Lehren –
zwischen Belehrung und Lernbegleitung

Didaktische Hintergründe und empirische Untersuchung zum

Lehrverständnis und dessen Umsetzung im mathematischen Erstunterricht

Abhandlung
zur Erlangung der Doktorwürde
der Philosophischen Fakultät
der
Universität Zürich

vorgelegt von
Kurt Hess
von
Engelberg/OW

angenommen auf Antrag von
Herrn Prof. Dr. Kurt Reusser und Herrn Prof. Dr. Urs Ruf

2002

Susanne, Tabea und Damian

gewidmet

Einige Personen unterstützten mich während des Entstehens dieser Arbeit wohlwollend. Allen voran danke ich meiner Frau Susanne Hess-Breitenmoser für das Verständnis, das sie mir während der ganzen Zeit entgegenbrachte.

Bei der empirischen Untersuchung war ich auf die Bereitschaft von Lehrerinnen angewiesen, mir ein Stück ihrer Arbeitswelt zu zeigen. Denjenigen, die ich in ihrem Unterricht filmen durfte, spreche ich besondere Anerkennung aus.

Eine bereichernde Unterstützung erfuhr ich durch Herrn Prof. Dr. Dr. h.c. Erich Ch. Wittmann von der Universität Dortmund. Er stand mir mehrmals beratend zur Seite und gab mir zusammen mit Herrn Prof. Dr. Gerhard N. Müller, Prof. Dr. Heinz Steinbring und Frau Dr. Anna S. Steinweg wertvolle Hinweise zur Vorbereitung und Auswertung der Videostudie.

Frau lic. phil. Dora Luginbühl codierte zur Kontrolle einige Videobänder und stellte dafür nicht nur einen Teil ihrer Weihnachtsferien frei. Herr Dr. Rolf Kugler gab mir wertvolle schreibdidaktische Ratschläge und Frau lic. phil. Christa Kaufmann übernahm die Korrekturarbeiten.

Herr Dr. Fritz Staub vom Pädagogischen Institut der Universität Zürich beriet mich in statistischen Belangen und in der Studie zu den didaktischen Einstellungen. Hinter dem ganzen Projekt stand schliesslich Herr Prof. Dr. Kurt Reusser, der mich während fünf Jahren begleitete.

Alle erwähnten Personen trugen massgeblich zum Gelingen dieser Arbeit bei. Herzlichen Dank!

Eine leserfreundliche Kurzfassung dieser Arbeit erscheint im Frühling 2003 im h.e.p.-Verlag Bern.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Fragestellung und Zielsetzung

Die Mathematik-Didaktik erforscht und entwickelt Voraussetzungen, Rahmenbedingungen und Ziele des Lehrens und Lernens im Mathematik-Unterricht (Wittmann, 1998a, S. 330). Sie hinterfragt eingespielte Traditionen und stellt ihnen alternative Sichtweisen und neue Lernkulturen gegenüber. Die aktuellen Topoi und Trends der Lehr-/Lernphilosophie verfolgen zentrale Themen unter diversen Theoriesträngen und Labels: Lernen lernen, Selbststeuerung und Selbstregulation, Kindorientierung, Adaptivität und Dezentrierung des Unterrichts, Erhaltung der intrinsischen Motivation, Aufbau von Lernstrategien, aktive Wissenskonstruktionen und soziales Lernen sind tragende Kategorien dieses modernen Lehr-/Lernbegriffs.

Die Mathematik-Didaktik führt mit verschiedenen wissenschaftlichen Bezugsdisziplinen[1] durch ihre Landschaft. *Eine* interdisziplinär angelegte Leitschiene verläuft vom behavioristischen zum konstruktivistischen Paradigma und vermochte eine breite fachdidaktische Wende auszulösen. Lernende werden darauf „*nicht mehr als Objekte der Belehrung, sondern als Subjekte ihres Lernens aufgefasst*. Mit Recht ist dieser Paradigmenwechsel als kopernikanische Wende der Didaktik bezeichnet worden, da jetzt das *Lernen*, nicht mehr das Lehren im Mittelpunkt steht" (Müller, Steinbring & Wittmann, 1997, S. 44)[2].

Didaktisch-konstruktivistische Ansätze füllen den Lehrbegriff mit neuen Bedeutungen: mit der Gestaltung substanzieller Lernumgebungen, dem Aufbau von Lern- und Kommunikationskulturen und der Begleitung individueller Lernprozesse. Die Ausrichtung distanziert sich vom Belehren, vom Erklären in kleinen Schritten und vom Üben isolierter Schwierigkeiten. Sie kritisiert am traditionellen, behavioristisch orientierten Mathematik-Unterricht, dass die Lernverantwortung einseitig bei der Lehrerin[3] liege und der Schüler eine passive Rolle ausübe.

---

[1] Die m.E. wichtigsten Bezugsdisziplinen sind: Pädagogik, Allgemeine Didaktik, verschiedene Bereiche der Mathematik, Lernpsychologie, Pädagogische Psychologie, Kognitionspsychologie, Entwicklungspsychologie, Neurophysiologie und Philosophie (vgl. Wittmann, 1995b, S. 1-5).

[2] Die kursive Schreibweise entspricht dem Original. Im Folgenden gebe ich die Zitate im authentischen Schriftsatz wieder, mit Ausnahme von Fettdruck und Unterstreichungen. Beide werden kursiv gefasst. Ich führe nach der Zitation lediglich von mir gesetzte Abweichungen an.

[3] Bei den Lehrpersonen wähle ich neben der geschlechtsneutralen Form vorwiegend die weibliche, da diese in der untersuchten Zielgruppe die Mehrheit ausmacht. Bei Schülern wechselt die weibliche und männliche Form in loser Folge ab. Ohne zusätzlicher Vermerke sind mit der gewählten Form jeweils beide Geschlechter gemeint.

Die Hauptfragen der vorliegenden Arbeit lauten:

Inwiefern ...

- stimmt die didaktische Einstellung von praktizierenden Unterstufen-Lehrerinnen[4] mit einer konstruktivistisch orientierten Mathematik-Didaktik überein?
- setzen Lehrerinnen eine solche didaktische Orientierung im Unterricht um?

Die Fragen liegen auf der Schnittstelle zwischen den konstruktivistischen Botschaften des Lehrmittels *Das Zahlenbuch*[5] und der didaktischen Einstellung von Unterstufen-Lehrerinnen, die seit dem Schuljahr 1998/1999 mit diesem Lehrmittel arbeiten. Die Dortmunder Mathematik-Didaktiker E.Ch. Wittmann und G.N. Müller senden seit einigen Jahren didaktisch-konstruktivistische Impulse an die Unterrichtspraxis und legen ihre Position in den *Handbüchern produktiver Rechenübungen* (Wittmann & Müller, 1992, 1993), im Lehrwerk Zahlenbuch, in Publikationen und in Weiterbildungskursen dar. Mich interessiert, inwiefern sich die didaktische Einstellung der Lehrerinnen mit der Ausrichtung des Lehrmittels deckt und wie sie die Botschaften im Unterricht umsetzen.

Im Frühling 1998 stellte der Kanton Thurgau den Lehrpersonen der Unterstufe frei, ob sie weiterhin das traditionelle kantonale Rechenbuch (Kuratle, 1988) nutzen oder auf das Zahlenbuch umsteigen. Die Einführung des neuen Lehrmittels löste Fragen aus, die ich in drei empirisch zu überprüfende Komplexe gliedere.

Drei Fragenkomplexe

Das erste Forschungsinteresse bezieht sich auf das mathematik-didaktische *Lehr- und Lernverständnis* von rund 100 Thurgauer Unterstufen-Lehrerinnen und die Frage, ob ihr Belief-System[6] konstruktivistisch oder behavioristisch ausgerichtet ist: „Wie konstruktivistisch sehen Unterstufen-Lehrerinnen die eigene Rolle und diejenige der Schülerinnen?" – „Unterscheidet

---

[4] Im Kanton Thurgau unterrichten Primar-Lehrerinnen in den Klassen eins bis sechs und die Unterstufen-Lehrerinnen in den Klassen eins bis drei.

[5] Im Folgenden bezeichne ich *Das Zahlenbuch 1* abgekürzt als Zahlenbuch und beziehe mich auf die Schweizer Überarbeitung von Hengartner und Wieland (1995).

[6] *Belief* wird vielfältig in die deutsche Sprache übersetzt: kognitive Einstellung, Einschätzung, Meinung, Sichtweise, Überzeugung oder Verständnis (vgl. Pehkonen, 1994a, 1994b). *Belief-System* drückt aus, dass einzelne Beliefs (scheinbar zusammenhangslose Meinungen) theoretischen Konstrukten (wie z.B. dem Konstruktivismus) zugeordnet werden können. Synonym mit *didaktische Belief-Systeme* verwende ich *didaktische Einstellung*, *didaktische Orientierung* und *Einstellungskonzept*.

sich das Belief-System der Umsteigerinnen[7] von demjenigen der Lehrerinnen, die weiterhin mit einem traditionellen Lehrmittel arbeiten?“ – „Lässt sich der Umstieg durch eine spezifische didaktische Orientierung begründen?“ – „Hat der Interventionscharakter des eingeführten Lehrmittels eine Veränderung der Einstellung zur Folge?“

Der zweite empirische Untersuchungsteil beleuchtet Aspekte der konkreten *Unterrichtsgestaltung*. Die Fragen sind vorerst an die Beschreibung des Unterrichts gerichtet: „Wie sieht die Unterrichtsgestaltung mit dem Zahlenbuch und diejenige mit dem traditionellen Rechenbuch aus?“ – „Sind lehrmittelbezogene Unterschiede bezüglich Differenzierung und Lernbegleitung der Schüler auszumachen?“ – Die Analyse schenkt den Qualitäten und Quantitäten der Interaktionen zwischen Lehrpersonen und Schülern besondere Aufmerksamkeit: „Was tut die Lehrerin, wenn sie die Schüler bei ‚Stillarbeitsphasen‘ unterstützt, begleitet oder ihnen hilft?“ – „Geht sie auf die Lern- und Denkwege der einzelnen Schüler ein oder reisst sie sie aus ihrem Konzept und belehrt mit ‚besseren‘ Vorschlägen?“ – Charakteristischer Unterschied dieser beiden Möglichkeiten ist der rote Faden, an dem sich die Interaktion orientiert: Entweder wird dieser aus Äusserungen oder Eigenproduktionen des Schülers aufgenommen und weiter verfolgt oder er entspringt dem Denken der Lehrperson und nimmt keinen Bezug zum Lernprozess des Schülers. In dieser Teilfrage ermittle ich, ob die eine oder andere Variante in Interaktionen mit unterschiedlich starken Rechnern dominiert und ob die Dauer der Lehrerinnenhilfe vom Leistungsvermögen der Schüler abhängt.

Der dritte Komplex bezieht sich auf die *mathematischen Leistungsfortschritte der Schülerinnen*. Einige aktuelle Forschungsergebnisse bestätigen (Hengartner & Röthlisberger, 1994, 1995; Moser Opitz, 2001; Selter, 1993, 1995b), was Lehrerinnen in ihrem eigenen Unterricht erleben: Die Schüler verfügen bei Schuleintritt über unterschiedliche und teilweise erstaunlich hohe mathematische Kompetenzen. Ich frage nach den Leistungsfortschritten im Verlauf der ersten Klasse: „Profitieren Schüler im behavioristisch und konstruktivistisch orientierten Unterricht unterschiedlich?“ – „Sind nach einem Schuljahr Unterschiede in der mathematischen Kompetenzerweiterung auszumachen, wenn Vergleichsgruppen nach den Kriterien *Lehrmittel* oder *Belief-System* der Lehrerin gebildet werden?“

[7] *Umsteigerinnen* bezeichnet Lehrpersonen, die vom traditionellen kantonalen Lehrmittel aufs Zahlenbuch umgestiegen sind bzw. zum Zeitpunkt t1 (März 1998) vor dem Wechsel standen.

Forschungsrelevanz der Arbeit

Die Dortmunder Mathematik-Didaktiker richten eindeutige Handlungsempfehlungen an einen innovativen Mathematik-Unterricht. Einige dieser Impulse sind aus wissenschaftlich konzipierten Unterrichtsprojekten (z.B. Scherer, 1995a; Selter, 1994a) und klinischen Unterrichts- und/oder Interview-Situationen gewachsen (z.B. Hollenstein, 1996; Krauthausen, 1994; Röhr, 1995). Allerdings zeichnen sie Bilder zeitlich befristeter Unterrichtsrealitäten, d.h. von einem an Forscher und Forscherinnen gebundenen, von ihnen gelenkten und unterstützten Unterricht. Sie geben kaum Aufschluss darüber, in welchem Ausmass der mathematik-didaktische Trend mit dem Einstellungskonzept der Lehrpersonen korrespondiert und in eine Alltagsdidaktik integriert ist. Im deutschsprachigen Raum ist nicht erforscht, inwiefern ein konstruktivistischer Unterricht umgesetzt wird bzw. sich auf feiertägliche Unterrichtsprojekte beschränkt.

Praxisrelevanz

Mein Projekt ist aus der Forschungstradition der Mitglieder des Projektes „mathe 2000“ gewachsen. Es möchte einen kritischen und konstruktiven Beitrag zur Festigung und Weiterentwicklung dieser innovativen Didaktik leisten. Insbesondere ziehe ich einige (fach-)didaktische Schlussfolgerungen, die an Primarlehrpersonen, Studierende, Ausbildner und Weiterbildnerinnen gerichtet sind. Mit etwas didaktischer Fantasie lassen sich auf Grundlage der theoretischen und empirischen Kontexte didaktische Bezüge zu spezifischen Aus- und Weiterbildungssituationen bzw. zu einer stufen- und fächerübergreifenden Unterrichtspraxis herstellen.

1.2 Inhaltsübersicht

Das *Kapitel 2* greift die Debatte zwischen dem traditionellen und dem konstruktivistischen Lehr-/Lernverständnis auf. Mit den radikal konstruktivistischen Argumenten hinterfrage ich behavioristische und abbildtheoretische Vorstellungen mit philosophischen Positionsbezügen, neurophysiologischen Grundlagen und Aspekten aus Piagets genetischer Erkenntnistheorie. Wichtige Nebenbemerkung: Die Hintergründe behalten ihren Status von Erkenntnistheorien und versuchen nicht, eine (Fach-)Didaktik zu begründen.

Die gewählte Beschränkung orientiert sich an Argumenten, die in *Kapitel 2.2* ein eigenes didaktisch-konstruktivistisches Paradigma abstecken und die Beziehungen im didaktischen Dreieck definieren lassen. Das *Kapitel 2.3* beschreibt Leitlinien eines konstruktivistischen Unterrichts und bringt zum Ausdruck, dass eine organisatorische Beschreibung nicht genügt, um ihn zu charakterisieren.

In *Kapitel 3* ziehe ich Forschungsergebnisse aus dem deutschsprachigen Raum heran. Sie leuchten den Forschungsstand zum mathematischen Anfangsunterricht aus, indem sie die bisherigen Ausführungen differenzieren und ergänzen. *Kapitel 3.1* zeigt auf, dass sich aktuelle Forschungsfragen an einer konstruktivistischen Didaktik orientieren. *Kapitel 3.2* stellt die äusserst unterschiedlichen mathematischen Kompetenzen der Schulanfänger dar und bespricht mögliche didaktische Konsequenzen. In *Kapitel 3.3* kommen Forschungsergebnisse aus wissenschaftlich begleiteten Unterrichtsversuchen und klinischen Interviews zur Darstellung. Sie beinhalten den Einsatz von Anschauungsmaterialien, das Lernen via Eigenproduktionen von Schülern, Schreibanlässe im Mathematik-Unterricht und aktiv-entdeckendes Lernen mit schwachen Rechnern. Die referierten Arbeiten sind ein eigentliches Pamphlet gegen einheitliche Lehrgänge, die möglichst tief einsetzen und in kleinen Schritten vorwärts führen. *Kapitel 3.4* beschreibt die Konzeption des Zahlenbuchs als beispielhaftes Ergebnis einer didaktischen Entwicklungsforschung. Die Botschaft des Lehrwerks fasst wesentliche didaktisch-konstruktivistische Argumente zusammen und macht inhaltlich konkrete Aussagen zu einem modernen Mathematik-Unterricht.

Kapitel 4 erhellt die Veränderung von Einstellungen und die Erweiterung didaktischer Handlungskompetenzen. Nach begrifflichen Klärungen beschreibt *4.1.2* das in Forschungsfenster A eingesetzte Messinstrument *Einstellungen im Mathematikunterricht* (Staub & Stern, 1998). *4.1.3* liefert Begründungen, warum zwischen Einstellung und Handlung Diskrepanzen bestehen können. Im Hinblick auf die Analyse didaktischer Handlungen nehme ich unter *4.1.4* eine wichtige Differenzierung vor: Einstellungskonzepte sind emotional eingebundene kognitive Orientierungen, die nicht zwangsläufig aus der Handlung „ablesbar“ sind, auch dann nicht, wenn entsprechende Kompetenzen vorhanden wären. Die Unterscheidung zwischen gezeigtem Verhalten (Performanzen) und verfügbaren Kompetenzen spielt auch in *Kapitel 4.2*, welches der Veränderung von Einstellung und Handlung nachgeht, eine bedeutende Rolle.

Kapitel 5 übersetzt die aufgeworfenen Fragestellungen in einen dreigliedrigen empirischen Untersuchungsplan. Mit der Bezeichnung „Forschungsfenster“ kommt zum Ausdruck, dass die Forschungsinstrumente keine Realität erfassen, sondern beobachtbare Bausteine aus individuellen Konstruktionen herauslösen. Im ersten empirischen Forschungsfenster A *(Kapitel 5.2)* analysiere ich die Einstellungskonzepte von Unterstufen-Lehrerinnen. Die Intervention bestand auf Seite der Treatmentgruppe aus dem Umstieg aufs Zahlenbuch, während die Kontrollgruppe mit einem traditionellen Lehrmittel arbeitete. Die Erhebung der didaktischen Einstellung überprüft, ob sich die Umsteigerinnen konstruktivistischer orientieren als die Lehrerinnen der Kontrollgruppe und ob sich der Lehrmittelwechsel mit der didaktischen Orientierung begründen lässt. Die Datenbasis aus der zweiten Messung lässt Fragen beantworten, die an die *Veränderung* von Einstellungskonzepten gerichtet sind. Die Untersuchungseinheit schliesst mit der qualitativen Auswertung eines Interviews mit Lehrerinnen erster Klassen.

Das zweite empirische Fenster nimmt sich in *Kapitel 5.3* den didaktischen Handlungen von Lehrerinnen während Mathematik-Lektionen mit ersten Klassen an. Es interessieren die Instruktionen der Aufgabenstellungen, die praktizierten Differenzierungsformen und die Art der Lehrerinnenhilfe. Ich ergänze die Darstellung der Ergebnisse mit Resultaten aus einer Fragebogen-Erhebung, welche die Vorbereitung und Durchführung der Lektion und den Umgang mit den Lehrmitteln betreffen.

