surveillance» est remplacée par un «Conseil du CPS». La SSPES sera représentée dans ce nouveau Conseil par deux membres du Comité central.

Le Comité central et quelques membres de la Commission F+P ont rencontré le 24 octobre 2000 M. Armand Claude, directeur du CPS, et ses collaborateurs, au siège du CPS à Lucerne, pour débattre des questions concernant le CPS et la SSPES.

Une proposition visant à offrir des conditions de participation préférentielles aux membres de la SSPES (pour les activités de formation continue de la SSPES et de ses sociétés affiliées) a été faite à l'Assemblée des Délégué(e)s 2000 du 9 novembre 2000. Cette proposition est actuellement étudiée par la Direction du CPS et le Comité central de la SSPES.

Par ailleurs, plusieurs membres du Comité central de la SSPES et de la Commission F+P ont participé le 24 janvier 2001 à un Hearing organisé par la Conférence suisse des responsables de la formation continue du corps enseignant du secondaire II (comprenant le CPS), sur le thème des «Perspectives de la formation continue institutionnelle des enseignants du secondaire II».

4.3 Contacts avec les associations cantonales

Selon sa pratique réinstaurée il y a quelques années, le Comité central a tenu ses séances dans diverses villes de Suisse. Il a pu ainsi, presque à chaque fois, rencontrer les responsables des associations cantonales des cantons visités et aborder avec eux les questions spécifiques les concernant.

4.4 Sociétés de branches

Le Comité central se préoccupe actuellement de réactiver la «Société des professeurs d'allemand en Suisse romande et italienne» (SPASRI).

4.5 Contacts avec des parlementaires

Des contacts personnels avaient déjà été pris en 2000 par certains membres du Comité central avec des parlementaires fédéraux. Cette année, une délégation du Comité central a rencontré un groupe de parlementaires des chambres fédérales, le 20 juin 2001 à Berne. A cette occasion, il a pu présenter son document «Politique de l'enseignement gymnasial». Les thèmes cruciaux de cette prise de position, ainsi que d'autres thèmes, y ont été l'objet d'un intéressant échange de vue.

De telles rencontres devraient être renouvelées ces prochaines années.

4.6 LCH, SER

Comme les années précédentes, la SSPES a été représentée par des membres de son Comité central aux séances du comité, à la conférence des présidents et à l'assemblée des délégués de LCH (Lehrerinnen und Lehrer Schweiz).

Plusieurs rencontres avec des membres du comité du SER (Syndicat des enseignants romands) ont été tenues en vue d'établir une convention de collaboration entre le SER et la SSPES: la SSPES ne peut pas devenir membre collectif du SER (car les statuts du SER ne prévoient pas cette possibilité).

4.7 Peter-Hans-Frey-Stiftung

La fondation Peter-Hans Frey, dont le but est d'encourager les initiatives visant au développement de l'enseignement gymnasial en Suisse et qui décerne chaque année un prix à une personne ou à une institution, est traditionnellement présidée par un membre de la SSPES. Ces dernières années, c'est M. John Rufener, ancien président de la SSPES, qui en étaitle président. Le Comité central de la SSPES va être amené à désigner prochainement un nouveau président pour cette fondation.

4.8 Participation à des activités extérieures

Des membres de la SSPES, du Comité central en particulier, ont participé à divers congrès, assemblées, séminaires, ... On citera par exemple le congrès de la «Deutscher Philologen-Verband» (DPhV), tenu à Berlin les 15–16 mars 2001 et auquel a participé Anita von Arx; ou le congrès «Gewalt an der Schule», le 5 juin 2001 à Winterthour, à l'organisation duquel Thomas Peter a collaboré et auquel Christine Jacob-Hugon a participé; ou encore la rencontre des recteurs des gymnases et des hautes écoles sur le thème «Transition Gymnase-Hautes écoles», du 31 août au 2 septembre 2001 au Monte Verità, à laquelle ont participé deux membres de la Commission CGU: Franziska Streit et Alois Kurmann.

4.9 Commissions

La SSPES est toujours représentée dans diverses commissions (autres que nos commissions permanentes): le Conseil du CPS, la CSM (Commission suisse de maturité), la CFG (Commission Formation générale de la CDIP), l'AGYM (groupe Gymnase de la CDIP), la RDEM (Commission de reconnaissance des diplômes d'enseignement pour les écoles de maturité). On notera à ce propos qu'Urs Tschopp, vice-président de la SSPES, a été nommé président d'AGYM.

4.10 Contacts avec d'autres associations et organisations

Durant cette année, la SSPES a gardé le contact avec de nombreuses associations ou organisations, telles l'Association suisse des professeurs d'université, l'Union des organisations d'étudiants, le Conseil de fondation du Fonds national suisse, *ch* Echange de jeunes, FPS (Formation professionnelle suisse), Engineers Shape our Future (INGCH), la fondation contre le racisme.

Je ne saurais conclure ce rapport sans réitérer mes remerciements à mes collègues du Comité central pour leur soutien et leur fructueuse collaboration. Mes remerciements vont encore à tous les responsables des sociétés de branches affiliées, des associations cantonales, des commissions permanentes, aux rédacteurs du *Gymnasium Helveticum* et au Secrétariat.