Die in *Kapitel 5.4* dargestellte Untersuchungseinheit C vergleicht die mathematische Kompetenzerweiterung der Schülerinnen aus Treatment- und Kontrollgruppe. Im Anschluss an den Vortest geben die Lehrerinnen Auskunft, welche didaktischen Konsequenzen sie aus den Testergebnissen ziehen.

2 Konstruktivistische Grundzüge und didaktische Konsequenzen

„Wer sich zum Konstruktivismus bekennt, ist nicht nur ‚in', er darf sich auch eines weitläufigen Kreises (scheinbar) Gleichgesinnter erfreuen" (Reusser, 1999a, S. 1). Der offensichtliche Trend hat verschiedene Wissenschaftsdisziplinen wie z.B. die Kognitions- und Lernpsychologie sowie Fachdidaktiken erfasst. Die folgende Darstellung spiegelt die Grundzüge konstruktivistischer Erkenntnistheorien und kontrastiert sie mit abbildtheoretischen und behavioristischen Auffassungen.

2.1 Konstruktivismus als Erkenntnistheorie

2.1.1 Kontrastierung mit der Abbildtheorie und dem Behaviorismus

In der Abbildtheorie entsteht Wissen und Erkenntnis im menschlichen Geist analog dem Bild der tabula rasa (leere Wachstafel), welche von aussen beschrieben werden muss, damit sie sich mit Inhalt füllt. Das erkennende und lernende Subjekt bleibt passiv und gelangt durch einen rezeptiven[8] Vorgang – im Sinne eines Einbrennens oder Einprägens – zu Erkenntnis. Da die äussere sinnliche Erfahrung die einzige Quelle des Wissens ist (Hollenstein, 1996, S. 96), spielt die Reizvermittlung die entscheidende Rolle für das geistige Wachstum des Lerners.

Die abbildtheoretische Position, die dem Empirismus angehört, ist durch einen naiven Realismus gekennzeichnet: *Der Mensch erkennt die Welt so, wie sie ist.* Weil es keinen Unterschied zwischen der äusseren (ontologischen) Realität und der subjektiven Erfahrungs- oder Interpretationswelt gibt, vermag der Lerner über die Sinnesorgane eine objektive Realität eins zu eins in seinem Geist abzubilden (vgl. Abb. 1). Der Erkenntnisvorgang reduziert sich auf die passive Reizaufnahme und assoziative Verknüpfung in der Vorstellung. Dem erkennenden Subjekt wird keine intentionale Steuerung und kognitive Strukturbildung zugesprochen (Diesbergen, 1998, S. 24-26; Reusser, 1994a, S. 23-25).

Für den Empiristen scheint es für das Sehen ...

> einer bestimmten Sache zunächst *ganz und gar auf die Art der äusseren Einwirkung anzukommen.*

---

8 Rezeptiv bezeichnet die Empfänglichkeit oder Aufnahmefähigkeit für Sinneseindrücke. Ich gebrauche den Begriff in seiner empiristischen Bedeutung und beziehe ihn auf einen passiven Lerner oder Reizempfänger.

Dinge wie das *unbeschriebene Blatt*, auf dem die Feder des Schreibers ihre Spuren hinterlässt, die *Wachstafel,* in die man allerlei Zeichen „eindrücken“ kann, und später natürlich vor allem die *Lichtbild-Platte* werden seit JOHN LOCKE die bevorzugten Vergleichsbilder des sehenden Auges und des wahrnehmenden Menschen überhaupt. Sein *eigener* Beitrag zum Sehen scheint sich, von der Blickrichtung abgesehen, darauf zu beschränken, dass er fähig ist, von den ihn treffenden Vorgängen *„Eindrücke“ oder sonstige Spuren zu empfangen und zu bewahren*. (Metzger, 1975, S. 16)

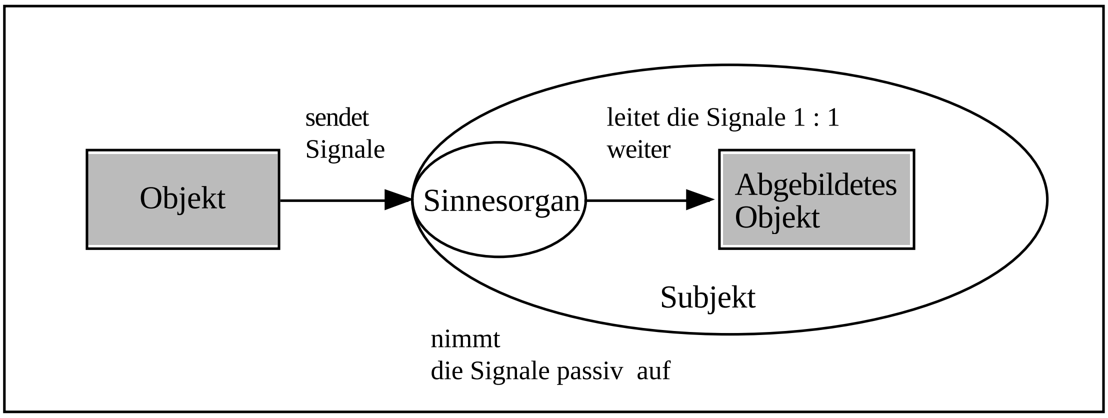


Abbildung 1: Passive Wahrnehmung als Quelle der Erkenntnis nach abbildtheoretischer Auffassung (vgl. Diesbergen, 1998, S. 25)

Eine bereits angesprochene Annahme der Abbildtheoretiker betrifft die Assoziativität des Denkens. Der Einzelne bildet Sinneseindrücke nach beliebigen, von aussen bestimmten Prinzipien im Gehirn ab und verknüpft die Vorstellungselemente assoziativ.

Was sich verbindet und wie fest und dauerhaft die Verbindung wird, scheint wieder *ganz von äusseren Bedingungen*, vor allem von dem *gleichzeitigen Eintreffen* der „Reize“ und von der *Wiederholung* ihres Zusammentreffens abzuhängen. Der Mensch ist eigentlich *nur der geduldige Schauplatz*, auf dem sich all das abspielt. (ebd.)

Die abbildtheoretische Erkenntnisauffassung begründete John Locke (1632-1704), sie wurde im sensualistischen Empirismus des 18. Jahrhunderts durch David Hume und später durch John Stuard Mill und Herbert Spencer vertreten. Sie lieferte der Entwicklung des Behaviorismus im 20. Jahrhundert eine erkenntnistheoretische Grundlage (Fatke, 1979, S. 299).

In der heutigen mathematik-didaktischen Diskussion schlagen Abwehrhaltungen gegenüber der Abbildtheorie durch. Hendrik Radatz (1993, S. 6) zieht im Artikel *Ikomanie* ein Fazit:

Spätestens seit Piaget ist es relativ unumstritten, dass eine noch so „anschauliche“ Methode über

> Darstellungen und Bilder Grundschulkinder nicht zu sinnvollen Vorstellungen von mathematischen Begriffen und Beziehungen führen kann. Erkenntnis und Wissen beruhen stets auf operativen Vorgängen bzw. aktiven Prozessen, in denen das Kind sein vorhandenes Wissen nutzt, um Einsichten zu konstruieren.

Weidenmann (1989) betont ebenfalls, dass „kopierflutig“ abgegebene Veranschaulichungen noch nicht garantieren, dass sie anschliessend im Geiste des Einzelnen als Anschauung[9] leben.

> Das Prinzip ist: Ich präsentiere dem Lerner die angestrebte Anschauung external, quasi als fertiges Modell, und sorge dafür, dass er sie übernimmt. (...) Der Lernvertrag „Wenn du tust, was ich für dich geplant habe, dann wirst du erfolgreich lernen“ ist also ein sehr zweifelhaftes Versprechen des Lehrenden. Vor allem aber ist dieses Versprechen pädagogisch leichtsinnig, weil es den Lernenden aus seiner Verantwortlichkeit weitgehend entlastet. Genau besehen ist dieser Lernvertrag ein *Verwöhnungsvertrag*. (...) Er verfolgt die Utopie vom Schlaraffenlernen. (ebd., S. 12)

Behaviorismus

Auch im Behaviorismus[10] erfolgt Lernen über Sinnesreize, Fremdsteuerung, assoziatives Lernen, mechanische Wiederholung und Verstärkung (vgl. Pawlow, 1972; Skinner, 1974/1978). Gerhard Steiner (1996, S. 274-275) illustriert an einem Beispiel, dass abbildtheoretische und behavioristische Annahmen nicht von gestern, sondern didaktisch gegenwärtig sind. Er beschreibt den didaktischen Ansatz einer Lehrerin, die sich auf assoziatives Verknüpfen und die Vermittlung von sinnlich wahrnehmbaren Reizen stützt. Frau Braun führt die 8er-Reihe über einen „süssen“ Weg ein. Sie legt Honigbiskuits vor, 8 passen genau in eine Schachtel. Sie beschriftet mit den Schülern jeden gefüllten Karton als Station der 8er-Reihe.

> Sicherheitshalber wurde noch abgezählt, bevor man „24“ als dritte Station der Reihe auf ein Kärtchen schrieb: 24, und man sagte dazu oder dachte dabei: 3 x 8 = 24. Die drei Schachteln sollten zu *einem* Block, jede neue unterhalb der vorangegangenen, auf den Tisch gelegt und nebendran jeweils mit dem richtigen Ergebnis markiert werden: 8, 16, 24 usw.

---

9 Weidenmann (1989, S. 11) bezieht sich auf den Anschauungsbegriff von Comenius (17. Jh.) und versteht darunter die innere (mentale) Repräsentation eines Lerngegenstandes.

10 Die bekanntesten Vertreter behavioristischer Lerntheorien waren Edward L. Thorndike (1874-1949), Iwan P. Pawlow (1849-1936) als Vater der klassischen Konditionierung (Reiz-Reaktionslernen durch Reizsubstitution) und Burrhus F. Skinner (1904-1990), der bedeutende Beiträge in Richtung operanter Konditionierung leistete (Lernen durch Verstärkung). Didaktisch angewandte Einführungen in behavioristische Lerntheorien sind in Buth (1995, Kap. 1), Joerger (1975, Kap. 1) und Steiner (1996, Kap. 1 und 3) zu finden.

> Als man bei 80 angelangt war, konnte man die ganze Reihe hersagen. Einzelne Kinder sprechen sie vor, dann wurde sie auch an die Tafel und von dort ins Heft geschrieben, und wer jedesmal leise mitgesprochen hatte, der konnte mit Sicherheit schon die Hälfte der Reihe auswendig, so bis 5 x 8 oder 6 x 8! Die Lehrerin, Frau Braun, legte Wert darauf, dass auch mit den Schachteln geübt wurde: Immer wieder durfte ein Kind die Schachteln hinlegen und dazu sprechen: „1 x 8 = 8, 2 x 8 = 16“ usw., bis alle 10 schön dalagen. Die Schachteln sollten nicht aufeinandergetürmt sondern untereinander gelegt werden, weil das die Übersicht erhöhte. Dann durften alle ein vorbereitetes Blatt bemalen, auf dem die 10 Schachteln mit den je 8 Biskuits vorgedruckt waren. Die ersten 8 wurden dunkelbraun, die zweiten hellbraun angemalt, damit man die 8er-Pakete deutlich voneinander unterscheiden konnte. Frau Braun hatte dazu eigens neue hellbraune Farbstifte verteilt; die Freude der Kinder war gross, konnte man die Farbe doch auch für das Kolorieren anderer Dinge gut gebrauchen. Natürlich musste zu jeder der bemalten Schachteln die passende Rechnung mit dem entsprechenden dunkel- oder hellbraunen Stift geschrieben werden. Die letzten fünf Minuten dieser Einführungslektion galten einer, wie man sagt, spielerischen Vertiefung: Die Kinder begannen zunächst im Chor noch einmal: „1 x 8 = 8, 2 x 8 = 16, 3 x 8 = 24, 4 x 8 = 32“, und so weiter bis „10 x 8 = 80“. Dann machte es die Lehrerin schwieriger: Sie wischte an der Wandtafel, wo alle Rechnungen standen, das Ergebnis von 3 x 8, also 24, aus, und wieder begannen die Schüler im Chor: „1 x 8 = 8, 2 x 8 = 16, 3 x 8 = 24 ...“ – „Das könnt ihr schon wunderbar“, lobte Frau Braun und wischte zwei weitere Resultate, nämlich 40 und 72 weg. Lautstark ging es los: „1 x 8 = 8“, nur bei 9 x 8 wurde die Lautstärke und das Unisono des jungen Arithmetikerchores etwas schwächer. Die einen zogen es vor, lieber nichts Lautes zu sagen, andere entschieden sich für 74 und wieder andere zogen durch mit 9 x 8 = 74! Genau dann läutete die Pausenglocke, und das war nicht einmal die grösste Belohnung; es gab nämlich für jeden der famosen Rechner ein Biskuit, eine positive Verstärkung für 9 x 8 = 72 oder 74 oder auch „Mhm?“, je nachdem, wofür man sich gerade hatte entschliessen können, und da in der Pause ein spannendes Spiel die Hauptbeschäftigung war, war auch dafür gesorgt, dass die letzte arithmetische Reaktion, eben das Resultat für die 9 x 8-Rechnung mit keiner andern arithmetischen Überlegung mehr interferierte und so mit dem zuletzt gewussten, erahnten oder auch verschwiegenen Ergebnis assoziiert blieb.

Steiner (ebd., S. 275-276) schält aus diesem didaktischen Ansatz behavioristische Merkmale:

- Frau Braun setzt auf die Attraktivität des Materials (Biskuits).
- Ihr ist die übersichtliche Anordnung der Elemente in den Schachteln wichtig.
- Sie schaut auf die deutliche Wahrnehmbarkeit der Resultate. Sie schreibt sie auf und legt sie der Reihe nach neben jede Schachtel.

- Die Schüler wiederholen die Rechensätze mehrmals laut und leise, um sie einzuprägen.
- Die Lehrerin belohnt richtige Ergebnisse mit Biskuits.

Die Lehrerin konfrontiert die Schüler mit einer – ihres Erachtens – günstigen Stoffsegmentierung und erwartet, dass sie *das* wahrnehmen und lernen, was ihrer Absicht entspringt. Sie setzt auf die Attraktivität des Materials, das mechanische Wiederholen und die materielle Verstärkung, damit die Lerner die Reize mit richtigen Resultaten assoziieren. „Wer peinlicherweise die 56 nicht mit der 7 und der 8 zusammen abgespeichert hat und auch nicht abrufen kann, ist eben kein guter Rechner; umgekehrt gilt als guter Rechner, wer die richtigen Assoziationen rasch und korrekt abrufen kann“ (ebd., S. 276-277). Für den Aufbau mathematischer Strukturen taugt das assoziative Verknüpfen nicht. Solange Resultate nicht als abrufbares Wissen zur Verfügung stehen, sondern „berechnet“ werden müssen, bleibt nur der Weg über mechanisches Abarbeiten übrig. Die Reiz-Reaktions-Kette beim Abspulen der Reihe gleicht dem Aufsagen eines Gedichtes: Ein Satz wirkt als auslösender Reiz für den nächsten, ein Zahlensatz ruft den nächsten hervor (vgl. Aebli, 1994, S. 303). Als weiteres Argument für die Untauglichkeit des Assoziationslernens im Mathematik-Unterricht führt Steiner diejenigen Schüler an, die nach genanntem Ergebnis bange auf die Reaktion der Lehrerin warten. Sie möchten von ihr erfahren, *ob* ihr Resultat richtig oder falsch sei, nicht aber, *warum* (ebd., S. 277).

Auch Wittmann (1993a) wendet sich im Artikel *Wider die Flut der „bunten Hunde“ und der „grauen Päckchen“* gegen Übungsangebote des elementaren Mathematik-Unterrichts, die auf ein Reiz-Reaktions-Lernen setzen. Übungen mit grauen Päckchen und bunten Hunden sollen den Kindern das Üben versüssen. Sie bestehen aus willkürlich zusammengestellten Rechnungen, z.B. ergänzt mit mosaikartigen Bildern, auf denen die Resultate der Rechnungen bereits in den einzelnen Feldern eingetragen sind. Wenn das Kind eine Aufgabe richtig gelöst hat, findet es das Ergebnis auf dem Bild wieder und darf das entsprechende Feld – zur Belohnung – mit der angegebenen Farbe ausmalen. Aus Wittmanns didaktischer Bewertung derartiger Übungsmaterialien greife ich einen Aspekt[11] heraus, der zum didaktischen Ansatz von Frau Braun zurückführt: Die Attraktivität des Ausmalens eines Bildes (als externale Verstärkung) und die dabei vermeintlich stattfindende Selbstkontrolle. Wittmann fragt zu Recht: “Was ist

[11] Die Kritik an einem kleinschrittigen und Schwierigkeiten segmentierenden Unterricht ist im selben Artikel (Wittmann, 1993a) untergebracht und gehört ebenso zum rezeptiven und behavioristischen Assoziationslernen. Sie ist im Kapitel 3.1 (Kritik am traditionellen Anfangsunterricht) zusammengefasst.

das für eine ‚Selbstkontrolle', wenn der Schüler nur eine in das Material eingebaute Lösungskontrolle anwendet?" (ebd., S. 159). Der Schüler bekommt keine Gelegenheit, durch aktives Überprüfen und Vergleichen zu erkennen und dadurch neue Einsichten zu gewinnen. Er verlässt sich auf die farbliche Stimmigkeit des ausgemalten Bildes und bekommt als Rückmeldung Reize vermittelt, die kaum etwas mit dem operativen Kern der Rechnungen zu tun haben. Das Ausmalen ist blosses Tätigsein und die illustrative Wirkung kann sich auf keine operative Struktur beziehen, da die Rechnungen willkürlich zusammengestellt sind und lediglich ein Abarbeiten von Einzelaufgaben verlangen. Die passive[12] Rolle des Schülers kommt ganz nach behavioristischer Manier zum Ausdruck: „Der Lernende setzt nur seine Sinne ein, öffnet sozusagen Augen und Ohren und versucht nachzuahmen, was ihm vorgemacht wird, bleibt aber ansonsten passiv. Er lässt sich gewissermassen wie ein Schiff beladen" (ebd., S. 157).

Der Behaviorismus ist vielerorts in ein schlechtes Licht gerückt, da er dem lernenden Individuum die Rolle des reagierenden Reizbeantworters zuweist. Der Theorie halte ich mit Reusser (1999c, S. 69-70) zu Gute, dass sie wertvolle Beiträge im Bereich des Aufbaus und der Stabilisierung von Verhaltensmustern, sozialen Verhaltensweisen und der Ausformung von Fertigkeiten und Gewohnheiten leistet. Wenn ich im Folgenden von Lernen und Lernverhalten spreche, so meine ich damit verstehensbasierte Lernprozesse (Einsicht gewinnen, Operationsverständnis aufbauen), die sich nicht mit Reiz-Reaktions-Mustern erklären lassen.

So lange in der Psychologie ein positivistisch[13]-naturwissenschaftliches und behavioristisches Denken vorherrschte, blieben Fragen nach den internalen Steuerungsmechanismen und der Entwicklung kognitiver Strukturen ausgeklammert. Die Introspektion galt als nicht objektiv nachvollziehbar und fand daher keine Anerkennung (Reusser, 1983, S. 170). „Damit wurde für Jahrzehnte die Frage nach der *Struktur des inneren Menschen* aus der sich allein als wissenschaftlich verstehenden experimentellen Psychologie ausgeschlossen" (ebd.). Was sich im einzelnen Individuum abspielt, interessierte nicht, das Primat galt den verhaltenssteuernden

---

[12] Wittmann (1993a, S. 157) veranschaulicht den Unterschied zwischen der passivistischen und der aktivisitischen Grundposition des Lehrens und Lernens mit einer Metapher von Plutarch (46-120 n. Chr.): „Der Geist ist kein Schiff, das man beladen kann, sondern ein Feuer, das man entfachen muss".

[13] Eine Anekdote von Buth (1995, S. 6-7) illustriert, was die positivistische Grundhaltung kennzeichnet: „Zwei Naturwissenschaftler fahren im zeitigen Frühjahr mit der Bahn. Plötzlich sagt der eine: ‚Sehen Sie mal da draussen! Die Herde ist schon frisch geschoren.' Worauf der andere antwortet: ‚Jedenfalls auf der uns zugewandten Seite'".

Reizen und den von aussen sichtbaren Reaktionen.

Erst nach der von Piaget eingeläuteten kognitiven Wende in den siebziger Jahren hat sich das Forschungsinteresse auf die kognitive Strukturbildung des sich entwickelnden, lernenden und nach Erkenntnissen suchenden Individuums gerichtet. Jegliche konstruktivistischen Erkenntnistheorien gehen mit Piaget einig, dass die kognitive Struktur in aktiver Auseinandersetzung mit der äusseren Realität erzeugt und nicht passiv empfangen wird (Diesbergen, 1998, S. 162).

2.1.2 Konstruktivistische Argumente

Ich verfolge zwei konstruktivistische Argumentationslinien mit unterschiedlicher Ausrichtung[14]. Der radikale Konstruktivismus – mit den bekannten Vertretern Heinz von Foerster, Ernst von Glasersfeld und Paul Watzlawick – liegt in der Linie einer philosophischen Erkenntnistheorie (Epistemologie). Piagets strukturgenetischer Ansatz vertritt kognitionspsychologische Argumente einer empirisch-sozialwissenschaftlichen Epistemologie.

Konstruktivistische Argumente im radikalen Konstruktivismus

Der radikale Konstruktivismus[15] wendet sich in seiner philosophisch-erkenntnistheoretischen Ausrichtung gegen den naiv-realistischen Empirismus, auf dem behavioristische Lerntheorien und die Abbildtheorie gründen. Im Mittelpunkt steht die Auffassung, dass es auf der einen Seite eine ontologische – vom Subjekt unabhängige – Wirklichkeit gebe und auf der andern eine subjektive Erlebensseite. Die zentrale These lautet, „dass unser Wissen, unsere Erkenntnisse und die Wirklichkeit, die wir erleben und in der wir leben, unsere subjektiven Konstruktionen sind“ (Diesbergen, 1998, S. 192), die wir aktiv erzeugen. Folglich gehen wir nicht mit der Wirklichkeit, sondern mit unseren Erfahrungswirklichkeiten um. Mit anderen Worten: Wir bilden mit unseren Sinnesorganen keine äussere Realität ab, sondern interpretieren, konstruieren und repräsentieren subjektive Erfahrungen (vgl. Abb. 2). „Wirklichkeit ist damit immer

[14] Reusser (1999a, S. 7) schlägt vor, die zahlreichen Spielarten des Konstruktivismus in eine philosophisch-erkenntnistheoretische und eine empirisch-sozialwissenschaftliche Ausrichtung einzuteilen. Gerstenmaier & Mandl (1995) nehmen eine ähnliche Strukturierung vor: Erkenntnis- und Wissenschaftstheorie als philosophische Ausrichtung und „neuer“ Konstruktivismus als soziologische, kognitionswissenschaftliche und psychologische Zugänge. In einer dritten Kategorie führen sie konstruktivistische Ansätze der Instruktionspsychologie und der empirischen Pädagogik an.

[15] Eine Spezifizierung der verschiedenen konstruktivistischen Ansätze leiste ich im Rahmen dieser Arbeit nicht. Eine gute Übersicht gibt Diesbergen (1998).

kognitiv konstruierte Wirklichkeit“ (Gerstenmaier & Mandl, 1995, S. 868).

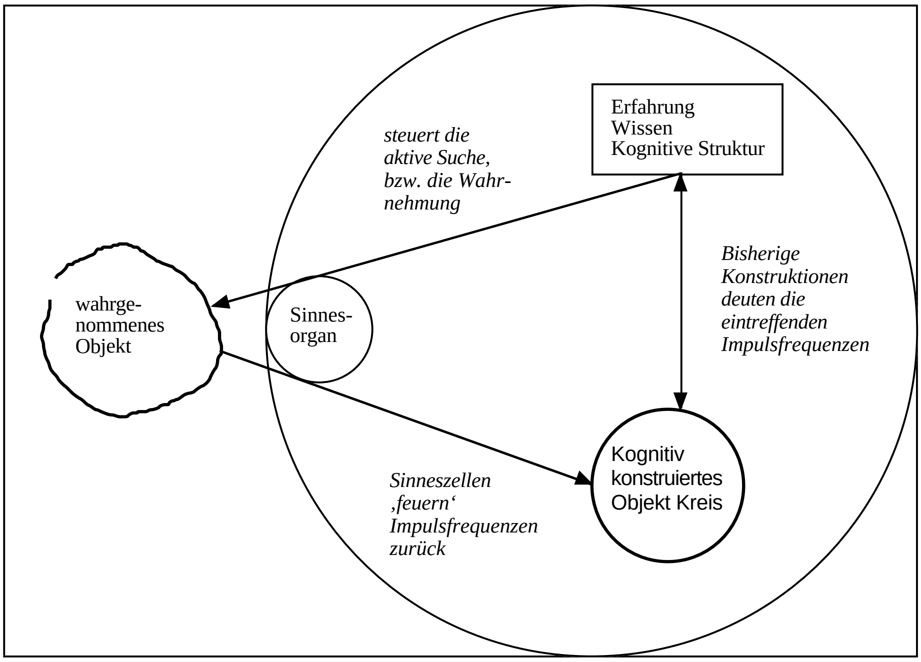


Abbildung 2: Wahrnehmung und Erkenntnisgewinn als aktive Konstruktionsleistung des Subjekts

Von Glasersfeld (1998a, S. 12) hält den Realisten entgegen, mit der Vermittlerrolle der Sinnesorgane sei das unlösbare Problem der Wahrhaftigkeit in das Wahrnehmungsschema (sensu Piaget) eingebaut, „denn niemand wird je imstande sein, die Wahrnehmung eines Gegenstandes mit dem postulierten Gegenstand selbst, der die Wahrnehmung verursacht haben soll, zu vergleichen“. Es ist also unmöglich, eine ontologische Realität zu prüfen, da sie mit subjektiven, erlebnisgebundenen Modellen oder Wahrnehmungsschemata erfolgt. Das heisst nicht, dass die Konstruktionen einer Beliebigkeit unterworfen sind, denn der einzelne Konstruktionsakt wird „eingeschränkt durch die bereits vorhandenen Konstrukte, welche die Basis für neue bilden, und andererseits können die konstruierten Konzepte und Theorien an der Erfahrung scheitern“ (Diesbergen, 1998, S. 28), d.h. an der erlebten und sozialen Auseinandersetzung mit der ontologischen Realität.

Die Güte von Konstruktionen wird nicht an der Wahrheit, sondern an deren Bewährung (Viabilität) gemessen. Das funktionale Kriterium der Viabilität bezeichnet die Brauchbarkeit der individuellen Wahrnehmungen, Begriffe oder Theorien „im Bereich der Erlebenswelt und des zielstrebigen Handelns“ (von Glasersfeld, 1998a, S. 22). Es können unterschiedliche viable

Interpretationen und Konstruktionen in gleicher Weise das Gütekriterium der Bewährung erfüllen, bis sie an der ontologischen Realität scheitern (ebd., 1998b, S. 30). „Das heisst, etwas wird als ‚viabel' bezeichnet, solange es nicht mit etwaigen Beschränkungen oder Hindernissen in Konflikt gerät" (ebd., 1998a, S. 19). Nach radikal-konstruktivistischer Auffassung kann keine Erkenntnis zu Stande kommen, die Gewissheit darüber gibt, wie die Welt ist, sondern allenfalls wie sie *nicht* ist (Diesbergen, 1998, S. 29).

Das funktionale Verhältnis zwischen den subjektiven Konstruktionen und der ontologischen Realität stellen verschiedene radikal-konstruktivistische Autoren mit Metaphern dar:

> Ein blinder Wanderer, der den Fluss jenseits eines nicht allzu dichten Waldes erreichen möchte, kann zwischen den Bäumen viele Wege finden, die ihn an sein Ziel bringen. Selbst wenn er tausendmal liefe und alle die gewählten Wege in seinem Gedächtnis aufzeichnete, hätte er nicht ein Bild des Waldes, sondern ein Netz von Wegen, die zum gewünschten Ziel führen, eben weil sie die Bäume des Waldes erfolgreich vermeiden. Aus der Perspektive des Wanderers betrachtet, dessen einzige Erfahrung im Gehen und zeitweiligen Anstossen besteht, wäre dieses Netz nicht mehr und nicht weniger als eine Darstellung der bisher verwirklichten Möglichkeiten, an den Fluss zu gelangen. Angenommen der Wald verändert sich nicht zu schnell, so zeigt das Netz dem Waldläufer, wo er laufen kann; doch von den Hindernissen, zwischen denen alle diese erfolgreichen Wege liegen, sagt es ihm nichts, als dass sie eben sein Laufen hier und dort behindert haben. In diesem Sinn „passt" das Netz in den „wirklichen" Wald, doch die wirkliche Umwelt, die der blinde Wanderer erlebt, enthält weder Wald noch Bäume, wie ein aussenstehender Beobachter sie sehen könnte. Sie besteht lediglich aus Schritten, die der Wanderer erfolgreich gemacht hat, und Schritten, die von Hindernissen vereitelt wurden. (von Glasersfeld, 1998a, S. 19)

Der Wanderer, der sein subjektives Bild des Waldes durch Ausprobieren verschiedener Wege konstruiert, weiss nie, wie der Wald – als Ausschnitt der ontologischen Realität – wirklich aussieht. Sein Wissen über den Wald hat instrumentellen Charakter, es ist Werkzeug für die Auffindung eines gangbaren Weges an den Fluss. Der Blinde kann sich einen Plan des Waldes konstruieren, weil er an Bäumen anstösst und von ihnen beim Fortschreiten gestört (perturbiert) wird. Die Kenntnis des Waldes besteht für ihn aus erfahrenen Folgen seines Laufens.

> Er erlebt den Wald sozusagen als die Gesamtheit jener Stellen eines Erlebensgebietes, die nicht begehbar sind, weil seinem Gehen da ein Hindernis entgegensteht (daher die ursprüngliche und durchaus buchstäbliche Bedeutung des Wortes „Gegenstand"). Solange Gehen die einzige Erfahrensdi-

> mension des Waldläufers ist, kann er Bäume, Steine, Wald, Boden und worauf sonst er stossen mag, überhaupt nicht anders beschreiben, als in Ausdrücken des Widerstandes, des Gehemmtwerdens, des Scheiterns. (ebd. S. 20)

Die Perturbationen sind für den Läufer wichtig, damit er Wege finden und nutzen kann. Mit jedem neu erkundeten und kognitiv konstruierten Weg wird sein Plan über den Wald differenzierter und es öffnen sich Weg-Kombinationen und Abkürzungen. Die Wissenserweiterung betrifft lediglich die Begehbarkeit des Waldes, und nicht, wie der Wald oder die Widerstände erzeugenden Gegenstände wirklich sind.

Konstruktivistische Argumente und ihre neurophysiologische Begründung

Heinz von Foerster (1998) stützt die Theorie des radikalen Konstruktivismus mit neurophysiologischen Argumenten ab. Er führt das Prinzip der undifferenzierten Codierung der sinnlichen Wahrnehmung an:

> Die Erregungszustände einer Nervenzelle codieren *nur* die Intensität, aber *nicht* die Natur der Erregungsursache. Codiert wird nur: „Soundsoviel an dieser Stelle meines Körpers“, aber nicht ein „Was“. Oder anders ausgedrückt, der Signalfluss, der von den etwa hundert Millionen Sinneszellen dem Hirn zuströmt, trägt keinen Hinweis auf irgendwelche Eigenschaften jenseits dieser Zellen, ausser dass sie an bestimmten Stellen der Körperoberfläche gereizt wurden. (ebd., S. 58)

Von Foerster erklärt den neurophysiologischen Hintergrund am Beispiel einer elektromagnetischen Strahlung, die von einer Lichtquelle ausgeht und von einer lichtempfindlichen Sinneszelle (Stäbchen) auf der Netzhaut absorbiert wird. Die Absorption verändert das elektrochemische Potenzial des Stäbchens, was elektrische Entladungen auf hinter der Netzhaut liegende Neuronenverbände auslöst. Die Frequenz der Entladungen entspricht der Intensität der absorbierten Strahlung, sie enthält aber keine Information über die elektromagnetische Art des ursprünglichen Reizes. Dasselbe gilt auch für andere Sinneszellen. Sie sind alle „blind“ bezüglich der Reizqualität und sprechen nur auf deren Intensität an. Die Weiterleitung erfolgt in Form von unterschiedlich frequentierten Erregungen.

> Das mag erstaunlich sein, sollte aber nicht überraschen, denn tatsächlich gibt es ja „da draussen“ weder Licht noch Farbe, es gibt lediglich elektromagnetische Wellen; es gibt „da draussen“ weder Schall noch Musik, es gibt nur periodische Schwankungen des Luftdrucks; „da draussen“ gibt es weder Wärme noch Kälte, es gibt nur Moleküle, die sich mit mehr oder minder grosser mittlerer ki-

> netischer Energie bewegen, usw. ... Schliesslich gibt es „da draussen" ganz gewiss keinen Schmerz. (ebd., 1999, S. 44)

Nervenzellen (Neuronen) bestehen aus einem Zellkörper, einer längeren Nervenfaser (Axon) und zahlreichen feinen Verästelungen (Dendriten). Die Verästelungen des Axons führen zu den Dendriten anderer Neuronen, sind aber durch den synaptischen Spalt von diesen getrennt. Sobald die elektrische Ladung in den Dendriten von einem äusseren Reiz über eine Schwelle hinaus gestört wird, „'feuert' das Neuron und überträgt diese Störung längs des Axons" (ebd., S. 50) nicht direkt ins Gehirn, sondern zunächst zu dessen Endpunkten, den Synapsen. In den synaptischen Spalten werden die periodischen Entladungen über Transmittersubstanzen – welche den synaptischen Spalt ausfüllen – weitergeleitet. Die chemische Zusammensetzung der Transmittersubstanz spielt eine entscheidende Rolle für die Fortsetzung der einlaufenden Erregung: Entweder wird sie gehemmt oder verstärkt. Die synaptischen Spalten lassen sich als sensible Zentren für endogene Veränderungen auffassen, ähnlich den Sinneszellen, welche eine Sensitivität gegenüber Veränderungen der äusseren Umwelt zeigen. „Da wir nur über 100 Millionen Sinneszellen verfügen, unser Nervensystem aber an die 10 000 Milliarden Synapsen enthält, sind wir gegenüber Änderungen unserer inneren Umwelt 100 000 mal empfänglicher als gegenüber Änderungen in unserer äusseren Umwelt" (ebd., S. 51).

Mit diesem neurophysiologischen Vergleich weist von Foerster auf die Überlegenheit der innengerichteten Sensitivität des Nervensystems gegenüber den Sinneszellen hin und begründet damit die subjektseitige Konstruktion von Erkenntnis.

Die wesentlichen neurophysiologischen Fakten betreffen:

- Das Nervensystem leitet keine qualitativen Reizinformationen von der Sinneszelle zur Hirnrinde, sondern eine unspezifische Intensität in Form von Impulsfrequenzen[16].
- An den Schaltstellen, den synaptischen Spalten schwächen oder verstärken Transmittersubstanzen die Frequenzen. Das gestörte Aktionspotenzial einer Sinneszelle gelangt also

[16] Von Foerster (1998, S. 57) veranschaulicht die undifferenzierte Sprache des Nervensystems mit einem Experiment, das „die verstärkten Entladungen zu einem Lautsprecher führt, so dass die Folge von Entladungen jetzt als eine Folge von ‚Klicks' hörbar wird. Je nach der Reizstärke hört man dann ein langsames ‚Klick-Klick ...' oder ein rapides ‚Krrrrrrrr ...', die universelle Sprache der Neuronen. Studiert man die Aktivität von Sinneszellen anderer Modalitäten, so erhält man das erstaunliche Resultat, dass die Erregungszustände unabhängig von der physikalischen oder chemischen Natur des Reizes sind und nur auf die Verschiedenheit der Reizintensität ansprechen".

nicht in derselben Frequenz ins Gehirn, wie es von ihr ursprünglich als elektrochemischer Erregungszustand gefeuert wurde.

- Die eigentliche Wahrnehmung erfolgt nicht in den Sinnesorganen, sondern in spezifischen sensorischen Hirnregionen. Wir sehen nicht mit dem Auge, sondern in den visuellen Zentren des Gehirns. Wahrnehmung als Interpretation von bedeutungsfreien neuronalen Prozessen ist subjektive Konstruktion (vgl. Abb. 2).

Ich komme zurück zur philosophischen Frage, wie der Mensch Erkenntnis erzeugt. Nachdem die undifferenziert codierten Informationen in der Hirnrinde angelangt sind, muss eine Entschlüsselung oder eine subjektive Interpretation dieses Reizes von „da draussen“ erfolgen. Von Foerster (1999, S. 44) stellt die grundlegende und ungelöste Frage: „Wie bringt unser Gehirn die überwältigende Vielfalt dieser bunten Welt hervor, die wir in jedem Augenblick des Wachens und manchmal auch im Traum erfahren? Hier liegt das Problem des Erkennens, die Suche nach einem Verständnis der Erkenntnisprozesse.“

Die Erklärung der radikalen Konstruktivisten erfolgt über die Autopoiese[17], die der neurophysiologischen These von Maturana und Varela (1987) folgt, das Nervensystem sei einschliesslich des Gehirns ein informationell geschlossenes System, das sich selbst erzeuge und keinen direkten Zugang zur Welt finde. Kognitionen sind daher *selbstreferenziell* und *selbstexplikativ:* Erkenntnis und Wissen erzeugt der Kopf des denkenden Menschen autonom, ohne unmittelbare Einflussnahme durch soziale oder andere Systeme der ontologischen Welt (von Glasersfeld, 1998b, S. 37). Mit dieser Annahme bietet der radikale Konstruktivismus Angriffsmöglichkeiten in Richtung ontologischer Beliebigkeit und Solipsismus[18]. Von Glasersfeld (1994a, S. 404) entgegnet, dass die ontologische Realität nicht geleugnet, sondern ins Konzept der Viabilität einbezogen sei. Dennoch verstehen die radikalen Konstruktivisten das einzelne Lebewesen als einen autonomen Prozess und handeln sich damit berechtigte Kritiken ein: „Das handelnde und beobachtende Subjekt wird damit nicht nur zum Agens und Movens seiner Entwicklung, sondern gleichzeitig auch zur letztmöglichen Bezugsgrösse jeglichen Erfassens und Erzeugens von Wirklichkeit“ (Reusser, 1999a, S. 3).