Michel Aubert, président

Service de formation continue

Analyse de l'image: techniques et outils
Cinéma et autres médias
Les 13, 20, 27 mars, 10, 17 et 24 avril 2002

Renseignements
Service de formation continue
Université de Lausanne – Château de Dorigny
1015 Lausanne – Tél. 021 692 22 90 – Fax 021 692 22 95
Internet: http://www.unil.ch/sfc/
e-mail: formcont@sfc.unil.ch

Wörterbücher für die Schule

Fit für den Englischunterricht – mit POWER

Mit dem POWER Dictionary und dem Schulwörterbuch Englisch bietet Langenscheidt in bewährter Qualität ein Wörterbuchkonzept für Schüler der Sekundarstufe I an.
Optimal für den fremdsprachlichen Anfangsunterricht und speziell auf die Bedürfnisse der Zielgruppe zugeschnitten:

- Alle Hauptstichwörter in Blau
- Blaue Info-Fenster mit wichtigen Zusatzinformationen zu Wortschatz, Grammatik und Landeskunde
- Viele didaktische Hilfen

Langenscheidt's
POWER Dictionary Englisch

Rund 66 000 Stichwörter und Wendungen
22 ganzseitige Farbillustrationen zu wichtigen Themenbereichen für wortschatzbezogenes Lernen
888 Seiten, sFr 32,–
3-468-13112-7

Langenscheidts
Schulwörterbuch Englisch

Rund 55 000 Stichwörter und Wendungen
Markierung des Grundwortschatzes
672 Seiten, sFr 21,70
3-468-13212-3

Bestellen Sie bitte Ihr kostengünstiges Englischlehrer-Prüfexemplar bei:

www.langenscheidt.de

Langenscheidt AG
Postfach 45 31 · Gubelstr. 11 · 6304 Zug
Tel. 0 41/710 83 00 · Fax 0 41/710 83 25

Langenscheidt
... weil Sprachen verbinden

Bildungsserver und ICT-Kompetenz

Mitte November 2001 ist der Schweizerische Bildungsserver (SBS, http://www.educa.ch) offiziell ans Netz gegangen. Er soll ein Portal für die Schweizer Schule sein, also jener Ort, von dem aus Zugang zu den verschiedenen Angeboten für Bildung, Unterrichtsmaterialien und schulrelevante Informationen besteht. Betreut wird er von 2 hauptamtlichen und 10 Teilzeitredaktor(en)/innen, die in den verschiedenen Regionen des Landes arbeiten. Für Anbieter von Inhalten bestehen verschiedene Möglichkeiten zur Zusammenarbeit mit dem SBS. Mit einer Austauschplattform für Unterrichtsmaterialien können auch einzelne Lehrpersonen ihre Ideen und Arbeiten einbringen. Unter http://www.educanet.ch wurde auch ein Bereich eröffnet, in dem man virtuelle Gruppen und Foren bilden kann, in dem Zusammenarbeit zwischen Lehrpersonen, Schulen und Klassen möglich sein soll.

Materialien und Informationen von gesicherter Qualität

Anlässlich der Generalversammlung des SVIA (Schweizerischer Verein für Informatik in der Ausbildung) am 23.11.2001 hat ein Podium mit Francis Moret (SFIB), Werner Hartmann (EducETH) und Fortunat Schmid (HLM Höheres Lehramt Mittelschulen der Universität Zürich) an der ETH in Zürich stattgefunden. Der zentrale Punkt der Diskussion war die Frage, wer für Bildungsserver Inhalte von gesicherter Qualität liefert und wer die Kosten trägt. Man war sich einig, dass eine grosse Menge von Informationen und Materialien den Suchenden noch nicht viel bringt, wenn sie in der Fülle des Gefundenen dann die qualitativ wertvollen mühsam heraussuchen müssen. EducETH betreut jeden Fachbereich durch Fachmaster, die mit ihrem Namen zur Qualität des Angebots stehen. Ihre Arbeit leisten sie heute ohne finanzielle Entschädigung. Für die technische Arbeit steht EducETH nur eine 50%-Stelle zur Verfügung. Dieser Zustand kann aber längerfristig nicht durchgehalten werden. Hier ist dringend eine tragfähige Dauerlösung gesucht, damit wir auch in Zukunft für den Unterricht auf der Sekundarstufe II dieses grossartige Angebot nutzen können.

Vernetzung der ICT-Kompetenzen

«Use ICT to learn» ist ein Ziel, welches mit der Ausbildung in ICT in der Schule angestrebt wird. Noch sind zu viele Hindernisse beim Lernen mit ICT da. Ungeeignete Software, fehlende Unterstützung, keine Ansprechpersonen für konkrete Fragen. Fortunat Schmid zeigte, dass eine Vernetzung von kompetenten Lehrpersonen dringend nötig ist. Am 12. September 2001 hat die Tagung «ICT und Gymnasialunterricht» 50 Teilnehmende zusammengeführt, die den Willen bekundet haben, in einem Netzwerk mitzuwirken. Eine Projektgruppe aus Vertretern von WBZ, SVIA und HLM erarbeitet nun Grundlagen für die Organisation dieses ICT-Kompetenznetzes Sek II.

Das Netzwerk steht und fällt mit den Lehrpersonen, die dabei mitmachen. Sie müssen unterstützt werden von den Institutionen, welche in der Aus- und Weiterbildung tätig sind, speziell von den Fachdidaktiken, die wissenschaftliche Grundlagen beibringen können, und welche auch bei der Erarbeitung von Unterrichtsmaterialien eine wichtige Rolle spielen sollten. Dazu gehört natürlich auch die technische Vernetzung mit einem Schweizerischen Bildungsserver und Inhaltsplattformen wie EducETH. Entscheidend für die Zukunft der ICT in der Schule wird aber die Vernetzung der Menschen sein.

Hermann Knoll, SVIA-Präsident

Internetadressen:
Schweizerischer Bildungsserver: http://www.educa.ch
Schulnetz im Schweizerischen Bildungsserver: http://www.educanet.ch
EducETH: http://www.educeth.ch
Schweizerischer Verein für Informatik in der Ausbildung SVIA:
http://www.svia-ssie.ch

Kurse Januar–Juli 2002 mit freien Plätzen!