---

[17] Den Begriff Autopoiese (gr. autos = selbst, poiein = machen) bringen die Neurobiologen Humberto Maturana und Francesco Varela (1987) in den Radikalen Konstruktivismus.

[18] Solipsismus bezeichnet, dass nur die kognitiv konstruierte Erlebensseite des Subjektes als existierend gilt.

Da sich die Mathematik-Didaktik auch mit sozialen Systemen befasst, stützt sie sich bevorzugt auf den sozialen Konstruktivismus, sozio-kulturelle Theorien und systemische Ansätze (vgl. Diesbergen, 1998). Die ersten beiden relativieren und integrieren die philosophischen Argumente des radikalen Konstruktivismus und sehen die soziale Interaktion als entscheidende Quelle zur Erkenntnis. „Individuell ablaufende Denkprozesse werden als verinnerlichte Zwiegespräche, als Dialog im menschlichen Geist aufgefasst" (Hollenstein, 1996, S. 72). Die für die Mathematik-Didaktik viel versprechenden sozio-kulturellen Theorien (Vygotzky, 1974, Wertsch, 1991) gehen stärker von der Ko-Konstruktion des Wissens aus, welche durch gegenseitiges Darstellen, Begründen, Vergleichen und Verstehen erfolgen kann.

Die zweite konstruktivistische Argumentationslinie entspringt der strukturgenetischen Theorie von Jean Piaget. Dieser betont ebenfalls, dass Erkenntnis von der Handlung ausgehe und subjektabhängig sei.

Konstruktivistische Argumente in der strukturgenetischen Theorie von Piaget

Je nach darzustellendem Zusammenhang gilt Piaget als naturwissenschaftlich denkender Kognitions- und Entwicklungspsychologe, als erkenntnistheoretisch interessierter Philosoph oder als Wissenschaftstheoretiker. Ebenso betrachterspezifisch wird seine sozialwissenschaftlich bahnbrechende Theorie mit strukturgenetischer[19] Epistemologie oder konstruktivistischer Kognitions- und Entwicklungstheorie überschrieben. Seine konstruktivistische Sichtweise offenbart er in Buchtiteln wie beispielsweise in *La construction du réel chez l'enfant* (dt.: der Aufbau der Wirklichkeit beim Kinde; ebd., 1937/1974)[20], oder in *Introduction à l'épistémologie génétique* (dt.: Einführung in die genetische Erkenntnistheorie; ebd., 1950a, 1950b, 1950c). Ich trage einige Charakteristiken zusammen, die Piagets Theorie in einem (radikal-)konstruktivistischen Licht erscheinen lassen.

Piaget suchte in seinem Lebenswerk die kognitiven Strukturen, mit denen der Mensch Erkenntnisse gewinnt. Damit lenkte er den Blick von der ontologischen Welt auf die Welt, die ein Mensch erfährt und interpretiert (vgl. von Glasersfeld, 1994b, S. 19). Die unterschiedlich

[19] Der *genetische* oder *strukturgenetische* Ansatz ist als Strukturen *generierend* zu verstehen und nicht als genetisch im Sinne von auf Genen beruhend oder angeboren.

[20] Die erste Jahrzahl bezieht sich auf das Erscheinungsjahr der Originalausgabe. Die Zitation erfolgt jeweils aus den deutschen Übersetzungen, die mit der zweiten Jahrzahl angegeben sind.

entwickelten Denk- und Verstehensstrukturen sind in seiner Theorie verantwortlich für subjektive Deutungen der ontologischen Realität und setzen den Spielraum für deren Interpretation und Konstruktion. Piaget weist selber auf die radikal konstruktivistische Ausrichtung seiner Theorie hin: „Die Intelligenz beginnt (...) weder mit der Erkenntnis des Ich noch mit der der Dinge als solchen, sondern mit der Erkenntnis ihrer Interaktion und sie organisiert die Welt und sich selbst, indem sie sich gleichzeitig den beiden Polen dieser Interaktion zuwendet“ (Piaget, 1937/1974, S. 341).

Die Begründung der Strukturgenese liegt in der biologischen Anpassungsfähigkeit, die lebenden Organismen eigen ist und äussert sich mit den entwicklungsleitenden Prinzipien Organisation und Anpassung. Der sich entwickelnde Mensch unterliegt dem Bestreben, sein Handeln und Denken zunehmend besser zu organisieren, damit er in seiner Umgebung bestehen und sie angepasster erschliessen und verändern kann. Seine kognitiven Strukturen werden differenzierter, komplexer und immer effektiver in eine bewegliche Gesamtstruktur eingebunden (Wetzel, 1980, S. 35). Die Entwicklung neuer kognitiver Strukturen strebt einem „nie erreichbaren Zielzustand, der Übereinstimmung mit der zu beschreibenden und zu erklärenden Umwelt, ja einer gewissen Realitätsadäquatheit zu“ (Seiler, 1994, S. 55). Das Zitat bestätigt die radikale Konstruktivität menschlicher Erkenntnis in Piagets Theorie: Der Zielzustand einer Übereinstimmung zwischen subjektiver und objektiver Welt ist *nie erreichbar* und verweist die Erfassung der ontologischen Realität auf subjektive Konstruktionen.

Weitere Beispiele für die Konstruktivität der Erkenntnis sind in der Strukturgenese und in der treibenden Kraft zur Entwicklung, dem Streben nach Äquilibration zu finden. Der Ursprung menschlichen Erkennens liegt für Piaget im Handeln, das von angeborenen Reflexen ausgeht und sich zu zielorientierten Schemata weiter entwickelt. Die in Schemata verdichteten Wahrnehmungs- und Handlungserfahrungen sind durch die typische Weise charakterisiert, bestimmte Klassen von Umweltgegebenheiten zu handhaben (Flammer, 1988, 136). Das Schema des Greifens ist dadurch gekennzeichnet, dass ein Kind z.B. Bauklötze oder eine Seife unterschiedlich wahrnehmen, manipulieren und daraus Erkenntnisse gewinnen kann.

Im Verlauf der kognitiven Entwicklung
führt die gleiche ontologische Realität zu unterschiedlichen Erkenntnissen:

- Ein fünfjähriges (präoperativ denkendes[21]) Kind vermag mit Bauklötzen unterschiedlicher Farbe, Grösse und Form Ordnung herzustellen, indem es sie zu einem schönen Bild zusammenfügt. Die Erkenntnisse, die es aus seiner Umgebung gewinnt, haben einen bildlich-assoziativen Charakter, sie sind an äussere Anordnungen gebunden und entspringen keinen mental verfügbaren Prinzipien.
- Mit denselben Klötzen vermag ein siebenjähriges (konkret-operativ denkendens) Kind Ordnungen herzustellen, welche sich an Klassifikations- und Seriationskriterien orientieren. Es ist ihm möglich, Beziehungen zwischen Klassen, zwischen Über- und Unterbegriffen herzustellen. Mit vier Klötzen vermag es ein Muster (Seriation mit wiederkehrenden Sequenzen) zu legen und in einer beliebigen Richtung in den Raum fortzusetzen. Es erkennt, dass der blaue Klotz in der ersten Sequenz vor dem gelben liegt und es kann daraus schliessen, dass dies in der letzten – unabhängig vom räumlichen Verlauf des Musters – auch so ist.
- Mit der Abstraktion solcher pränummerischer Operationen ist schliesslich die kognitive Strukturbasis gelegt, um nummerische Operationen zu lösen und Einsicht in mathematisch operative Strukturen zu gewinnen.

Die Subjektivität der Erkenntnis wird also mit dem Argument begründet, dass Handlungs- und Wahrnehmungsschemata, bildhafte Vorstellungen, Begriffe und Denkoperationen entwicklungsbedingten Voraussetzungen unterliegen. Sie ermöglichen Erkenntnisprozesse, „die nicht auf einem einheitlichen geistigen Erkenntnisvermögen beruhen“ (Seiler, 1994, S. 54).

Warum verändert sich in Piagets Theorie die Deutung der ontologischen Welt?

Die treibende Kraft für die fortschreitende Konstruktion qualitativ unterscheidbarer Erkenntnisstrukturen liegt in der adaptiven Funktion der Akkomodation und dem Streben nach Äquilibration. Sobald sich dem Individuum Probleme stellen, die es mit seinen verfügbaren Denk- und Handlungsstrukturen nicht mehr befriedigend lösen (assimilieren) kann, muss es seine vorhandenen Schemata differenzieren (akkomodieren), damit sich ein Gleichgewichtszustand

[21] Eine breite und gute Einführung in Piagets Stufentheorie geben z.B. Ginsburg und Opper (1969/1998).

(Aequilibrium) zwischen dem äusseren Problem und den darauf passenden Schemata einstellt. Piaget betont, dass die Gleichgewichte stets vorläufigen Charakter haben:

> Die Anfangsstadien haben also nur eine Bedeutung in bezug auf das Gleichgewicht, auf das sie hintendieren. Andererseits kann das erreichte Gleichgewicht nur in Beziehung zu den aufeinanderfolgenden Stufen, die zu diesem Gleichgewichtszustand führen, verstanden werden. Im Falle eines Begriffs oder einer Gesamtheit intellektueller Operationen ist also weder der Ausgangspunkt von Bedeutung, (...) noch das endgültige Gleichgewicht, von dem man auch nie sagen kann, ob es wirklich endgültig sein wird, sondern das Bildungsgesetz, d.h. das Operationssystem in seiner fortschreitenden Entwicklung. (Piaget, 1950a/1972, S. 23)

Mit einem einfachen Halteschema wird dem Säugling eine nasse Seife wahrscheinlich entgleiten. Es muss sein Schema verändern, mit einer offenen, leicht hohlen Hand unter die Seife stossen und mit der andern Widerstand bieten. Mit dem neu erworbenen Schema *Greifen glitschiger Gegenstände* kann es ähnliche Situationen bewältigen, bis das Schema nicht mehr taugt und nach erneuter Akkomodation ruft.

Subjektive Deutung der ontologischen Welt als Theoriekern

Nach Piaget sind subjektiv aufgebaute Schemata eigentliche Schaltstellen, mit denen Ereignisse oder Anforderungen der Umgebung interpretiert und in Begriffen der verfügbaren kognitiven Struktur bewältigt werden können. Sie bilden die Basis für die Deutung der ontologischen Welt und sind strukturgenerierte Plattform für Veränderung, Anpassung, Lernen und Entwicklung. „Neuigkeiten“ müssen als „irgendwie Bekanntes“ behandelt werden können, damit sie in die aufgebaute Struktur integrierbar sind und nicht ins Leere greifen (vgl. Wember, 1986, S. 49). Wenn ein Kind ein mit Bauklötzen gelegtes Muster operativ verinnerlichen kann, vermag es mit denselben Denkstrukturen (z.B. mit serialen Denkoperationen) den Nachfolger und Vorgänger einer Zahl zu assimilieren. Falls „Neuigkeiten“ als nicht mehr assimilierbar oder als „irgendwie noch nie Dagewesenes“ daherkommen, müssen die kognitiven Strukturen so lange verfeinert und den externalen Stimuli angepasst werden, bis sie wiederum assimilierbar sind (Stendler-Lavatelli, 1976, S. 43). Es entsteht also ein Konflikt, ...

> wenn das funktionale Anwendungs- oder Betätigungsbedürfnis eines Handlungsschemas oder einer Denkstruktur durch den „Widerstand“ der Realität gebremst wird. Wir brauchen hier nicht mehr darauf hinzuweisen, dass dieser „Widerstand“ nur dann und in dem Ausmass Realität besitzt, als

> das Subjekt ihn mit seinen ihm zur Verfügung stehenden Strukturen in irgendeiner Weise ausmachen und einordnen kann. (Seiler, 1994, S. 89)

Die Theorie von Piaget gibt der Konstruktivität menschlicher Erkenntnis erweiterte Begründungsdimensionen. Ich kann ihnen abgewinnen, dass Erkenntnis entwicklungs- und erfahrungsbedingt auf subjektiven Konstruktionen beruht (vgl. Abb. 2).

Die verschiedenen Spielarten des Konstruktivismus lösten (nicht nur) in der Mathematik-Didaktik einen Paradigmenwechsel[22] aus.

2.1.3 Didaktik und konstruktivistische Erkenntnistheorie

Reusser (1999a) weist darauf hin, dass erkenntnistheoretische Grundlagen untauglich sind, um didaktische Ansätze zu begründen. Sie bedürfen einer sorgfältigen pädagogischen Reflexion, bis sie diese allenfalls stützen können.

> Die Hauptirritation der gegenwärtigen Konstruktivismusdebatte besteht darin, dass ziemlich beliebig zwischen unterschiedlichsten und nicht immer vereinbaren Argumentationsebenen (...) hin und her gegangen wird. Konkrete Probleme treten in der Regel dann auf, wenn aus radikalisierten grundlagentheoretischen Positionsbezügen in direkter Weise Orientierungen für didaktisches Handeln abgeleitet bzw. pädagogisch-didaktische Folgerungen gezogen werden. (ebd., S. 7)

Im Folgenden entfalte ich eine Didaktik, die sich auf vier konstruktivistische Grundprinzipien bezieht:

> 1. (a) Wissen wird nicht passiv aufgenommen, weder durch die Sinnesorgane noch durch Kommunikation.
>   (b) Wissen wird vom denkenden Subjekt aktiv aufgebaut.
> 2. (a) Die Funktion der Kognition ist adaptiver Art und zwar im biologischen Sinne des Wortes, und zielt auf Passung oder Viabilität;
>   (b) Kognition dient der Organisation der Erfahrungswelt des Subjekts und nicht der „Erkenntnis“ einer objektiven ontologischen Realität. (von Glasersfeld, 1996, S. 96)

[22] Die Begriffe Paradigma und Paradigmenwechsel verwende ich nach Kuhn (1989). Er bezeichnet damit eine gemeinsame theoretische Orientierung, nach der sich wissenschaftliche Fragestellungen, Entwicklungen, Lösungsentwürfe oder Handlungsempfehlungen an die Praxis richten. Damit ist der Zeitraum angesprochen, in dem solche Paradigmen entstehen: Dieser erstreckt sich über 20 bis 25 Jahre (vgl. Krauthausen, 1998).

Die Prinzipien bedürfen einiger Präzisierungen und Ergänzungen, bis sie Eingang in eine reflektierte Mathematik-Didaktik finden (vgl. Kap. 2.2):

- Erkenntnisgewinn und Wissensaufbau lassen sich in aktive Lernprozesse einbinden, wenn sich der Lerner *mit komplexen Problemen aus seiner Denk- und Erfahrungswelt* auseinandersetzen kann.
- Eine zweiter Punkt betrifft die *Zielsetzungen* bei Wissenskonstruktionen. Das von Piaget dargestellte Streben nach Äquilibrium und das Konzept der Viabilität gehen von einer kreativen Selbstregulation des Individuums aus. In der Schule muss sich der Schüler aber auch an Lernzielen orientieren, welche die Lehrerin vorgibt und keinem internalen Motiv bzw. keiner intrinsischen Motivation entspringt. Es ist primär eine anthropologische Frage der individuellen Verhaltenssteuerung und nicht eine erkenntnistheoretische, ob Schüler bei von aussen herangetragenen Lernzielen ein Suchverhalten in Richtung Äquilibrium zeigen. Auch aus motivationaler Sicht sind komplexe Problemstellungen mit reichhaltigen Bezugsmöglichkeiten angezeigt.
- Die *Lehrperson* trägt hinsichtlich des Lernverhaltens der Schüler eine wichtige Unterstützungsfunktion. Sie stellt Lernangebote bereit und begleitet die Schüler bei der Suche nach zielgerichtetem Lernverhalten. Grundsätzlich sind ...

  > Lernarrangements so zu gestalten, dass die Lernenden in ihrem Lernen immer in der „Zone der proximalen Entwicklung“ (Vygotsky, 1962) stehen, d.h. die Lernsituation ist so anspruchsvoll, dass sie vom einzelnen allein nicht bewältigt werden kann, sondern kollektives Lernen und/oder Lernberatung durch die Lehrperson erfordert. Sie ist also nicht so leicht, dass sie problemlos durch individuelles Lernen bewältigt werden kann, oder so schwierig, dass jede Erklärung der Lehrkraft nur zu „trägem“ Wissen führt. Deshalb kommt bei der Gestaltung der Lernumgebung der Erfassung des Erfahrungs- und Interessenschatzes sowie dem Vorwissen der Lernenden grösste Bedeutung zu. (Dubs, 1995, S. 893)

- Das Angebot von reichhaltigen Lernumgebungen vermag die Ansprüche einer konstruktivistischen Didaktik zu erfüllen, wenn es *sozial-kooperatives Lernen* und damit Ko-Konstruktionen ermöglicht. Indem individuelle Verstehensprozesse über einen sozial-interaktiven Austausch erfolgen, kann der Lerngewinn optimiert werden.
- Die Autoren des Zahlenbuches stellen aktiv-*entdeckendes* und soziales Lernen ins Zentrum

ihrer Konzeption (vgl. Hengartner & Wieland, 1995). Heinz von Foerster (1998) fragt seine Leserinnen und Leser, ob Begriffe wie Ordnung, Zahlen, Formeln, Symmetrien, Naturgesetze oder Gegenstände *Entdeckungen* oder *Erfindungen* seien: „Neigt er [der Befragte] dazu, diese Begriffe als Erfindungen zu bezeichnen, so haben Sie es mit einem Konstruktivisten zu tun“ (ebd., S. 46). Unausgesprochen bleibt, dass Entdeckungen nicht vereinbar sind mit einer konstruktivistischen Haltung. Dennoch ordne ich aktiv-*entdeckendes* Lernen einer konstruktivistischen Didaktik zu. Zwei Gründe sprechen dafür:

Die Bedingungen des ersten konstruktivistischen Prinzips sind erfüllt, denn das Lernverhalten des Schülers ist ein *aktiv*-entdeckendes (vgl. von Glasersfeld, 1996, S. 96 und Kap. 2.1.3). Zweitens: Die Entdeckungen beziehen sich nicht auf die Entdeckung der ontologischen Realität (Wissensstoff Mathematik), sondern auf die Entdeckung neuer, subjektiver Erkenntnisse im kognitiven Denk- und Beziehungsnetz des einzelnen Schülers.

- Im Lichte einer konstruktivistischen Didaktik ist der *Umgang mit Fehlern* zentral. Fehler sind wichtig für das Auffinden von viablen Lösungen. Der Aufbau einer Fehlerkultur entspricht dem Aufbau einer Erfahrungskultur, die individuelle Wissenskonstruktionen keimen lässt (vgl. Jost, Erni & Schmassmann, 1992; Althof, 1999).
- Mit den aufgezählten Prämissen kommt zum Ausdruck, dass sich Lernen nicht auf kognitive Aspekte beschränkt. „*Gefühle* (Umgang mit Freuden und Ängsten) sowie *persönliche Identifikation* (mit den Lerninhalten) sind bedeutsam, denn kooperatives Lernen, der Umgang mit Fehlern in komplexen Situationen, Selbststeuerung und das dem Lernen Dienstbarmachen der Eigenerfahrung verlangen mehr als nur Rationalität“ (Dubs, 1995, S. 891).

2.2 Didaktisch-konstruktivistisches Paradigma

Mit der Orientierung an einem neuen Paradigma sind veränderte Beziehungen zwischen Lehrer- und Schülerrolle verbunden.

2.2.1 Didaktisches Dreieck als Übersicht

Das Modell des didaktischen Dreiecks vermag die Grundzüge konstruktivistisch ausgerichteter Lehr-/Lernprozesses übersichtlich darzustellen. Es gibt Einblick in die Dynamik ...

- zwischen der aktiven Schülerrolle,
- der unterstützenden Rolle der Lehrerin und
- dem mathematischen Wissensstoff (vgl. Abb. 3).

Steinbring (1997) interpretiert das didaktische Dreieck systemtheoretisch. Er bezieht sich auf einen didaktisch-konstruktivistischen Hintergrund, den er durch die Dimensionen Mathematik, Lehrer und Schüler absteckt und drei eigenständigen Systemen zuordnet: dem epistemologischen, dem sozialen und dem psychischen System (vgl. Tab. 1).

Tabelle 1: Systemtheoretische Interpretation des didaktischen Dreiecks (Steinbring, 1997, S. 72)

Mathematik	**Lehrer**	**Schüler**
Mathematisches Wissen	Mathematikunterricht	Lernen und Verstehen von Mathematik
Begriffe als Beziehungen	Kommunikation und Unterrichtskultur	individuelle, subjektive Deutungen
das epistemologische System	das soziale System	das psychische System

Das *epistemologische System* besteht aus einem autonomen Beziehungsnetz von Begriffen, Operationsstrukturen und Zahlenmustern. Die Lehrerin baut im *sozialen System* des Unterrichts eine Kommunikations- und Lernkultur auf, damit zwischen dem mathematischen Wissen und den singulären Wissenskonstruktion im *psychischen System* des Lerners eine Wechselwirkung entsteht. Der Schüler lernt und versteht mathematisches Wissen, indem er Begriffe und Beziehungen subjektiv deutet und mit anderen Schülern bzw. der Lehrerin austauscht. Der Unterschied zwischen dem sozialen und dem psychischen System besteht darin, dass das erste kommunizieren, aber nicht denken und das zweite denken, aber nicht kommunizieren kann (Luhmann, 1997, S. 28). Steinbring (1997, S. 72) betont die selbstreferenzielle Autonomie der drei Dimensionen, welche durch Kommunikation *wechselwirken*.

Das didaktische Dreieck in Abbildung 3 stellt die unterrichtlich „sichtbaren“ Beziehungen zwischen Lehrerin, Schülern und dem Lernstoff dar. Es veranschaulicht das Tun von Lehrerin und Schülern im konstruktivistisch orientierten Unterricht und gibt eine Vorschau auf kommende Kapitel, in denen eine vertiefte Darstellung der drei Komponenten erfolgt.

Lehr-Lernverhältnis zwischen Lehrerin und Schülern

Die Lehrerin tritt dem Schüler im Verlauf seines Lernprozesses als Lernbegleiterin mit abnehmender Lenkungsfunktion gegenüber. Der Schüler stellt im Lerndialog seine Gedanken – z.B. seine beschrittenen Lösungswege – dar und kriegt von der Lehrerin Impulse, Fragen, Bemerkungen und Anerkennung gespiegelt. Das Ziel der Lernbegleitung besteht darin, dass der Schüler seinen Lernprozess selbstständig fortsetzen oder neu ausrichten kann. Für die minimale und auf die Bedürfnisse des einzelnen Schülers abgestimmte Lernhilfe hat sich der Begriff Scaffolding eingebürgert. Eine vertiefte Darstellung der Lernbegleitung erfolgt unter dem Rollenaspekt der Lehrerin (Kap. 2.2.5) und aus Sicht der Unterrichtsgestaltung (Kap. 2.3.5).

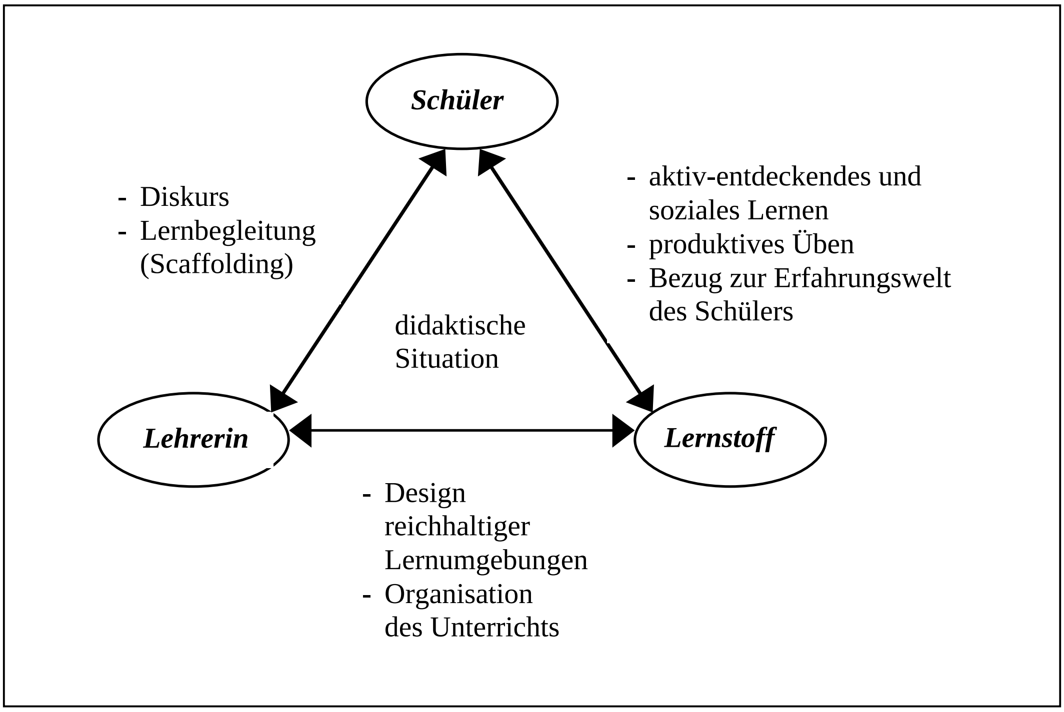


Abbildung 3: Deutung des didaktischen Dreiecks im konstruktivistischen Paradigma (vgl. Jaquet, 1993; Seeger, 1993)

Beziehung zwischen Schüler und Lernstoff

Die Beziehung betrifft den Lernprozess des Schülers bzw. seinen Zugang zu mathematischem Wissen. Die aktive Schülerrolle kommt beim aktiv-entdeckenden Lernen (Kap. 2.2.3) und beim produktiven Üben (Kap. 3.4.2) zum Ausdruck. Sie geht von einem Schüler aus, der sein Wissen in einer fachlich strukturierten (substanziellen) Lernumgebung und in einem natürlich differenzierten Unterricht individuell erweitert (Kap. 2.2.4).

2.2.2 Design substanzieller Lernumgebungen

Da sich Fachdidaktiken mit den künstlichen Objekten *Lernumgebungen*[23] befassen, bezeichnet Wittmann (1992a, 1997, 1998a) die Mathematik-Didaktik als design science.

> Zur Vermeidung von Missverständnissen muss allerdings deutlich darauf hingewiesen werden, dass sich „design" nach unserem Verständnis nicht direkt, sondern nur indirekt auf das Lernen und Lehren bezieht. Die von uns entwickelten Lernumgebungen lassen den Lehrern und Schülern Spielraum für die produktive Umsetzung, für Eigeninitiative und selbstorganisiertes Lernen, und fordern dies sogar heraus. (Wittmann, 1997, S. 45)

Es ist Kennzeichen einer starken Lernumgebung, dass sie keine methodisch-didaktischen Vorgaben macht, sondern die Ausgestaltung der einzelnen Lehrerin überlässt. Weitere Ansprüche an substanzielle Lernumgebungen beinhalten:

- Sie konzentrieren sich auf mathematische Grundideen und folgen zentralen Zielen und Prinzipien des Mathematik-Unterrichts.
- Sie bieten den Schülern vielfältige Möglichkeiten für mathematische Aktivitäten.
- Sie sind flexibel und können leicht an die individuellen Gegebenheiten einer Klasse angepasst werden.
- Sie integrieren mathematische, psychologische und pädagogische Aspekte des Lehrens und Lernens in einer ganzheitlichen Weise (vgl. Wittmann, 1998a, S. 337-338).

Zwei Kennzeichen substanzieller Lernumgebungen wurden nur implizit genannt:

- Die Lehrerin bietet Lernumgebungen in ihrer potenziellen Reichhaltigkeit an und gliedert sie *nicht* in Einzelsegmente, z.B. nach dem Kriterium „Schwierigkeitsgrade". Die Schüler sollen entsprechend ihrem Lern- und Leistungsvermögen selber Lernwege finden und individuelle Ziele erreichen.
- Die Reichhaltigkeit der Lernumgebung betrifft das Spektrum, Operationen auf unterschiedlichen Abstraktionsstufen (handelnd, visuell oder symbolisch) zu vollziehen, sie von einer Repräsentationsform in eine andere zu übersetzen, Operationsstrukturen in individuellen Zahlenräumen und mit unterschiedlich schwierigen Operationen zu realisieren.

[23] Mit *Lernumgebung* bezeichne ich fachlich strukturiertes Wissen, das nach didaktischer Gestaltung als Unterrichtseinheit taugt.

Während der letzten Jahre wurden einige substanzielle Lernumgebungen publiziert. (z.B. Krauthausen, 1995a, 1998; Lorenz, 1997; Scherer & Selter, 1996; Selter & Spiegel, 1997; Stein, 1996, 1999; Steinbring, 1995). Die Begründung dieses Trends liegt u.a. in der mathematik-didaktisch sich etablierenden Forschungsmethodologie, die sich am klinischen Interview sensu Piaget orientiert und das *klinische Unterrichtsexperiment* analog auf die Erforschung von Lehr-/Lernumgebungen ansetzt (vgl. Tab. 2).

Tabelle 2: Vergleich zwischen klinischen Unterrichtsexperimenten und klinischen Interviews sensu Piaget (Wittmann, 1998a, S. 339)

	Mittel	**Methode**
Piagetsche Psychologie	Strukturierte Sequenz von Aufgaben	Klinische Interviews
Mathematikdidaktik	Substanzielle Lernumgebungen	Klinische Unterrichtsexperimente

Wittmann (1995c, 1998a) sieht substanzielle und didaktisch offene Lernumgebungen als Forschungsobjekt und Forschungswerkzeug, wenn sie als klinische Unterrichtsexperimente realisiert und evaluiert werden (vgl. Krauthausen, 1998, S. 100). Die Lehrerin gibt zu Beginn jeder Lernetappe Schlüsselinformationen zur Aufgabenstellung, danach beobachtet und unterstützt sie die Lernprozesse in didaktisch-konstruktivistischer Zurückhaltung (vgl. Kap. 2.2.5). Die erhobenen „Daten geben einerseits Aufschluss über Lehr-/Lernprozesse, Denkprozesse und Lernfortschritte von Schülerinnen und Schülern, ihre sozialen Interaktionen usw. Andererseits helfen sie, die Lernumgebungen zu evaluieren und zu revidieren, um Lehr-/Lernprozesse noch effektiver gestalten zu können" (Wittmann, 1998a, S. 339). Grundsätzlich sind jegliche strukturierten Übungsformen (vgl. Kap. 3.4.2) arithmetisch substanziell, wenn sie den oben genannten Kriterien entsprechen. Der einzelne Lernkontext gewinnt an Substanz, wenn die Aufgaben durch Operationshandlungen gestützt und der soziale Austausch angeregt wird.

Die Beispiele *Zahlenmauern*, *Summen mit Reihenfolgezahlen* und *Vierfeldertafel* sind substanzielle Lernumgebungen, nicht nur für Unterstufenschüler. Sie können auch Lehrerinnen (z.B. in der Weiterbildung) als Übungsgelände dienen, um Selbsterfahrungen mit aktiv-entdeckendem Lernen zu sammeln.

Zahlenmauern (vgl. Abb. 4)

Das Zahlenbuch bietet Zahlenmauern wiederkehrend während sechs Grundschuljahren an (vgl. z.B. Hengartner & Wieland, 1995, S. 123-124). Die Schlüsselinformation lautet: „In jedem Stein einer Zahlenmauer (...) steht die Summe der beiden unter ihm liegenden Steine" (Krauthausen, 1998, S. 121).

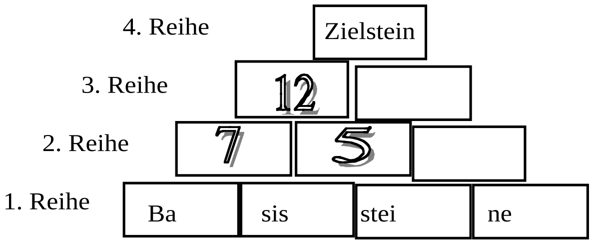


Abbildung 4: Zahlenmauern am Beispiel einer 4er-Mauer

Mögliche Aufgabenstellungen: Die Schüler füllen die Mauer ...

- mit selbst gewählten Zahlen,
- auf Grund vorgegebener Basissteine oder
- auf Grund einzelner gesetzter Zahlen in verschiedenen Reihen.

Im Übungsformat ist materialgestütztes Operieren mit Wendeplättchen[24] denkbar, wenn der Zahlenraum begrenzt bleibt und die Mauer genügend grosse Dimensionen aufweist. Beispiele für weiterführende Fragen oder Aufgaben in Richtung operativer Vertiefung (vgl. ebd., 1998, S. 121-123): „Baue möglichst viele verschiedene Mauern mit einem vorgegebenen Zielstein von 36 (auch Mauern mit unterschiedlicher Höhe)." – „Im Zielstein soll eine ungerade/gerade Summe resultieren. Wie müssen die Basissteine bezüglich gerader/ungerader Zahlen zusammengesetzt sein?" – „Wie sind die vorgegebenen Basissteine 15, 17, 16, 18 einzuordnen, damit im Zielstein die grösst-/kleinstmögliche Endsumme resultiert?" – „Welche Auswirkung hat eine Veränderung der Basissteine um ‚± 1' (oder um andere Werte) bezüglich des Zielsteins?" – „Verändere zuerst die Zahlen in den beiden Innen-, dann in den beiden Aussensteinen um ‚± 1'. Welche Konsequenzen ergeben sich für den Zielstein?" – „Vertausche je zwei Basiszahlen (z.B. in 4er-Mauer: zwei Innen-, zwei Aussenzahlen oder eine Innen- mit einer Aussenzahl) und untersuche die Wirkung auf die Zielzahl."

[24] Wendeplättchen sind knopfgrosse Kartonscheiben, die auf der einen Seite blau, auf der andern rot gefärbt sind.

Summen mit Reihenfolgezahlen

Ein weiteres Beispiel einer substanziellen Lernumgebung liegt von Selter und Spiegel (1997) vor (vgl. Schwätzer & Selter, 1998). Die Aufgabenstellung *Summen mit aufeinander folgenden Zahlen* lautet: Es sollen alle möglichen Summen mit aufeinander folgenden natürlichen Zahlen gebildet werden, die höchstens 30 ergeben. Die Anzahl der Summanden ist frei. Das Problemfeld soll „es den Schülern ermöglichen, Gesetzmässigkeiten und Zahlenmuster zu entdecken, zu benutzen, zu beschreiben und zu begründen“ (Selter & Spiegel, 1997, S. 140). Summen mit Reihenfolgezahlen sind z.B. „1 + 2, 2 + 3, 3 + 4, 1 + 2 + 3, 2 + 3 + 4 + 5“. Obwohl die Autoren die Aufgabenstellung in der vierten Klasse ansiedeln, führte ich sie bereits mit Erstklässlern gegen Ende des Schuljahres durch. Im Lernkontext ergaben sich verschiedene Problemfelder und Fragestellungen: „Was sind Reihenfolgezahlen?“ – „Welche (von den Schülern aufgeschriebenen) Summen wurden mit Reihenfolgezahlen gebildet, welche nicht?“ – „Ändert sich das Resultat, wenn die Reihenfolge der Summanden gekehrt wird?“ – „Wer kann sein System erklären?“ – „Schneide deine Rechnungen aus und ordne sie neu.“ – „Vergleiche deine Rechnungen mit denjenigen eines Mitschülers und lege deine Rechnungen nach demselben System.“ – „Wie viele Rechnungen findest du, wenn die Summe höchstens 15 ergeben darf?“ – Eine schwierigere Fragestellung könnte z.B. lauten: „Hast du eine Begründung, warum du alle Summen gefunden hast?“

Die Fragen lassen erkennen, dass die Lernumgebung die genannten Kriterien erfüllt. Die minimale Zielsetzung dieser Einheit besteht darin, die Fertigkeiten beim Addieren zu verbessern, darüber hinaus lassen sich auch Erkenntnisse über operative Verknüpfungsstrukturen (Aebli, 1980, S. 226 ff.) gewinnen.

Vierfeldertafel **(**vgl. Abb. 5)

Die Vierfeldertafel ist mit dem Rechendreieck aus dem Zahlenbuch verwandt (vgl. Hengartner & Wieland, 1995, S. 127-130; Wittmann, 1995a, S. 28-30; Wittmann, 1998a, S. 338). Die Regel lautet: „Ein Plan mit vier Feldern wird mit Plättchen belegt. In die Kreise schreibt man jeweils die Summe der Plättchen aus den beiden berührten Nachbarfeldern“ (Krauthausen, 1998, S. 121).

Mögliche Impulse, die in der Lernumgebung entwickelt und aufgenommen werden können (ebd.): „Was passiert, wenn du ein Plättchen waagrecht/senkrecht/diagonal verschiebst?“ – „Betrachte die Wirkung auf die neben- oder übereinander liegenden Kreiszahlen[25] und die Gesamtsumme.“ – „Was passiert, wenn du zwei Plättchen verschiebst: in der oberen Hälfte eines von rechts nach links und in der unteren eines von links nach rechts?“ – Was stellst du fest, wenn du in *einem* beliebigen Feld ein Plättchen dazulegst/wegnimmst?“ – „Welche Veränderungen stellst du bei den Kreiszahlen fest, wenn du in *jedem* Feld ein Plättchen dazulegst/wegnimmst?“ – „Kannst du die Belegung der Felder verschieben ohne dass sich eine Kreiszahl verändert?“ – „Die Gesamtsumme der vier Kreiszahlen muss 50 ergeben. Wie legst du die Plättchen? Gibt es mehrere Möglichkeiten?“ – Die genannten Aufgabenstellungen können auch unter multiplikativer Operationsstruktur erfolgen: An Stelle der Summen stehen die Produkte in den Kreisen, als Gesamtergebnis fungiert wie bisher die Summe der Kreiszahlen.