Cours de janvier à juillet 2002 avec des places libres!

wbz cps

Erstsprachen / Langues premières

01.01.04	Lyrik in Leukerbad	10.–14. 3. 2002	Leukerbad VS
01.01.06	Informations- und Kommunikationstechniken im Deutschunterricht	20. 3. 2002	Luzern
01.01.33	Journalistisches Schreiben	26.–28. 3. 2002	Degersheim

Zweitsprachen / Langues secondes

01.02.11	Atelier d'expression théâtrale	24.–26. 4. 2002	Tramelan, CIP
01.02.13	Nationalsozialismus – Stalinismus	23. 3. 2002	Basel
01.02.16	Creative Writing	17.–20. 4. 2002	Fribourg
01.02.17	Literatura y cine	14.–16. 3. 2002	Bönigen b. Interlaken
01.02.18	Literature Festival in Ireland	22.–26. 4. 2002	Galway / Ireland
01.02.62	Le rôle des aspects grammaticaux dans la compréhension de textes	16.–18. 4. 2002	Genève
01.02.71	Enrichir son français … à distance	Séance d'introduction: 12. 1. 2002	Domicile du participant

Physik / Physique

01.05.32	Physik und Anwendungen der Mathematik II	6.–8. 3. 2002	Zürich und Rapperswil

Biologie / Biologie

01.07.12	Biotechnologies: une approche pratique de quelques techniques en biologie moléculaire	5.– 6. 3. 2002	Lausanne
01.07.71	Gentechnik – Grundlagen und Anwendungen	21.– 22. 2. 2002	Zürich

Politik / Politique

01.10.31	Politische Bildung in Bewegung	11.–13. 03. 2002	Wabern-Bern

Wirtschaft und Recht / Economie et Droit

01.11.02	Marketing: Neue Trends in Wirtschaft und Unterricht	18.–19. 3. 2002	Zürich
01.11.51	Anwenderkurs Finanzbuchhaltung auf dem Computer	24.–25. 1. 2002	Zürich

Geschichte / Histoire

01.12.32	Être migrant(e) en Europe	6.–9. 3. 2002	Neuchâtel
01.12.35	Geschichtsunterricht in multikulturellem Umfeld	9.–11. 5. 2002	Ostschweiz
01.12.36	La construction scolaire de l'histoire sociale	15.–17. 5. 2002	Genève

Philosophie / Philosophie

01.13.11	Les nouvelles biotechnologies, une menace pour la dignité de l'homme?	20. 3. 2002	Lausanne

Religion / Religion

01.14.01	Faszination Buddhismus	13.–15. 5. 2002	Gretzenbach

Musik / Musique

01.16.31	Oper in der Schule	7.–9. 3. 2002	Leuenberg/Hölstein BL

Kaderbildung / Formation des cadres

01.22.35	Qualitätsevaluation an Mittelschulen	1. Block: 27. 2.–2. 3. 2002 2. Block: 25.–27. 3. 2002 3. Block: 6.–8. 5. 2002 4. Block: 19.–21. 6. 2002 5. Block: 29.–31. 10. 2002 1 Tag im Februar 2003	Schwarzenberg LU

Interdisziplinäre Projekte / Projets interdisciplinaires

01.23.32	Science et philosophie des sciences au XIXe et au début du XXe siècle	25.–26. 1. 2002	Lausanne
01.23.41	Unterrichtsexempel zu Mathematik/Physik/ Chemie/Deutsch aus der Berner Lehrkunstwerkstatt	15.–17. 5. 2002	Bern
01.23.51A	EDK-Forum zur Interdisziplinarität / Forum CDIP sur l'interdisciplinarité	4.–5. 4. 2002	Morat FR
01.23.51B	EDK-Forum zur Interdisziplinarität / Forum CDIP sur l'interdisciplinarité	22.–23. 4. 2002	Morat FR
01.23.71	Enseignement des droits de l'homme et de la paix	7.–13. 7. 2002	Genève

Methodik und Didaktik / Méthodologie et didactique

01.24.32	Freispiel im Kindergarten: Eigenaktives Spielen und Lernen	23. 3. 2002	Brugg AG
01.24.34	Geschlechtergerechter Unterricht an Gymnasien und Berufsschulen	24. 1. 2002	Zollikofen
01.24.64	Analyse des pratiques: Des compétences aux comportements	1ère partie: 12.–13. 3. 2002 2ème partie: 15.–16. 5. 2002	Lausanne

Pädagogik und Psychologie / Pédagogie et psychologie

01.27.53	Chancengleichheit als Auftrag im Unterricht	1. Teil: 11. 5. 2002 2. Teil: 25. 5. 2002	Zollikofen
01.27.66	Formation à la conduite de l'entretien	29. 4.–1. 5. 2002	Lausanne

Organisation und Entwicklung / Organisation et développement

01.28.21	Schulentwicklung durch Personalförderung	11.–12. 4. 2002	Leuenberg/Hölstein BL
01.28.22	Unterrichtsentwicklung Konkret	17.–18. 6. 2002	Rheinfelden

Sind Sie interessiert …

■ **… an ICT im Gymnasialunterricht?** Wir suchen eine Lehrperson, die Erfahrung im Einsatz neuer Informations- und Kommunikationstechniken in ihrem Unterricht sowie Kompetenzen in Projektmanagement und Sitzungsmoderation mitbringt. Sie wird im Umfang von etwa 20 % während ein bis zwei Jahren das WBZ-Projekt «ICT im Gymnasialunterricht» leiten. Dabei geht es – im Rahmen des Grossprojekts «Public Private Partnership (PPP)» von Bund, Kantonen und Wirtschaft – um die Planung und Gestaltung von Weiterbildungs- und Beratungsprojekten zur Unterstützung der Gymnasien im Bereich der ICT.

■ **… an Fragen der Geschlechterrollen und der Gleichstellung an Gymnasien?** In unserer Projektgruppe «Geschlechterrollen / Gleichstellung auf der Sekundarstufe II», gemeinsam getragen von der WBZ und dem Schweizerischen Institut für Berufspädagogik (SIBP), fehlen zur Zeit aktive Gymnasiallehrerinnen und vor allem -lehrer. Die Gruppe tagt vier Mal jährlich und führt jeweils im Januar ein interkantonales Forum durch. Schnuppermöglichkeit am nächsten Forum vom 24. Januar 2002 in Zollikofen BE (WBZ-Projekt Nr. 01.24.34) oder an einer nächsten Gruppensitzung.