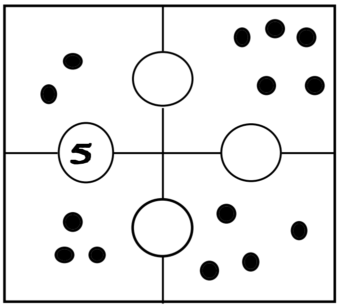


Abbildung 5: Vierfeldertafel (Krauthausen, 1998)

Kennzeichen der drei Lernumgebungen: Sie bestehen aus wenigen Regeln, einer Operationsstruktur und einfachen grafischen Gerüsten. Die Übungsformate sind erweiterbar, weil sie sich nicht auf einen Zahlenraum oder Operationstypus beschränken. Der Schüler kann die Unterrichtszeit für mathematisches Lernen nutzen und die Einführung in neue Aufgabentypen und Anschauungsmittel wird minimiert (vgl. Schipper, 1982; Schipper & Hülshoff, 1984).

2.2.3 Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen

In der Mathematik-Didaktik haben u.a. Freudenthal (vgl. z.B. 1973, 1981, 1982), Winter (vgl. z.B. 1984a, 1984b, 1987, 1989) und die Mitglieder des Projektes „mathe 2000“ (vgl. z.B. Müller & Wittmann, 1995; Müller et al., 1997) wesentliche Beiträge zur Konzeption des aktiv-

[25] Die Kreiszahl ist die Summe der Plättchen zweier neben- oder übereinander liegender Felder.

entdeckenden Lernens geleistet.

Freudenthal (1973) zeigt die veränderte Auffassung über den Wissensaufbau am Beispiel der Didaktik von Comenius (1592-1670) auf.

> Man muss es ihm [dem Schüler] zunächst vormachen und zwar so, dass er jeder Handbewegung mit den Augen folgen kann, und ihm erst dann erzählen, wie man es macht, und schliesslich muss der Schüler nachahmen. (....) Der Schüler lernt nicht nur zu betrachten, sondern auch zu handeln, indem der Lehrer ihm die rechten Handlungen (...) vorführt. Die Maxime der Comeniusschen Didaktik ist:
>
> **Am besten *lehrt* man eine Tätigkeit, indem man sie *vor*führt[26].**
>
> Es ist nützlich, solch einen Satz zu zitieren, um sich dann zu überlegen, wie man es heute sagen würde. Ich dächte: **Am besten *lernt* man eine Tätigkeit, indem man sie *aus*führt.**
>
> Es ist vielleicht nicht so sehr verschieden von dem, was Comenius wollte, aber der Akzent ist verschoben, vom Lehren aufs Lernen, vom Tun des Lehrers auf das des Schülers, vom Sensorischen zum Motorischen. (Freudenthal, 1973, S. 107) [Schriftsetzung; KH]

Der Ausschnitt veranschaulicht, dass konstruktivistisch verstandenes Lernen von der Aktivität des Schülers ausgeht. Die Autoren des Zahlenbuchs verbinden *aktiv-entdeckendes Lernen* mit *sozialem Lernen* und drücken damit die Kraft aus, die im sozialen Austausch liegt. Wenn Schüler argumentieren, hinweisen oder Fragen stellen, findet mit der Verbalisierung eigener Gedanken ein Prozess der Bewusstwerdung und damit ein wichtiger Verstehensakt statt.

Die didaktische Rahmung mit substanziellen Lernumgebungen, aktiv-entdeckendem und sozialem Lernen wendet sich gegen eine methodisch gestufte Folge kleinster Schritte, welche einzelne Schwierigkeiten isoliert und vom Leichten zum Schweren oder vom Einfachen zum Zusammengesetzten führt (Wittmann, 1995a, S. 13). Konsequenz: Die Lehrerin verabreicht Mathematik nicht in Portionen eines fertigen Produkts, sondern lässt dieses durch geeignete Problemkontexte im Kopf des Schülers prozesshaft entstehen (vgl. Freudenthal, 1981, 1982).

2.2.4 Natürliche Differenzierung

Der traditionelle Unterricht strebt ein individuell angepasstes Lernen durch Zuordnung von unterschiedlichen Lernangeboten an. Diese innere Differenzierung (Binnendifferenzierung) besteht hauptsächlich aus Variationen ...

---

[26] Did. Anal. 42, Quellenverweis im Zitat.

- der Aufgabenschwierigkeit und -abfolge,
- des Aufgabenumfangs und
- der Lehrerinnenhilfe.

Dies verlangt von der Lehrperson, dass sie einen fachlich logischen Aufbau durch Gewichtung und Segmentierung des Lernstoffs vornimmt und auf Grund des eingeschätzten Lernverhaltens und Leistungsvermögens den Schülern unterschiedlich schwierige/viele Aufgaben zuteilt (vgl. Sander, 1981). *Sie* bestimmt, welche Schüler welche Aufgaben lösen. Die Schnellen erhalten komlexere oder anspruchsvollere Zusatzaufgaben, die Schwächeren bleiben bei den einfacheren Übungen. Die Lehrerin antizipiert auftauchende Schwierigkeiten und schickt diesen vorbereitende Trainings voraus. Damit trägt sie die alleinige Lernverantwortung (vgl. Abb. 6).

Bildlich gesprochen: Dahinter steckt die Auffassung, Lernen sei vergleichbar mit einer aufzubauenden Mauer, bei der dem Schüler Stein für Stein und Schicht für Schicht aus der fachlichen Struktur der Mathematik neben- und übereinander vorgesetzt werden muss, damit er am Ende über eine stabiles mathematisches Gebäude verfügt. Die von der Lehrerin bereit gestellten Aufgaben und die als fachlich logisch befundene Reihenfolge tragen die Verantwortung für die Wissenserweiterung im psychischen System des Lerners. Die Haltung erinnert an die behavioristische Lernauffassung, nach welcher die Schüler in passiver Rolle vorgegebene Aufgaben mit isolierten Schwierigkeiten abarbeiten. Früher wurde ...

> peinlich darauf geachtet, keinen Wissensbaustein auszulassen, weil man befürchtete, Lücken könnten den weiteren Anbau von Steinen unmöglich machen. Heute weiss man, dass Lernen *von Natur aus* ganz anders verläuft: Es besteht im fortlaufenden Knüpfen und Umstrukturieren eines flexiblen Netzes aus Wissenselementen und Fertigkeiten, wobei es die Lernenden selbst sind, die – unterstützt durch geeignete Lernumgebungen – ihre Wissensnetze von verschiedenen Stellen aus aktiv-entdeckend weiterknüpfen. (Müller et al., 1997, S. 21-22)

Die lehrerzentrierte *innere Differenzierung* ist eher produktorientiert, die Priorität liegt bei erledigten, richtig gelösten Rechenaufgaben, welche die Gewähr für den Aufbau der Wissensmauer übernehmen. Bei der *natürlichen Differenzierung* teilt die Lehrerin die Lernverantwortung mit dem Schüler. Sie bietet Lernumgebungen an und begleitet Lernprozesse, bei denen der Lerner entsprechend seinem Lern- und Leistungsvermögen singuläre Wege beschreitet und eigene Ziele erreicht. Die natürliche Differenzierung passt somit in die didaktische Rahmung mit substanziellen Lernumgebungen, aktiv-entdeckendem und sozialem Lernen (vgl. Hengartner & Wieland, 1995, S. 12; Krauthausen, 1998, S. 120). Analog der Charakterisierung substanzieller Lernumgebungen entfaltet sich das Spektrum natürlicher Differenzierungsmöglichkeiten. Der Katalog umfasst ...

- die Auswahl des Zahlenraums beim Vollzug der Operationen,
- den Umfang der zu lösenden Aufgaben,
- das Abstraktionsniveau, auf dem Operationen realisiert werden,
- die Lösungswege (z.B. zählendes Vorgehen, Nutzung von Strategien),
- die operative Tiefe, in der Schüler Erkenntnisse gewinnen und
- den sozialen Austausch.

Am Beispiel *Summen mit Reihenfolgezahlen* (vgl. Kap. 2.2.2) bedeutet dies: Der eine Schüler steht vor der Herausforderung, einzelne Additionen zählend auszurechnen und mit der zulässigen Höchstsumme zu vergleichen, und der andere konzentriert sich auf die Verknüpfungsstrukturen und findet eine Begründung, warum seine Liste mit Rechnungen vollständig ist.

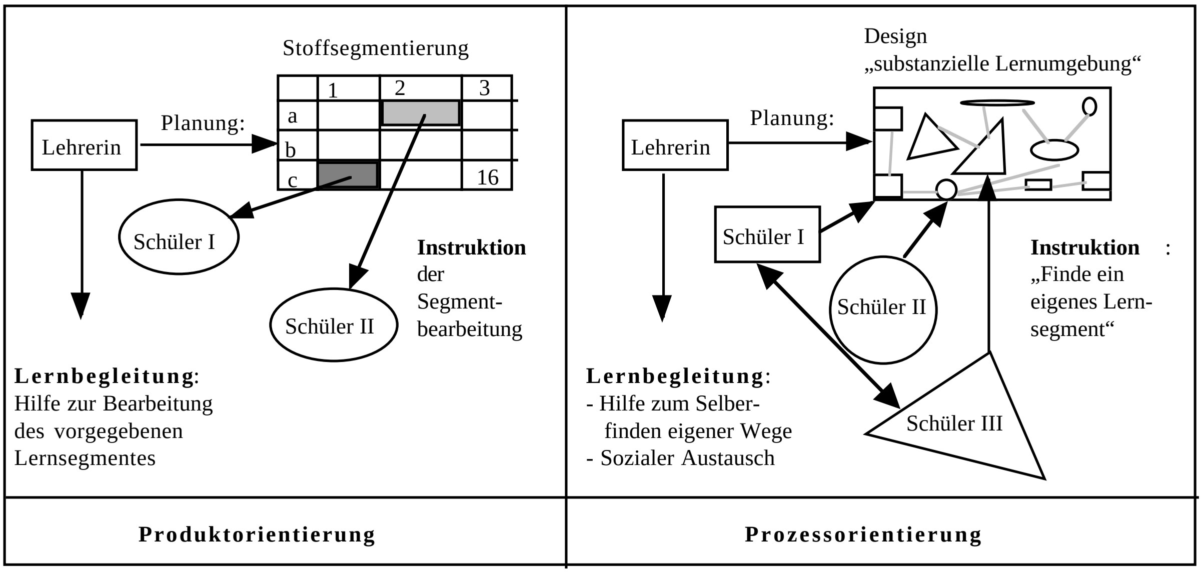


Abbildung 6: Unterschied zwischen innerer und natürlicher Differenzierung

Die natürliche Differenzierung geht von mathematisch interessierten Schülern aus, die lernen wollen (Hollenstein, 1996, S. 69). Bei der traditionellen inneren Differenzierung kommt dem Lerner eine passive, von aussen gelenkte Rolle zu, die ihm wenig Spielraum für eine eigenverantwortliche, intrinsisch motivierte Steuerung seines Lernverhaltens lässt. Die Lernmotivation kommt eher durch Belohnungen mit Zensuren oder in Aussicht gestellten „süssen“ Arbeiten zu Stande. Die beiden Differenzierungsformen sind in der Schulpraxis auf einem Kontinuum mit Gradabstufungen anzutreffen. Die kontrastierte Darstellung ist als Kennzeichnung des Paradigmenwechsels zu verstehen (vgl. Tab. 3).

Tabelle 3: Gegenüberstellung der traditionellen inneren und der natürlichen Differenzierung

Traditionelle innere Differenzierung	**Natürliche Differenzierung**
• Lehrerin segmentiert den Lernstoff und teilt die Schüler den Segmenten zu.	• Lehrerin bietet substanzielle Lernumgebung an, sie lässt die Schüler selber ihre eigenen/ aktuellen Lernsegmente finden.
• Verbindliche Aufgabeninstruktion.	• Einführung in die Lernumgebung durch Schlüsselinformationen (Aufgabenverständnis ist Teil des Lernprozesses).
• Lernweg nach Muster der Lehrperson.	• Schüler bestimmt den Lernweg.
• Lehrerin variiert Segmente mit Aufgaben-schwierigkeit/-umfang, Anschauungsmit-teln und Intensität der Hilfestellungen.	• Lehrerin begleitet individuelle Lernwege und eine differenzierte Zielfindung. Sie fördert den sozialen Austausch.
• Ziele: Schüler lösen vorgegebenes Segment und üben isolierte operative Beziehungen.	• Ziele: Schüler finden Zone der nächsten Entwicklung und erzeugen individuelle operative Beziehungen.

Gemäss Gallin und Ruf (1990) bewirken Änderungen in der Grundhaltung der Lehrerin auch eine veränderte Lerneinstellung bei den Schülern. Sie sind Voraussetzung für die aktive und selbstverantwortliche Rolle, die der Schüler bei der Suche seines Lernweges übernimmt. Aus Sicht der Schüler sieht die Unterscheidung zwischen der traditionellen inneren (vgl. Tab. 4, linke Spalte) und der natürlichen Differenzierung (rechte Spalte) wie folgt aus:

Tabelle 4: Grundhaltung der Lehrerin und Rollenverständnis des Lerners (Gallin & Ruf, 1990, S. 20)

Grundhaltungen von Schülern	
Der Schüler versteht sich als Objekt der Akti-vitäten des Lehrers	**Der Schüler übernimmt Verantwortung für den Lernprozess**
• Ich warte ab, was der Lehrer mit mir vor hat.	• Ich will wissen, wie es im neuen Sachgebiet aussieht.

• Ich weiss so vieles nicht, und das lähmt mich.	• Das, was ich weiss, ermutigt mich, weiterzuforschen.
• Was will der Lehrer von mir?	• Wie ist das nun mit diesem Stoff?
• Was für Aufgaben muss ich lösen?	• Wo habe ich Probleme? Wie soll ich sie anpacken?
• Ich muss vor dem Lehrer verstecken, was ich nicht weiss und nicht kann.	• Ich will dem Lehrer erklären, was ich entdeckt und begriffen habe.
• Ich darf diese Regel ja nicht vergessen oder verwechseln.	• Ich will wissen, wie dieses System funktioniert.
• Was ich von mir gebe, darf nicht falsch sein.	• Was ich von mir gebe, muss von mir untersucht und bearbeitet werden.
• Hoffentlich hat niemand etwas auszusetzen an dem, was ich gesagt und gemacht habe.	• Ich will wissen, was meine Kameraden darüber denken und wie der Lehrer es sieht.

Verabreichtes Wissen und die vom Lehrer ausgehende Vermittlungsabsicht weckt beim Schüler kaum eine intrinsische Motivation, sondern ein Vermeidungsverhalten. Der lehrerorientierte Unterricht kommt aus der Lernerperspektive einem Reiz-Reaktions-Mechanismus nahe. „Der Schüler denkt: was wird der Lehrer wohl heute vorhaben? Der Lehrer beginnt: Heute wollen wir mal folgendes machen!“ (Wagenschein, 1992, S. 29).

2.2.5 Rolle der Lehrerin als Lernbegleiterin

Entdeckendes Lernen versteht sich *nicht* als didaktische Konzeption, die den Schüler sich selbst und seinen Wissenskonstruktionen überlässt. Die „neue“ Rolle der Lehrerin besteht darin, die Lern- und Sozialumgebung[27] zu gestalten und den Lerner während seines Lernprozesses zu unterstützen.

Weil aktiv-entdeckendes Lernen nicht führungslos erfolgen soll, stellt Wittmann (1997, S. 28) dem Lernen durch Belehrung ein Lernen durch *gelenkte* Entdeckung gegenüber. Die Lenkungsmöglichkeiten der Lehrerin liegen in der Organisation der Lernumgebung und Lernzeit, im Aufbau einer Lernkultur und in der Begleitung des Schülers. Die Parallelen zwischen den

[27] Die didaktisch gestaltete Lernumgebung umfasst auch das soziale Lernen und deren Organisations- und Begleitungsformen. Ich erwähne die Sozialumgebung explizit, weil die Gestaltung der Unterrichtsdynamik in Kapitel 2.3.5 eigens zur Darstellung kommt.

beiden Gegenüberstellungen *traditionelle innere Differenzierung versus natürliche Differenzierung* (vgl. Tab. 3) und *Belehrung versus Lenkung des Entdeckens* (vgl. Tab. 5) kommen in jeweils beiden Spalten zum Ausdruck: Links durch starke Lehrerzentrierung und rechts durch das Bild eines Lerners, der „prinzipiell als eigenständiger Denker und Konstrukteur seines Wissens“ (von Glasersfeld, 1998b, S. 35) ernst genommen und unterstützt wird.

Organisation der Lernumgebung und der Lernzeit

Damit die Schüler produktiv lernen[28], bedarf es einer didaktischen Gestaltung der Lernumgebung. Dazu gehören:

a) dezentrierte Lernformen[29], z.B. mit Lernwerkstatt, Wochenplan (vgl. Gasser, 1999) oder „Kernideen und Reisetagebuch“ (Ruf & Gallin, 1999b; vgl. Kap. 2.3.1),

b)[30] Zeitgefässe für soziale Austauschmöglichkeiten und den Aufbau einer Lern- und Kommunikationskultur (vgl. Kap. 2.3.5) und

c) eine individuelle Lernbegleitung,

d) die den *aktiven* Lernprozess des Schülers unterstützt.

Tabelle 5: Rolle der Lehrperson beim Lernen durch Belehrung und beim Lernen durch gelenkte Entdeckung (Wittmann, 1997, S. 28; gekürzte Fassung nach Winter, 1984b)[31]

Lernen durch Belehrung	**Lernen durch gelenkte Entdeckung**
• Lehrer gibt das Lernziel möglichst eng im Stoffkontext an.	• Lehrer bietet herausfordernde, lebensnahe und reich strukturierte Situationen an.
• Lehrer erarbeitet den neuen Stoff durch Darbietung oder gelenktes Unterrichtsgespräch.	• Lehrer ermuntert die Schüler zum Beobachten, Erkunden, Probieren, Vermuten, Fragen.
• Lehrer gibt Hilfen als Hilfen zur Produktion der gewünschten Antwort.	• Lehrer gibt Hilfen als Hilfen zum Selbstfinden.
• Lehrer setzt auf Methoden der Vermittlung.	• Lehrer setzt auf die Neugier und den Wissensdrang der Schüler.

[28] Wittmann (1993a, S. 164) bezeichnet das Lernen als produktiv, wenn es in Sinnzusammenhängen erfolgt und zu eigenen Denkleistungen herausfordert. Der Schüler übernimmt dabei Mitverantwortung (vgl. Kap. 3.4.2).

[29] Als dezentriert gilt eine Lernform, wenn die Schüler an verschiedenen Lernorten, -inhalten und/oder mit individuellem Lerntempo arbeiten. Dezentrierte Lernformen stehen im Kontrast zum lehrerzentrierten Unterricht.

[30] Ausführungen zu a) und b) sind in den angegebenen Kapiteln zu finden.

[31] Eine ausführlichere Gegenüberstellung nehmen Gallin und Ruf (1990, S. 19) vor.

• Lehrer neigt dazu, alleine die Verantwortung zu tragen.	• Lehrer betrachtet die Schüler als Mitverantwortliche im Lernprozess.
• Lehrer sortiert den Stoff in kleine Lernschritte vor und betont eher Separationen und Isolationen der Inhalte voneinander.	• Lehrer versucht dem Beziehungsreichtum mathematischer Sachverhalte Rechnung zu tragen.

ad c) Organisation der individuellen Lernbegleitung während dezentrierten Lernphasen

Folgende Fragen veranschaulichen, warum dezentrierte Lernformen nach sorgfältiger Organisation der Lernbegleitung rufen: „Was unternimmt eine Schülerin, die ratlos vor einer Lernklippe steht, während die Lehrerin von andern Schülern beansprucht wird?“ – „Welche didaktische Aufmerksamkeit vermag die Lehrerin dem einzelnen Kind entgegenzubringen, wenn sich andere hinter ihrem Rücken (z.B. aus Langeweile oder Überforderung) lautstark bemerkbar machen?“ – „Bleiben der Lehrerin Ressourcen für die eigentliche Lernbegleitung übrig, wenn sie das Lernen organisatorisch und disziplinarisch überwachen muss?“

Für die Entfaltung dezentrierter Lernsettings ist es notwendig, dass organisatorische Belange und Aufgabenkontrollen nicht an die Lehrerin gebunden sind. Ein Angebot von Selbstkontroll-Möglichkeiten, bei denen die Schüler ihre Lösungen selber oder im Austausch mit anderen Schülern überprüfen, sind unabdingbar. Auch die Bildung von Lernpatenschaften[32] oder Gruppenarbeiten sind wichtige Elemente einer tragfähigen Lernkultur. Sie dient der Erweiterung des selbstständigen und sozialen Lernens und führt zu zielorientierter Lern- und Denkfähigkeit. Die Kompetenzerweiterung zur Selbststeuerung und die Übernahme von Verantwortung bedarf der sorgfältigen Einführung in die Lernkultur und der Öffnung von Spielräumen.

> Nur wer sein Lernen selber wahrnimmt und zu dessen Analyse und zur Selbstdiagnose fähig wird, kann dieses langfristig auch selber steuern und damit sein eigener Lehrer werden. Dies ist der tiefere Sinn dialogischer bzw. interaktiver didaktischer Arrangements wie Lernpatenschaften, variabler Formen von Kleingruppenarbeit oder reziproken Lernens, ebenso wie reflexionsanregender Werkzeuge wie Arbeitstagebücher, Lernjournale, methodischer Besinnungen (Arbeitsrückschau), lernbiografischer Spurensuchen, des Austauschs über Lernprobleme in Klassengesprächen oder des Einbezugs der Schüler in die Beurteilung der eigenen Leistungen. (Reusser, 1999d, S. 13-14)

[32] Bei Lernpatenschaften bilden jeweils zwei Schüler eine Lerngemeinschaft, die über längere Zeit anhält. Die beiden können sich z.B. bei auftauchenden Schwierigkeiten gegenseitig helfen oder den Lernweg gemeinsam beschreiten.

Ein von Schülern getragener dezentrierter Unterricht ermöglicht es der Lehrerin, sich auf die Begleitung der eigentlichen mathematischen Lernprozesse zu konzentrieren.

ad d) ***Konstruktivistische Lernbegleitung***

Den Schülern gelingt die selbstständige Steuerung des Lernverhaltens unterschiedlich. Die einen brauchen im Verlaufe des Prozesses enger strukturierte Anweisungen und Zielsetzungen, während andere bereits offene Aufgabenstellungen kreativ angehen. Die Lehrerin ist gefordert, mit den Kindern individuelle Lernvereinbarungen zu treffen, falls sie Freiräume (noch) nicht zielgerichtet nutzen können. Es ist wichtig, dass alle Schüler Gelegenheit zur Weiterentwicklung ihrer Lernkompetenzen erhalten und auf dem Weg zu eigenständigem Lernen begleitet werden (vgl. Beck, Guldimann & Zutavern, 1991; Stebler, 1999).

Fehler und Fehlstrategien sollen zu neuen Lernanlässen führen. Die konstruktivistisch orientierte Lehrerin erkennt diese als wichtige Erfahrungen für die Schüler und reagiert im Lerndialog entsprechend: „Kannst du mir erklären, wie du vorgegangen bist?“ – „Zeige mir mit dem Zwanzigerfeld und den Wendeplättchen, wie du die Rechnung gelegt hast.“ – Fragen zur gelösten Addition „5 + 8 = 3“ können lauten: „Ergibt fünf und acht weniger als fünf? Warum?“ – „Wie kommst du auf das Ergebnis drei?“

Die Reaktionen zeichnen sich durch ein Ernstnehmen der Lernerfahrungen aus, da die Lehrerin unabhängig vom Resultat auf Lösungsweg und ermitteltes Ergebnis eingeht. Die Interventionen konfrontieren den Schüler mit dem eigenen Denk- und Lösungsweg, damit er bei der Überprüfung selber erkennt, dass und warum seine Lösung nicht passt. Die konstruktivistische Lernbegleitung hat auch im Erkenntnisprozess des erfolgreichen Rechners eine wichtige Unterstützungsfunktion. Ein Schüler löst z.B. folgende Aufgaben:

5 + 8 = 13	
5 + 9 = 14	
5 + 10 = 15	4 + 11 = 15
	5 + 11 = 16

Mögliche Reaktionen der Lehrerin: „Warum ergeben die ersten drei Additionen immer eins mehr?“ – „Warum resultiert aus den Additionen ‚5 + 10‘ und ‚4 + 11‘ dieselbe Summe?“ – „Begründe die Resultate der beiden letzten Rechnungen.“ – „Erfinde ein eigenes Päckchen, das gleich funktioniert wie das gelöste."

Hinter der konstruktivistischen Begleitung steht die menschliche Grundhaltung, dem Partner mit jenem Respekt zu begegnen,

> der es unmöglich macht, dass er auf einem vom Lehrer vorbestimmten Weg herumgezerrt wird, dem Respekt, der ihn nicht zum Objekt des Lehrprozesses macht, sondern ihn Subjekt des Lernprozesses sein lässt. (Born, Kuster, Flückiger & Füglister, 1983, S. 242)

Das heisst: Die Lehrerin nimmt das Denken des Kindes mit all seinen Kompetenzen und Grenzen ernst, schickt seine Gedanken in die Tiefe und lenkt sie in neue Richtungen.

Belehrende (behavioristische) Lernbegleitung

Der konstruktivistischen Lernbegleitung steht die belehrende gegenüber: Die Lehrerin begegnet dem Schüler als Beobachterin, die einen Fehler feststellt. Sie teilt den Fehler mit und fordert auf, eine von ihr vorgeschlagene Strategie zu verfolgen und gewünschte Antworten zu geben (vgl. Kalthoff, 1995). Die Reaktion der Lehrerin auf die gelöste Addition „5 + 8 = 3" lautet z.B.: „Die Rechnung ist falsch. Zähle fünf Wendeplättchen ab und lege sie in der oberen Reihe vorne beginnend aufs Zwanzigerfeld. Nachher zählst du acht ab und schliesst sie an die bereits gelegten an. Schliesslich zählst du alle." Der Schüler führt die Anweisungen aus und nennt das Ergebnis. Antwort der Lehrerin: „13, ja das ist richtig."

Die behavioristische Begleitung orientiert sich am *richtigen* Ergebnis und nicht am beschrittenen Lernweg. Die Lehrerin vermittelt Rezepte, die ihrem Denken entspringen und weist dem Schüler die Rolle des Gehorchenden zu.

Balance zwischen traditioneller und konstruktivistischer Auffassung des Lernens

Die beiden Varianten der Lernbegleitung entsprechen der theoretischen Abgrenzung zwischen innerer und natürlicher Differenzierung (vgl. Tab. 3). Kurt Reusser (1999d) sieht die konstruktivistische und die traditionelle Lernkultur nicht schwarz/weiss, sondern als Akzentverschiebung, die nach dem Paradigmenwechsel eine neue Balance finden muss (vgl. Tab. 6).

Auch der Wirtschaftspädagoge Rolf Dubs (1995) weist auf kritische Momente hin, wenn ...

> geglaubt wird, der Paradigmenwechsel zum Konstruktivismus und der Verzicht auf Herkömmliches würden alle unsere Schulprobleme lösen. (....) Wichtiger ist das Bemühen, Lern- und Denkstrate-

> gien, Metakognition und Transfer zielstrebig in den Unterricht hineinzutragen. Und nutzlos wird die ganze Auseinandersetzung mit diesen beiden[33] Paradigmen, wenn sie die Unterrichtsproblematik ausschliesslich auf die Führungsfrage „angeleitetes Lernen versus selbstgesteuertes Lernen" reduzieren. (ebd., S. 890/902)

Das St. Galler Management-Konzept (Bleicher, 1996) empfiehlt ebenfalls, die wichtige Zeit des Paradigmenwechsels zu nutzen und sich nicht euphorisch vom einen ins andere zu stürzen. Während dieser Zeit sollen diejenigen Dimensionen sorgfältig definiert werden, welche neuen paradigmatischen Vorstellungen zum Durchbruch verhelfen. Die hohe Kunst des Managements liegt darin, den Prozess des paradigmatischen Übergangs richtig zu „timen":

> An den Stellen des Systems, an denen der Wandel besonders deutlich ansetzt, sind Veränderungen, die den neuen paradigmatischen Vorstellungen entsprechen, zügig zu vollziehen. An jenen Stellen jedoch, an denen das Bisherige sich weiterhin als effizient erweist, sind vorsichtige Schritte hin zum Neuen zu wagen, ohne das Erreichte durch zu weitreichende und zu rasche Schritte zu gefährden. Der Ausgleich beider Aspekte, der Veränderung und der Bewahrung in der zeitlichen Abfolge von Aktivitäten, wird damit zur prinzipiellen Erfolgsformel für die Handlungen des Managements. (ebd. S. 589)

Tabelle 6: *Nicht nur* traditionelles Lernen, *sondern auch* konstruktivistisch orientierte Lernangebote (Reusser, 1999d, S. 13)

Zur Bildungsaufgabe von Schule	
nicht nur	**sondern auch**
fachliches Lernen, Wissensvermittlung lernen	Lernen lernen, geistige Kräftebildung
direkte Instruktion, nachvollziehendes Lernen	Eigenerfahrung, entdeckendes Lernen
Sololernen, Robinsonlernen	dialogisches und kooperatives Lernen
fremdgesteuertes, abhängiges Lernen	selbstreguliertes, autonomes Lernen
produktorientiertes Lernen	prozessorientiertes Lernen
bewusstloses Lernen	*reflexives Lernen*

[33] Bezieht sich auf den Kognitivismus und den Konstruktivismus.

Die kritischen Positionen, die Reusser (1999d) und Dubs (1995) gegenüber dem didaktischen Trend einnehmen, deute ich als bewusste Wahrnehmung und Reflexion der paradigmatischen Übergangszeit, die in Richtung einer konstruktivistischen Didaktik weist.

Die „Sowohl-als-auch-Strategie" kommt im Modell der kognitiven Berufslehre gut zum Ausdruck, indem sie den Prozesscharakter der Lernbegleitung betont. Es spiegelt sich darin, dass Formen der Lernbegleitung nicht situativ als „Entweder-oder", sondern im Rahmen mittel- und langfristiger Unterrichts- und Lernprozesse aufzufassen sind.

Modeling, Scaffolding, Coaching, Fading (vgl. Dubs, 1995, S. 899; Reusser, 1994b, S. 30)

Für die Begleitung des Lernens hat sich die auf Ideen von Vygotsky (1974) beruhende Rahmentheorie des *cognitive apprenticeship* (kognitive Berufslehre) in der Didaktik verbreitet. Das Modell geht vom Kind aus, das seine kognitiven Funktionen wie in einer handwerklichen Berufslehre erwirbt, indem es zuerst reifere Lernende beobachtet und zunehmend eigene Schritte tut. Die fähigeren Personen bzw. die Lehrerinnen nehmen ihre Anleitungs-, Steuerungs- und Stützfunktionen im selben Ausmass zurück, in dem der Schüler selbstständiger und lernkompetenter wird (Reusser, 1999d, S. 14). Die Formen der Begleitung beinhalten:

Modeling. Die Lehrerin modelliert[34] Tätigkeiten durch lautes Denken, damit sich die Schüler eine Vorstellung über anzustrebende Ziele und hinführende Wege, Mittel und Methoden aufbauen können. Das Modeling geht von der Lehrerin aus und erfolgt ökonomischerweise in einem kreativ gestalteten Frontalunterricht.

Scaffolding. Die Lehrerin modelliert nur noch teilweise, d.h. sie stimmt ihre Hilfe auf die spezifischen Bedürfnisse des Schülers ab. Wörtlich bedeutet Scaffolding, dass sich die Lernenden an einem personalen Lerngerüst halten dürfen und allmählich loslassen müssen. Scaffolding ist eine Begleitung von kognitiv anspruchsvollen Lernprozessen und sinnvollerweise eher im individuellen Lerndialog umzusetzen.

Coaching. Die Lehrerin überwacht die individualisierten Lernprozesse der Schüler zwecks Optimierung. Ein gutes Coaching setzt hohe diagnostische Kompetenzen und fachdidaktische Kenntnisse voraus.

---

[34] Modellieren entspricht der lerntheoretischen Variante *Modelllernen*: Die Lehrerin steht den Schülern Modell für eine aufzubauende Verhaltensweise (Bandura, vgl. Steiner, 1996).

Fading. Die Lehrerin nimmt die Hilfestellungen so weit zurück, wie schülerseits die Kompetenzen zum Problemlösen steigen und tritt allmählich aus dem Lernprozess. Coaching und Fading setzen eine substanzielle und didaktisch gestaltete Lernumgebung voraus, damit qualitativ hochstehende Lernergebnisse resultieren.

Die Begleitungsformen zeigen eine mögliche Entwicklungsrichtung auf, die entsprechend den Lernkompetenzen der Schüler eine individuelle Anpassung verlangt. Aus motivationalen und lernpsychologischen Überlegungen kann weder Modeling noch Fading den Lernbedürfnissen des Unterstufenschülers längerfristig gerecht werden. Scaffolding und Coaching sind Begleitungsformen, die sich am Lernweg des Schülers orientieren und ihn zu einem eigenständigen Lerner führen.

2.3 Leitlinien eines genetisch-konstruktivistisch-dialogisch orientierten Mathematik-Unterrichts

Eine genetische Unterrichtskonzeption orientiert sich an natürlichen Erkenntnisprozessen, die der Entwicklung historisch gewachsener Fachstrukturen *und* der individuellen Aneignung mathematischen Wissens zu Grunde liegt. Da zwischen der Entwickelbarkeit des Stoffes und dem Entwicklungspotenzial des Kindes eine produktive Spannung besteht, findet der Schüler Anknüpfungsmöglichkeiten für sein eigenes Lernen (Selter, 1997, S. 4).

Das dialogische Prinzip betont die Bedeutung des sozial-interaktiven Austausches in Lernprozessen. Die folgenden Leitlinien geben dem konstruktivistisch ausgerichteten Unterricht didaktische Konturen und liefern kognitions- und lernpsychologische Hintergründe.

2.3.1 Ganzheitliche Zugangsweisen und Orientierung an Kernideen

Die Darstellung und Begründung ganzheitlicher Zugangsweisen erfolgt an drei konstruktivistischen Ansätzen, die sich ergänzen. Martin Wagenschein (1992) vertritt das genetisch-sokratisch-exemplarische Lernen, Urs Ruf und Peter Gallin (1990[35], 1993a, 1993b, 1995, 1996, 1999a, 1999b) hinterlegen mit dialogischem Lernen ihre Spuren und Erich Ch. Wittmann, Gerhard N. Müller und Heinz Steinbring prägen die dritte Richtung mit dem Projekt „mathe 2000“ (vgl. z.B. Müller et al., 1997).

[35] In den ersten drei Publikationen (1990, 1993a, 1993b) ist Gallin der erstgenannte Autor, in den übrigen Ruf.

Genetisch – sokratisch – exemplarisch

Nach Wagenschein (1992) führen systematisch hierarchisierte und linear durchgeführte Lehrgänge zu einer schulischen „Erledigungsmaschinerie“, die den Unterricht stofflich belastet und zeitlich erdrückt.

> Eines baut sich aufs andere, sei es logisch oder chronologisch: Ordnung muss sein; Lücken rächen sich; man kann nie wissen, wozu man das Einzelne brauchen wird. Die Begründungen „sind logisch“, aber auch nur das. Sie sind nicht pädagogisch. Sie sehen das fertige Fach und im Grunde nicht das Kind sondern den fertigen Menschen, den Erwachsenen vor sich, nur im Kleinformat, nur quantitativ noch „beschränkt in der Auffassungsgabe“. Aber Lehrer sein heisst: Sinn haben für den werdenden, den erwachenden Geist. Und Fachlehrer sein heisst: zugleich Sinn haben für das gewordene und werdende Fach. (....) Ein solcher systematischer Lehrgang verführt zur Vollständigkeit, (denn er will bereitstellen) damit zur Hast und also zur Ungründlichkeit. So baut er einen imposanten Schotterhaufen. Gerade, indem er sich an die Systematik klammert, begräbt er sie, und verstopft den Durchblick (...). Er verwechselt Systematik des Stoffes mit Systematik des Denkens. (ebd. S. 28-29)

Lineare Lehr-/Lern-Gänge verstopfen den Durchblick aufs Ganze, sie verschleiern die Übersicht mit dem abzuarbeitenden Detail. Die Pflichterfüllung, Seite für Seite im Lehrmittel durchzunehmen, schafft Stoff- und Zeitdruck, deren Verdünnung führt zu Substanzverlust und lässt die fachliche Vertiefung unerreichbar erscheinen (vgl. Abb. 7). Wagenschein (ebd.) empfiehlt deshalb „Mut zur Lücke“ und „Mut zur Gründlichkeit“ durch verdichtetes Lernen am Exemplarischen.

Die Beschränkung könnte durch stoffliche Plattformen erfolgen, die entlang eines Lehrgangs zur vertieften Auseinandersetzung einladen. Wagenschein entgegnet, Lernen dürfe nicht aus einem Durchschreiten von Plattform zu Plattform mit curricular vorgegebener Richtung und verdünnten Verbindungen bestehen, es müsse über ganzheitliche Einstiege von aussen[36] oder am „reinen Exemplarischen“ erfolgen. Das Exemplarische oder „das Einzelne, in das man sich hier versenkt, ist nicht Stufe, es ist *Spiegel* des Ganzen“ (Wagenschein, 1992, S. 32). Der Unterricht stellt reichhaltige Problemkontexte voran und nicht elementare Einzelteile. Im Gegenteil: Er steuert auf grundlegende (einfache) Fragestellungen zu und legt diese in der Aus-

[36] Einstieg von aussen bedeutet, dass der Lerner nicht von Plattform zu Plattform schreitet und über Einfaches „in den Turm des Faches hineingeht“ (ebd., S. 34), sondern ohne bereitgestellte Vorkenntnisse einsteigt.

einandersetzung mit dem Exemplarischen frei. „*Das Seltsame fordert uns heraus, und wir fordern ihm das Einfache ab*“ (ebd. S. 35).