■ **… an fächerübergreifenden Themen?** Dann kommt das diesjährige EDK-Forum zum Thema «Interdisziplinarität» gerade richtig. Fachleute aus Gymnasien und Universitäten stellen Forschungen und Projekte vor; daneben ist Raum für intensiven Gedanken- und Erfahrungsaustausch. Das Forum 2002 findet zwei Mal statt: Donnerstag/Freitag, 4./5. April 2002, und Montag/Dienstag, 22./23. April 2002, beide Male im SBB-Ausbildungszentrum Löwenberg bei Murten FR. Ihre Schulleitung hat eine Einladung erhalten. Erkundigen Sie sich dort oder melden Sie sich direkt an unter der WBZ-Projektnummer 01.23.51A (für das erste Datum) oder 01.23.51B (für das zweite Datum).

➔ Selbstverständlich erteilen wir gern weitere Auskunft zu diesen Projekten:
WBZ, Postfach, 6000 Luzern 7
Telefon 041 249 99 11
Fax 041 240 00 79
E-Mail: claude.armand@wbz-cps.ch

Walter E. Laetsch

Bildungspolitische Kurzinformationen Politique de l'éducation

Hochschulförderung, -planung

Der Bundesrat schickt einen neuen Hochschulartikel in die Vernehmlassung. Ziel ist es, die Kräfte zu bündeln, um die Qualität von Lehre und Forschung zu sichern und zu steigern. Bund und Kantone sollen gemeinsam Grundsätze für die Autonomie der Hochschulen, für die Mobilität der Studierenden und Lehrenden, für die Diplomanerkennung und die Finanzierung festlegen.

Universitäten

Koordination

Die Universität Zürich und die ETH Zürich wollen gemäss einer Rahmenvereinbarung ihre Zusammenarbeit verstärken. Die gegenseitige Durchlässigkeit und Absprachen sollen noch verbessert, die gemeinsamen Projekte und Einrichtungen vermehrt werden. Als Beispiele werden genannt ein neues Zentrum für funktionelle Genomik sowie ab 2002 ein Lehrerbildungsinstitut mit Beteiligung der Pädagogischen Hochschule und ein Sprachenzentrum.

Die Universität Lausanne denkt über eine Fusion mit der ETH Lausanne als «Campus Lausanne» nach. Es liegt ein entsprechendes Arbeitspapier vor.

Basel

Das erste Institut für klinische Epidemiologie in der Schweiz ist in Basel eröffnet worden. Durch patientenorientierte Forschung soll es dazu beitragen, dass namentlich in der inneren Medizin effiziente medizinische Massnahmen angewendet werden.

Lausanne

Die Post und die ETH Lausanne wollen in Forschung, Ausbildung und Wissenstransfer zusammenarbeiten. Die Post finanziert einen Lehrstuhl für «Management des Industries de Réseau» an der neuen Fakultät «Environnement naturel et construit».

Luzern

Die Nachfrage nach Studienplätzen für das neu geschaffene Studium der Rechtswissenschaft an der Universität Luzern ist grösser als erwartet. 160 Studierende beginnen im Oktober ihre Ausbildung, 60 Prozent davon sind Frauen.

Mit einem Festakt wurde die Eröffnung der Rechtswissenschaftlichen Fakultät begangen, womit die Universität Luzern nun als vollwertige Universität gilt. In Luzern wird das «Bologna-Modell» mit standardisiertem Unterricht, Bachelor- und Master-Abschluss und einem effizienten System für studentischen Austausch zwischen verschiedenen europäischen Universitäten angewandt.

Neuenburg

Der Neuenburger Staatsrat will die Struktur der Universität verbessern, damit die Hochschule konkurrenzfähig bleibt. Das kollegiale Direktionssystem soll abgeschafft und das Rektorat gestärkt werden. Für das Wintersemester sind 3200 Studierende eingeschrieben, die Zahl stagniere allerdings seit drei Jahren.

Forschung

Das Institut für biomedizinische Technik – eine gemeinsame Einrichtung der ETH und der Universität Zürich – hat mit einem privaten Unternehmen eine Vereinbarung über ein Kompetenzzentrum geschlossen, an dem neue Techniken der Magnetresonanzabbildung (MRI) entwickelt werden sollen. Das Zentrum ist im Universitätsspital untergebracht, aber primär für die Forschung bestimmt und nicht für Routineuntersuchungen an Patienten.

Mit einem Kredit von je 150 000 Franken unterstützen die Regierungen von Basel-Stadt und -Landschaft eine Machbarkeitsprüfung für ein neues Institut, an dem Alterserkrankungen erforscht werden sollen. Weitere 200 000 Franken hat der Universitätsrat Basel zugesagt. Der jährliche Finanzbedarf eines «Basel Institute for Diseases of Ageing» (BIDA) wird auf 30 bis 50 Mio. Franken geschätzt.

Schweizerschule Rom

Auf Beginn des Schuljahres 2002/03 (1. September 2002) ist die Stelle des/der

Direktors / Direktorin

neu zu besetzen. An der Schweizerschule Rom werden gegen 400 Schülerinnen und Schüler im Kindergarten, in der Primar- und Sekundarschule sowie im Wirtschaftsgymnasium von gegen 30 Lehrkräften unterrichtet. Unterrichtssprache ist Deutsch.

Als Direktor oder Direktorin leiten Sie die Schule. In dieser anspruchsvollen Aufgabe werden Sie vom Verwaltungsrat unterstützt. Wir wenden uns an Mittelschullehrkräfte mit mehrjähriger Lehrerfahrung und guten Italienischkenntnissen; falls Sie lediglich über Grundkenntnisse verfügen sollten, könnten Sie diese bis Stellenantritt allenfalls in Intensivkursen erweitern. Die Dauer der Anstellung als Direktor oder Direktorin ist für mindestens vier Jahre vorgesehen. Die Kosten für die Hin- und Rückreise sowie eine Pauschale für die Umzugskosten werden von der Schweizerschule übernommen.

Für Auskünfte wenden Sie sich bitte an Thomas Gschwend, Leiter des Amtes für Mittelschulen und Lehrerbildung, Erziehungsdepartement des Kantons St. Gallen, Regierungsgebäude, 9001 St. Gallen, Telefon (071) 229 32 34. Dort können Sie auch das Anmeldeformular beziehen.
Für detaillierte Angaben steht Ihnen auch der derzeitige Stelleninhaber, Prof. Bertram Mogg, Via Marcello Malpighi 14, I-00161 Roma (Telefon 0039 06 440 21 09, Telefax 0039 06 440 42 13) gern zur Verfügung.

Ihre Bewerbungsunterlagen senden Sie bitte bis 31. Januar 2002 an das Erziehungsdepartement des Kantons St. Gallen, Amt für Mittelschulen und Lehrerbildung, Regierungsgebäude, 9001 St.Gallen.

KANTON THURGAU

LEHRERSEMINAR KREUZLINGEN

Wir suchen auf Beginn des Schuljahres 2002/03 Lehrkräfte für:

Physik (Mathematik)

(Vollpensum)

Biologie / Chemie

(Vollpensum)

Geographie

(8 Lektionen)

Wir suchen Stellvertreterinnen und Stellvertreter für

Deutsch

(14 Lektionen, 12.8.02 – 24.1.03)

Biologie / Chemie

(20 Lektionen, Mai/Juni 02)
(17 Lektionen, 12.8. – 4.10.02)

Alle Pensen sind aufteilbar.

Folgende Umstände ergeben besonders günstige Arbeitsbedingungen: eine grosse Freiheit bei der Gestaltung des Unterrichtes, eine überschaubare Schule, eine sehr schöne und grosszügige Schulanlage, eine Schülerschaft, die bereit ist, den Unterricht und das Schulleben mitzugestalten.

Anforderungen: Abgeschlossenes Hochschulstudium (für Vertretungen mindestens höhere Semester).

Es ist eine Anstellung als Lehrbeauftragte(r) oder als Hauptlehrkraft möglich.

Bitte richten Sie Ihre Bewerbung bis 9. Februar 2002 an die Direktion des Thurgauischen Lehrerseminars, Hauptstr. 87, 8280 Kreuzlingen.

Auskunft erteilt Armin Kuratle, Rektor
Telefon Schule: 071 678 55 55; privat: 071 672 51 53
e-mail: armin.kuratle@kttg.ch

Weitere Stellenangebote finden Sie im Internet unter: www.tg.ch

Druck / Impression
Trüb-Sauerländer AG
Dammweg 39, CH-5000 Aarau, Tel. 062 834 13 13, Fax 062 834 13 53

Inserate / Annonces
Lenzin + Partner GmbH, Inserat-Agentur, Postfach, 5018 Erlinsbach
Tel. 062 844 44 86, Fax 062 844 44 89, www.lenzinundpartner.ch

Preise für Inserate und Beilagen / Prix pour les annonces et les annexes
Verlangen Sie das Mediablatt bei Lenzin + Partner GmbH

	Redaktionsschluss Délai rédactionnel	Inseratenschluss Délai annonces	Inseratenschluss Stellen Délai annonces offres d'emploi
2/02	2. 1.02	5. 2. 02	7. 2. 02
3/02	4. 3.02	10. 4. 02	12. 4. 02

KZO

Kantonsschule Zürcher Oberland
8620 Wetzikon

Wir führen eine gymnasiale Unterstufe (7./8. Schuljahr), alle fünf zürcherischen MAR-Maturitätsprofile und eine Handelsmittelschule*Plus*.
Wir suchen auf Mitte August 2002 oder nach Vereinbarung für ca. 150 Stellenprozente

Mittelschullehrpersonen mbA für Chemie

Es handelt sich um unbefristete Stellen «mit besonderen Aufgaben» gemäss der zürcherischen Mittel- und Berufsschullehrerverordnung (vgl. www.kzo.ch).

Wir setzen voraus
- ein abgeschlossenes Hochschulstudium
- das zürcherische oder ein gleichwertiges Diplom für das Höhere Lehramt
- Unterrichtserfahrung auf Stufe Gymnasium

Unser Sekretariat erteilt gerne Auskunft über die Anstellungsbedingungen und die nötigen Formalitäten: Tel. 01 933 08 16 (Frau Glatz), Fax 01 933 08 10, E-mail regina.glatz@kzo.ch.

Wir erwarten Ihre Bewerbung bis zum 15. Februar 2002 an die Kantonsschule Zürcher Oberland, Frau R. Glatz, Bühlstrasse 36, 8620 Wetzikon.

www.kzo.ch
Das Gymnasium im Zürcher Oberland

DAVOS
SPORT-GYMNASIUM
www.sportgymnasium.ch

Aussergewöhnliche Schule sucht aussergewöhnliche Lehrer/innen

Das Schweizerische Sport-Gymnasium Davos (SSGD) sucht zur Ergänzung seines Lehrerteams sportbegeisterte Lehrkräfte, die einen Hochschulabschluss und den Ausweis für das Höhere Lehramt besitzen.

Auf Beginn des neuen Schuljahres (19. August 2002) sind folgende Unterrichtspensen zu besetzen:

Französisch	mind. 12 Lektionen
Englisch	mind. 7 Lektionen
Geschichte	10 Lektionen

Mit zusätzlichen Betreuungsaufgaben im Wohnheim können die Arbeitspensen ergänzt werden.

Wir bieten interessante Anstellungsbedingungen und die Herausforderung, eine junge und unkonventionelle Schule mitzutragen und weiterzuentwickeln. Ihre vollständige Bewerbung erwarten wir gerne bis am 24. Februar 2002 an die folgende Adresse:

Schweizerisches Sport-Gymnasium Davos, z. Hd. Herrn U. Winkler, Rektor, Grüenistrasse 1, 7270 Davos Platz

Für weitere Informationen wenden Sie sich bitte an Urs Winkler, Rektor SSGD, Tel. 081 410 01 70.

DIE SCHWEIZERSCHULE MADRID (CSM)

sucht auf den **1. September 2002** folgende Lehrpersonen mit deutscher Muttersprache:

1 Gymnasiallehrer/in

für **Geografie** mit Zusatzqualifikation in **Mathematik** und/oder **Physik** und/oder **Chemie** und/oder **Biologie** und/oder als **Sekundarlehrer/in phil. II** (s. unten)

1 Gymnasiallehrer/in

für **Deutsch** und evtl. **Geschichte** für den Unterricht mit Fremdsprachigen

1 Sekundarlehrer/in phil. II

vorwiegend für Mathematik, Naturwissenschaften mit **Lizenziat/Doktorat in Geografie**

Die Stellen für Geografie sowie Mathematik und Naturwissenschaften auf der Sekundarstufe I können auch im JOBSHARING besetzt werden.

Wir erwarten:

- mehrjährige Unterrichtserfahrung
- Anpassungs- und Integrationsfähigkeit
- Teambereitschaft, überdurchschnittliches Engagement
- Bereitschaft, bis zum Stellenantritt Spanisch zu lernen

Wir bieten:

- Gehalt gemäss Besoldungsordnung CSM
- dreijährigen Anfangsvertrag
- bezahlte Hin- und Rückreise sowie eine Übersiedlungspauschale

Für Auskünfte sowie die Zustellung von **Bewerbungsformularen** und erste Informationen wenden Sie sich bitte an:

Colegio Suizo de Madrid Tel. 00 34 91 650 58 18
E-mail: secretaria.csm@cospa.es Fax 00 34 91 650 59 89
oder an Herrn Jakob Geier, Erziehungsdepartement des Kantons Schaffhausen, Tel. 052 632 72 85,
E-Mail: jakob.geier@ktsh.ch.

Wir freuen uns auf Ihre Kontaktaufnahme!

Nachdiplomkurs

Prozessbegleitung im Schulbereich

Berufsbegleitende Aus-/Weiterbildung für Personen mit beratenden Funktionen in pädagogischen Kontexten.

Universität Zürich
Fachstelle für Weiterbildung
Gloriastrasse 18a, 8006 Zürich
Tel. 01 634 29 94
www.weiterbildung.unizh.ch

Die **SCHWEIZERSCHULE MEXIKO**
sucht für das Schuljahr 2002/03:

eine Gymnasiallehrkraft für Mathematik und Physik und eine Sekundarlehrkraft phil. II für die Hauptschule in Mexiko-Stadt

Wir erwarten:

- einige Jahre Unterrichtserfahrung
- Anpassungs- und Integrationsfähigkeit
- Bereitschaft, bis zum Stellenantritt (Ende August) Spanisch zu lernen

Wir bieten:

- Gehalt gemäss Besoldungsordnung der Schweizerschule Mexiko
- einen dreijährigen Anfangsvertrag
- bezahlte Hin- und Rückreise sowie eine Übersiedlungspauschale

Weitere **Auskünfte** erteilt:
Ambros Hollenstein, Direktor Schweizerschule Mexiko, Tel. 0052 55 43 78 65, E-Mail: df.direccion@csm.edu.mx

Bewerbungsunterlagen und Informationsmaterial sind erhältlich bei: Wolf Wagner, Oberrenggstrasse 14a, 8135 Langnau, Tel. 01 771 80 33, E-Mail: wolfyalicia@bluewin.ch

Die **Bewerbungen** sind bis spätestens 1. Februar einzureichen an:
A. Hollenstein, c/o P. Oberson, Postfach, 9043 Trogen

Arbeitsplatz

kanton**schwyz**

Erziehungsdepartement

Die **Kantonsschule Kollegium Schwyz** sucht auf Beginn des Schuljahres 2002/2003 (19. August 2002)

2 Lehrpersonen

für die Fächer
Englisch in Verbindung mit einem anderen Fach
Mathematik und Physik

Anforderungen:
- abgeschlossenes Hochschulstudium
- pädagogische und didaktische Kompetenzen
- Diplom für das Höhere Lehramt

Wir sind eine moderne Schule mit sehr guter Infrastruktur und führen ein Gymnasium und eine Handelsmittelschule mit Berufsmatura. Rund 50 Lehrkräfte unterrichten über 400 Schülerinnen und Schüler.

Weitere Auskünfte über Aufgaben, Arbeitsumfeld und Anstellungsbedingungen erteilt Ihnen gerne der Rektor der Kantonsschule Kollegium Schwyz, Herr René Oechslin, Postfach 2195, 6431 Schwyz, Tel. 041-819 77 00, E-Mail: oechslin@kks.ch, an den Sie bitte auch Ihre Bewerbung mit Lebenslauf, Foto, Zeugniskopien und Referenzen bis zum **31. Januar 2002** richten wollen.

Im Herbst 2002 wird die Internatsführung am Gymnasium Friedberg Gossau neu strukturiert. Aus diesem Grund suchen wir per 1. August 2002 (oder früher) eine geeignete Person für die

Internatsleitung

am Gymnasium Friedberg Gossau

Das Gymnasium Friedberg ist eine traditionsreiche, private Mittelschule katholischer Prägung, die etwa 200 Schülerinnen und Schüler zur eidgenössisch anerkannten Maturität führt. Das angeschlossene Internat kann bis zu 15 Studierende aufnehmen und wird während 5 Wochentagen betreut (eine Wochenendbetreuung durch auswärtige Gasteltern wäre denkbar). Die ausgeschriebene Stelle als Internatsleiter umfasst ein Halbpensum.

Interessiert?
Sie verfügen über eine pädagogische Ausbildung mit einem für die Jugendbetreuung geeigneten Abschluss. Ein Abschluss im Höheren Lehramt gibt Ihnen die Möglichkeit, ein Unterrichtspensum zu übernehmen. Damit können Sie ein Vollpensum erreichen. Sie besitzen eine natürliche Autorität, die Sie befähigt, mit den Jugendlichen zwischen 13 und 20 Jahren einen familiären Umgang zu pflegen, aber auch das richtige Mass an Ordnung und Disziplin zu fordern. Sie freuen sich über die Möglichkeit, im gleichen Haus wie die Internen zu wohnen und ihnen Studiumshilfe anbieten zu können. Selbstverständlich arbeiten Sie in Ihrem Amt eng mit Ihrem Stellvertreter zusammen, sowie auch mit dem Seelsorger. **Interessiert?**

Nun bitten wir Sie gerne um Ihre schriftliche Bewerbung mit den üblichen Unterlagen (inkl. Passbild) an **Gymnasium Friedberg Gossau**, Postfach, 9201 Gossau. Unser Rektor, Herr Ewgeni Obreschkow, erteilt Ihnen gerne nähere Auskünfte (071 388 53 53).

Wir suchen auf Beginn
des neuen Schuljahres
(19. August 2002)

1 Hauptlehrer/-in

für

Wirtschaftsfächer

mit abgeschlossener Hochschul-
Ausbildung und HLA.

- Unterricht in den wirtschaftswissenschaftlichen Fächern am Gymnasium und an der Handelsmittelschule (Vollpensum).
- Wir legen Wert auf eine menschlich ausgeglichene Persönlichkeit, die in unser Lehrerteam (40 Lehrpersonen) passt und Freude am Umgang mit Jugendlichen im Alter von 15 bis 20 Jahren hat.
- Gehalt gemäss kantonaler Besoldungsverordnung.

Wir freuen uns auf Ihre Bewerbung, die bis spätestens Mitte Februar 2002 in unserem Besitz sein sollte. Für zusätzliche Auskünfte stehen wir Ihnen gerne zur Verfügung (ab 7. 1. 2002).

Rektorat der Schweizerischen Alpinen Mittelschule
7270 Davos Platz
Telefon 081 410 03 11
Fax 081 410 03 12

SAMD
SCHWEIZERISCHE ALPINE MITTELSCHULE DAVOS
Guggerbachstrasse 2 Postfach CH-7270 Davos Platz
Telefon 081 410 03 11 Fax 081 410 03 12
Internet: www.samd.ch
E-Mail: info@samd.ch

Die Evangelische Mittelschule Schiers (EMS) sucht auf Schuljahr 02/03

Gymnasiallehrer/in

für Englisch (3/4 - Vollpensum) ev. mit Funktion im Internat.

Wir suchen eine teamfähige, dynamische Lehrkraft mit Unterrichtserfahrung auf allen Stufen des Gymnasiums, abgeschlossenem Studium und dem Diplom für das Höhere Lehramt oder einer gleichwertigen Qualifikation.

Wir sind eine regionale Mittelschule (540 SchülerInnen) mit Untergymnasium, Gymnasium, 3-jähriger Diplommittelschule und angeschlossenem Internat. Englisch ist Schwerpunktfach, besonders motivierte SchülerInnen werden im «Förderkurs» unterrichtet. Wir bereiten auch auf die Cambridge Examen FCE, CAE und PCE sowie aufs APIEL vor. Wir bieten zeitgemässe Entlohnung, Möglichkeiten zur Weiterbildung, gute Infrastruktur und angenehmes Klima in Fachschaft und Kollegenkreis.

Im Bereich Internat gilt es eine Hausvorstand-Stelle neu zu besetzten. Als Hausvorstand beaufsichtigen und betreuen Sie ca. 20 Jugendliche. Sie leben in einer Dienstwohnung im Internat. Sie arbeiten im Internatsteam von fünf Personen. – Die beiden Aufgaben sind kombinierbar.

Interessiert? Für weitere Informationen besuchen Sie unsere Homepage www.ems-schiers.ch oder wenden sie sich an Direktor Chr. Brosi (081 328 11 91).

Ihre Bewerbung senden Sie bitte mit den üblichen Unterlagen bis am 22.02.02 an Chr. Brosi, Evangelische Mittelschule Schiers, 7220 Schiers.

Evangelische Mittelschule Schiers
7220 Schiers, Telefon 081 328 11 91, Fax 081 328 24 06
admin@ems-schiers.ch, www.ems-schiers.ch

Gymnasium Burgdorf

auf Beginn des Schuljahres 2002/2003
ist eine Lehrstelle in

Geographie

zu besetzen (unbefristete Anstellung, 70–100%, Quarta bis Prima)

Auskünfte erteilt Dr. Jürg Wegmüller, Rektor (034 / 422 26 72)

Anmeldung bis 15. Februar 2002 an:
Gymnasium Burgdorf
Rektorat
3400 Burgdorf

Gymnasium Helveticum

Zeitschrift für die schweizerische Mittelschule
Revue de l'enseignement secondaire suisse
Rivista della scuola secondaria svizzera

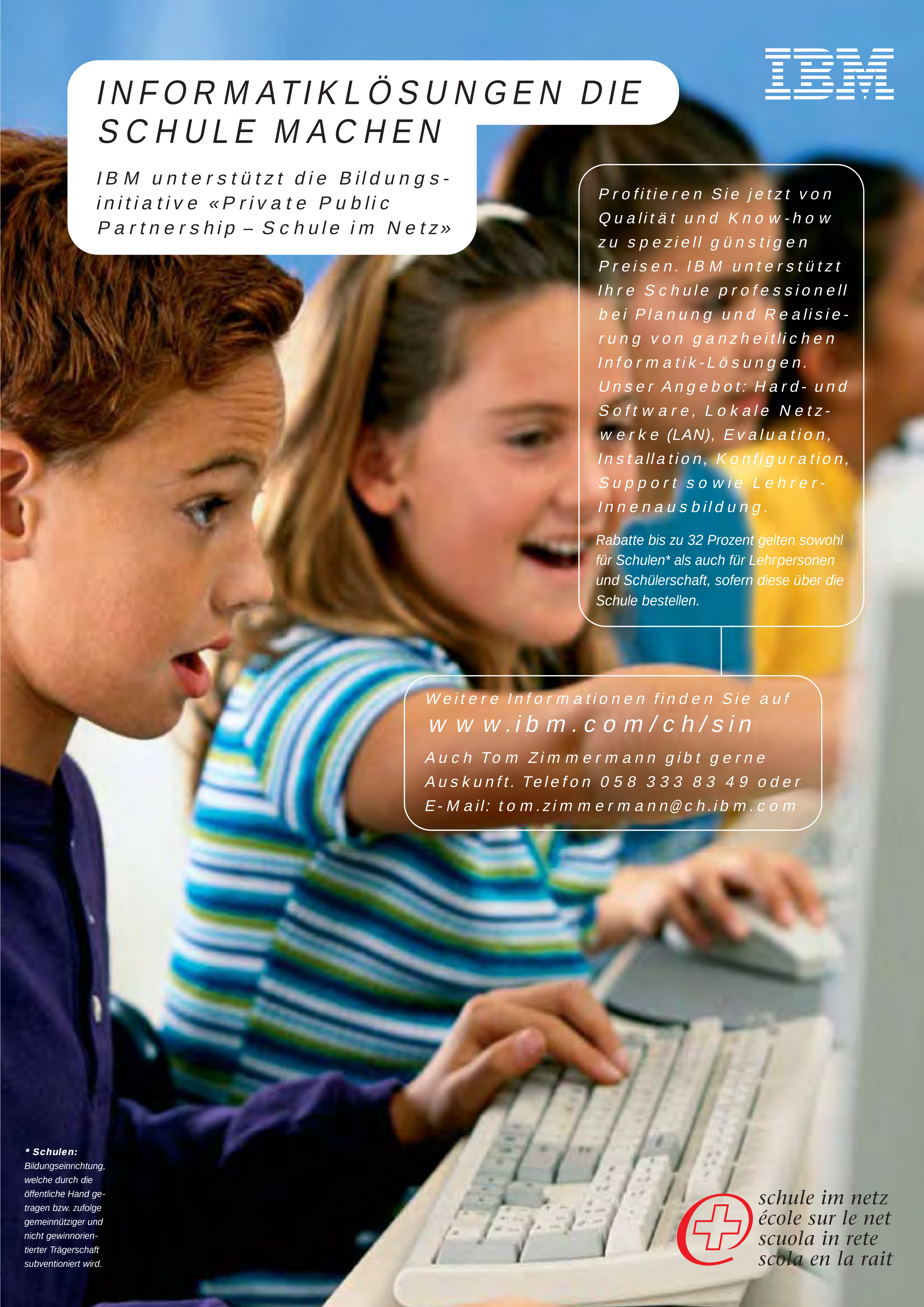
56. Jahrgang 2002 ISSN 0017-5951

Erscheint 6x jährlich / Paraît tous les deux mois:
22. 1., 4. 3., 10. 5., 21. 6., 11. 9., 30. 10.

Herausgeber / Éditeur
Verein Schweizerischer Gymnasiallehrer (VSG)
Société suisse des professeurs de l'enseignement secondaire (SSPES)
Società svizzera degli insegnanti delle scuole secondarie (SSISS)

Sekretariat / Secrétariat
VSG / SSPES, Postfach 8742, 3001 Bern, Tel. 031 311 07 79, Fax 031 311 09 82
Internet: http://www.vsg-sspes.ch

Verlag / Édition
VSG – SSPES
Postfach 8742, CH-3001 Bern, Tel. 031 311 07 79, Fax 031 311 09 82


IBM
INFORMATIKLÖSUNGEN DIE SCHULE MACHEN
IBM unterstützt die Bildungsinitiative «Private Public Partnership – Schule im Netz»
Profitieren Sie jetzt von Qualität und Know-how zu speziell günstigen Preisen. IBM unterstützt Ihre Schule professionell bei Planung und Realisierung von ganzheitlichen Informatik-Lösungen. Unser Angebot: Hard- und Software, Lokale Netzwerke (LAN), Evaluation, Installation, Konfiguration, Support sowie Lehrer-Innenausbildung.
Rabatte bis zu 32 Prozent gelten sowohl für Schulen* als auch für Lehrpersonen und Schülerschaft, sofern diese über die Schule bestellen.
Weitere Informationen finden Sie auf
www.ibm.com/ch/sin
Auch Tom Zimmermann gibt gerne Auskunft. Telefon 058 333 83 49 oder E-Mail: tom.zimmermann@ch.ibm.com
* Schulen: Bildungseinrichtung, welche durch die öffentliche Hand getragen bzw. zufolge gemeinnütziger und nicht gewinnorientierter Trägerschaft subventioniert wird.
schule im netz
école sur le net
scuola in rete
scola en la rait

COMPUTER FÜR DIE SCHULE

business partner

Netzwerke – Schulungen – Support

Die Letec AG bietet Ihnen bei der Planung und Realisation von Netzwerklösungen einen umfassenden Service:

- Begleitung bei der Informatik Einführung, bei Umstellungen und Ausbau
- Individuelle Lösungen bei Finanzierungsproblemen
- Schulkonforme Konfiguration mit komplettem Datei- und Sicherheitsmanagement
- Lieferung und Installation von Hard- und Software
- Einführung und Schulung der Lehrkräfte vor Ort

letec www.letec.ch ag

Hard- und Software zu Schulpreisen (Hewlett-Packard/Apple) für den Schulbereich | Beratung und Konzept | Lieferung und Installation | Netzwerkadministration Win NT/2000, ASIP/Mac OS X | Schulanpassung | Kompetenter Service und Beratung, Win- und Mac-Plattform

Letec Schwerzenbach
Stationsstr. 53, 8603 Schwerzenbach
Tel. 01 908 44 66, Fax 908 44 22

Letec Bern
Kramgasse 46, 3011 Bern
Tel. 031 312 58 85, Fax 312 53 05

Letec Chur
Kalchbühlstrasse 18, 7000 Chur
Tel. 081 250 13 53, Fax 250 13 56

Letec Oberentfelden
Bahnhofstr. 4, 5036 Oberentfelden
Tel. 062 723 05 55, Fax 723 05 63

Letec Sargans
Grossfeldstrasse 18, 7320 Sargans
Tel. 081 710 01 44, Fax 710 01 45

Letec Schaffhausen
Im Hägli 2, 8207 Schaffhausen
Tel. 052 643 66 67, Fax 643 33 70

Letec St. Gallen
Schützengasse 4, 9000 St. Gallen
Tel. 071 228 58 68, Fax 228 58 69

Letec Zürich
Weinbergstrasse 24, 8001 Zürich
Tel. 01 253 60 10, Fax 253 60 11

Hotline 0900 57 60 37 Fr. 3.13 Min.

http://shop.letec.ch