In einem „radikal exemplarischen“ Mathematik-Unterricht könnte sich das Exemplarische[37] z.B. auf den Beweis des Nicht-Abbrechens der Primzahlen beschränken. Der Lerner erhielte die Chance, derart mathematische Einsichten zu gewinnen, „dass ein Blick schon in diesen Spiegel allein, wenn er nur tief genug wäre, mehr Mathematisches enthüllen könnte, als mancher ‚mitgekriegt‘ hat, der die Reifeprüfung in ‚Mathe‘ ungeschoren passierte“ (ebd., S. 33).

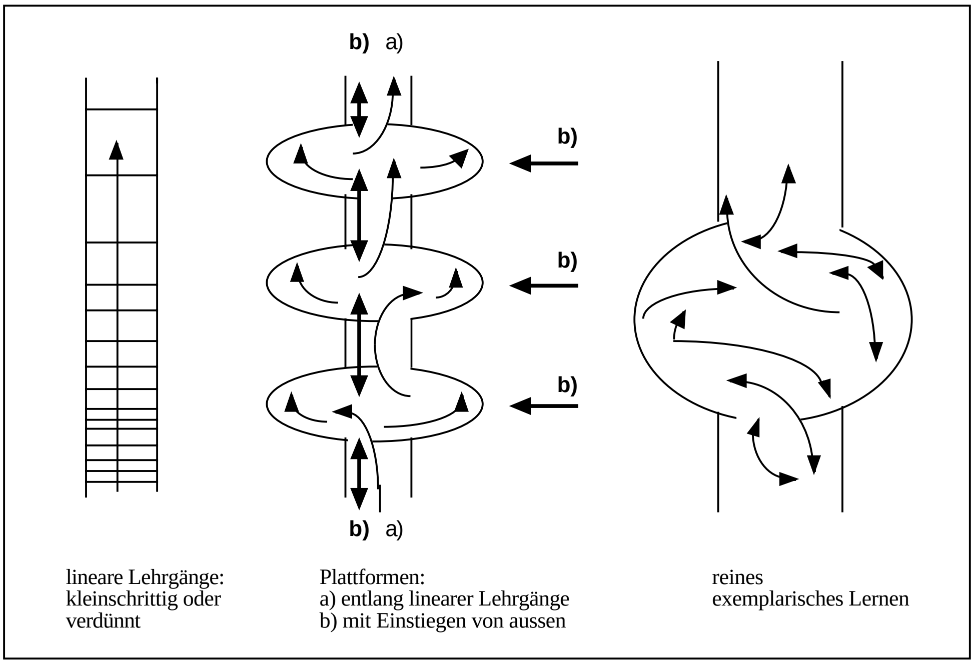


Abbildung 7: Genetisch-exemplarisches Lernen erfolgt durch Einstiege von aussen bzw. am rein Exemplarischen (Wagenschein, 1992, S. 30)

Der genetische Ansatz Wagenscheins gründet auf der Subjektseite des Lerners *und* des Lehrers. Beide müssen von exemplarischen Themen fasziniert sein und von ihnen ergriffen werden, denn der Lerngewinn ist untrennbar verknüpft mit individuellen Interessen und Neigungen. Das Exemplarische ist nicht kopierbar und kann deshalb nicht in einem Katalog exemplarischer Themen oder in einem Lehrmittel erscheinen.

Exemplarische Lernumgebungen fordern Lehrer und Schüler heraus, indem sie Unsicherheit erzeugen und Neugierde wecken. Die Dreiheit genetisch-sokratisch-exemplarisch ist nach

[37] Häufig gebrauchte Synonyme für exemplarisch: „stellvertretend, abbildend, repräsentativ, prägnant, Modellfall, mustergültig, beispielhaft, paradigmatisch“ (ebd., S. 32).

Wagenschein eine genetische Einheit: „Die *sokratische*[38] Methode gehört dazu, weil das Werden, das Erwachen geistiger Kräfte, sich am wirksamsten im Gespräch vollzieht. Das *exemplarische* Prinzip gehört dazu, weil ein genetisch-sokratisches Verfahren sich auf exemplarische Themenkreise beschränken muss und auch kann“ (ebd. S. 75). Innerhalb der Mathematik-Didaktik postulierte Freudenthal (1973), dass der Lehrer den mathematischen Stoff unabhängig von Lehrmitteln und Didaktiken vorerst selber analysieren und anschliessend mit den Schülern einen genetisch-sokratisch-exemplarischen Weg beschreiten soll. Er fordert auf, sich bei der didaktischen Analyse eines Wissensgebietes an der Schülerperspektive zu orientieren und zu fragen: „Welches ist die Bedeutung solchen Stoffes für sie?“ (ebd., S. 136; vgl. Selter, 1997). Exemplarisches Lernen trägt im Ansatz von Urs Ruf und Peter Gallin die Bezeichnung *Lernen mit Kernideen und Reisetagebuch.*

Dialogisches Lernen mit Kernideen und Reisetagebuch

In der Konzeption von Ruf und Gallin (1999a, 1999b) ist Lernen ein Dialog unter ungleichen, aber gleichwertigen Gesprächspartnern. Der Austausch erfolgt über das gegenseitige Erzählen singulärer Seh- und Denkweisen, ohne Wissensgefälle zwischen Lehrerin und Schüler. „Als Ich und Du haben sich Lehrende und Lernende wechselweise etwas zu sagen, zwischen dem Wissenden und dem Nichtwissenden dagegen gibt es nur die Belehrung, die das Gefälle beseitigt“ (ebd., 1999b, S. 13). Die vordringlichste pädagogische Aufgabe besteht darin, dem Schüler ein positives Grundgefühl zu bestätigen und in ihm eine Forscherneugier zu wecken. „ICH BIN JEMAND UND ICH KANN ETWAS, UND ZWAR NICHT NUR SO IM ALLGEMEINEN, SONDERN GANZ KONKRET: IN DER TÄGLICHEN ARBEIT AN DEN STOFFEN“ (ebd. S. 7). An Stelle des Defizitdenkens (das kann ich noch nicht) tritt die Erfolgsorientierung (ich möchte das herausfinden).

> Noch-nicht-Wissen und Noch-nicht-Können sind dann nicht mehr hoffnungslose und unangenehme Zustände, die man so rasch wie möglich hinter sich bringt, sondern Zustände, die man auskostet und geniesst, weil sie einmalig sind – Zustände, die den neugierigen, weltoffenen und entwicklungsfähigen Menschen kennzeichnen und ein Leben lang begleiten. (ebd. S. 9)

[38] Die sokratische Methode ist durch den Diskurs zwischen gleichwertigen Partnern gekennzeichnet. Der Lehrer führt den Schüler zu Erkenntnis, indem er ihn mit seinem eigenen Wissen konfrontiert. Seine Unterstützung ist nicht fachspezifisch. Beispiele: „Welches Problem möchtest du lösen? – Was meinst du mit deinen Worten? – Warum sagst du das?“ (vgl. Loska, 1995).

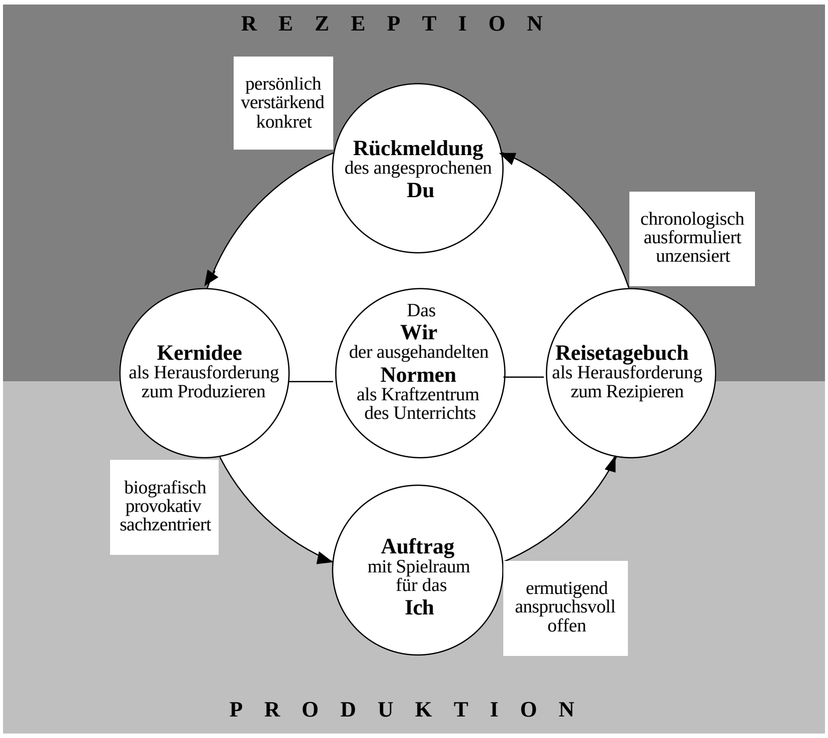


Abbildung 8: Dialogisches Lehren und Lernen kreist um das Kräftezentrum „auszuhandelnde Normen" (Vereinigung zweier Abbildungen aus Ruf und Gallin, 1999b, S. 12 und S. 149)

Der dialogische Unterricht bedient sich den Instrumenten Kernidee (der Lehrerin), Auftrag (an die Schüler), Reisetagebuch (in dem die Schüler ihren Lernweg festhalten) und Rückmeldung (durch Lehrerin und Mitschüler). Aus den singulären Darstellungen im Reisetagebuch generiert die Lehrerin wiederum neue Kernideen. „Dieses Geben und Nehmen, dieses vitale Ausatmen und Einatmen gibt dem dialogischen Lernen Richtung und Halt" (ebd., S. 11).

Die in einem Kreislauf dargestellten Interaktionsmittel führen via Kernidee zu einem offenen Schülerauftrag, der das Ich in seiner singulären Welt auf Denk- und Entdeckungsreisen schickt und zum Mathematiktreiben herausfordert (vgl. Abb. 8 und 9; ebenso Krauthausen, 1997a). Das Reisetagebuch ist Medium für die sprachliche und zeichnerische Protokollierung dieser geistigen Reisen (Ich mache das so!)[39] und lädt Mitschüler und Lehrerin zum Rezipieren[40] ein (Wie machst du es?). Beim persönlichen und kreativen Erforschen von Lösungen finden die eigentlichen Verstehensprozesse statt. Es kommt zum Gespräch, zur Rückmeldung an das Du

[39] Der Klammerinhalt stammt zusammen mit den nächsten beiden aus dem gleichnamigen Buch von Ruf und Gallin (1995).

[40] Rezipieren bedeutet: fremdes Gedankengut aufnehmen.

und zum Aushandeln von Normen und Regeln (Das machen wir ab.). Die Instrumente der singulären Produktion und Rezeption kreisen um ein Kräftezentrum von Regelungen.

> Hauptmerkmal der Phase des *Singulären* ist, dass sie immer am Anfang eines Lernprozesses steht. Wichtig ist, dass der Lernende Selbstvertrauen gewinnt und mit der eigenen Art des Wahrnehmens, Denkens und Handelns zurechtzukommen lernt. Er bewegt sich zwar in Fachgebieten, die der Lehrer ihm vorgegeben hat, beschreitet aber eigene Wege. (....) Es wird nicht lange dauern, bis sich die Schüler einer Klasse dafür zu interessieren beginnen, was ihre Nachbarn tun und wie sie die Probleme anpacken und lösen. Das Ich tritt in einen Dialog mit dem Du; die singuläre Einstellung zum Stoff wird erweitert durch eine *divergierende*. Wichtig ist jetzt, zu erfahren, wie die andern es machen und wo die Unterschiede zur eigenen Art liegen. (....) Der Frage ‚Wie machst du das?' folgt bald die Frage ‚Wie macht man das?'. Der Lernende will ‚wissen, wie es nun wirklich ist'. Er sucht Zugang zum *Regulären*. Weil der Unterricht das Singuläre nicht entwertet, sondern gestärkt und gefördert hat, und weil der Lernende weiss, wie man mit andern kommuniziert, ist er der Welt des Regulären gegenüber positiv eingestellt. (Gallin & Ruf, 1990, S. 28-29)

Kernideen der Lehrerin und daraus abgeleitete Schüleraufträge

Die Didaktik der Kernideen wendet sich mit analoger Argumentation zu derjenigen von Wagenschein gegen eine stoffliche Segmentierungsdidaktik (Gallin & Ruf, 1990, S. 79-80 und S. 155-156; ebd., 1993a, S. 11; Ruf & Gallin, 1999a, S. 62): „Segmentierung erzeugt Stoffdruck und Frustration" (Gallin & Ruf, 1993a, S. 10). Kernideen begleiten ein dialogisches Lernen mit folgenden Merkmalen (Ruf & Gallin, 1999b, S. 29; vgl. Abb. 8):

Biografischer Aspekt. Kernideen entstehen im Kopf der Lehrerin, allerdings selten am Schreibtisch, sondern auf Grund der persönlichen Auseinandersetzung mit dem eigenen Wissen über mathematische Sichtweisen, Methoden oder fachliche Strukturen und im Gespräch mit Freunden und Kollegen. Meistens stellen sie sich bei alltäglichen Verrichtungen zufällig ein, beim Telefonieren, Spazieren oder Essen. Eine Kernidee ist „eine persönlich gefärbte und pointiert formulierte Aussage über einen komplexen Sachverhalt, die meinem Gesprächspartner ohne Umschweife klar macht, was für mich der Witz der Sache ist" (ebd.).

Wirkungsaspekt. Kernideen tragen persönliche Konnotationen, die das Gegenüber anstecken oder durch einen Auftrag zu forschendem Lernen herausfordern sollen. Die Schüler klären dabei ihr eigenes Verhältnis zum Stoff und aktivieren ihre persönliche Neugier.

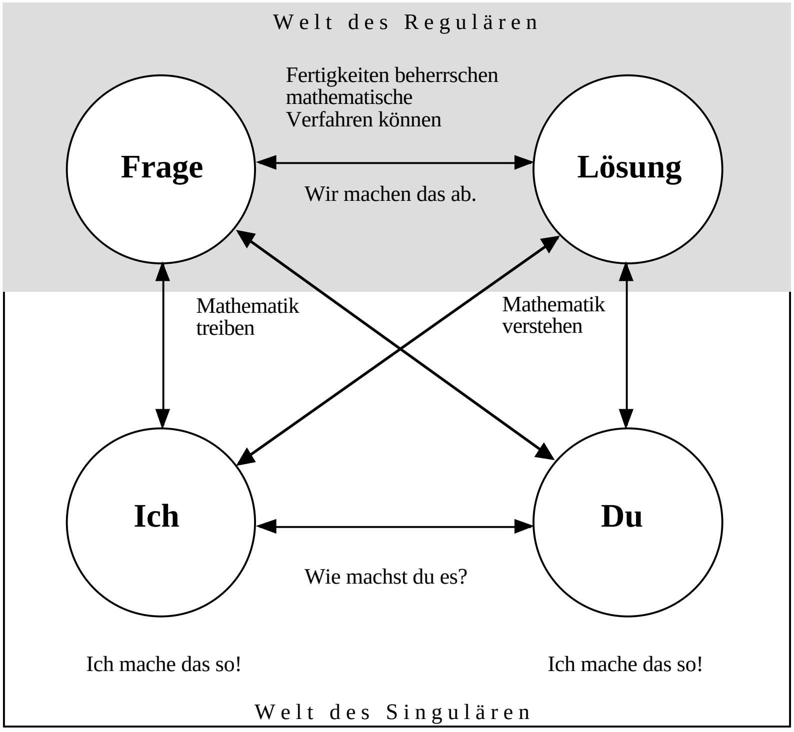


Abbildung 9: Singuläre und reguläre Welt des Denkens (Zusammengeführte und ergänzte Version von Ruf und Gallin, 1999a, S. 24 und ebd., 1999b, S. 76)

Sachaspekt. Kernideen initiieren das Lernen auf eigenen Wegen. „Sie fangen ganze Stoffgebiete in vagen Umrissen ein, rücken eine provozierende Eigenheit in den Vordergrund und laden zu einem partnerschaftlichen Dialog ein“ (ebd.). Die aus Kernideen generierten Aufträge sollen zum Lernen ermutigen und produktive Kräfte wecken (ebd. S. 49):

Ermutigung zum singulären Produzieren. Da die Aufträge zum Tun einladen, müssen sie im ersten Teil möglichst für alle erfüllbar sein. Kinder mit unterschiedlichen Voraussetzungen dürfen *ihre* greifbare Lernumgebung finden und den ihnen angemessenen Zugang wählen.

Herausforderung durch das anspruchsvolle Gegenüber. Der zweite Teil des Auftrags „lässt das Kind die Potenz des fachlichen Gegenübers spüren und fordert es so zu Höchstleistungen heraus. Enthält ein Auftrag eine solche Rampe für Könner, werden unterschiedliche Begabungen simultan gefordert und gefördert“ (ebd.). Das didaktisch aufbereitete Feld kann im Sinne eines natürlich differenzierten sozialen Lernens fruchten (vgl. Kap. 2.2.4).

Spannung für die Lernpartner. Offene Aufträge führen zu individuellen, originalen und originellen Lösungswegen. Die enthaltenen Überraschungseffekte sichern die Aufmerksamkeit der Rezipienten, also der Mitschüler und der Lehrperson.

Ruf und Gallin (vgl. 1999b, S. 18) geben eine Anleitung zum „Aufspüren“ von Kernideen:

1. Stellen Sie sich ein umfassendes Stoffgebiet vor, das Sie mögen.
2. Blenden Sie aus, was Sie nur interessiert, weil Sie an Ihre Schüler denken.
3. Erinnern Sie sich an den Zeitpunkt, an dem das Gebiet Ihr Interesse geweckt oder ein Schlüsselerlebnis hervorgerufen hat.
4. Falls Sie sich an kein Schlüsselerlebnis erinnern, suchen sie einen Dialogpartner auf, der nicht Fachmann oder Fachfrau ist. Erklären Sie ihm, was Sie über ihr Fachgebiet denken und was für Sie der Witz der Sache ist. Wie reagiert ihr Partner? – Lassen Sie sich von seinen Fragen und Einwänden inspirieren.
5. Üben Sie sich im Erzählen und geben Sie Ihrem Schlüsselerlebnis die Gestalt einer Anekdote.
6. Hat ihre Anekdote eine attraktive Pointe, z.B. in Form einer herausfordernden Frage, eines animierenden Bildes oder einer kühnen Behauptung?
7. Halten Sie Umschau nach Schlüsselobjekten, die das Ganze exemplarisch darstellen: z.B. eine repräsentative Aufgabe oder Geschichte.
8. Testen Sie Anekdote und Schlüsselobjekt im Freundeskreis, bevor Sie einen Auftrag in die Klasse einbringen.

Kernideen entspringen subjektiv bedeutsamen Schlüsselerlebnissen der Lehrerin und sind analog der exemplarischen Themengenerierung nach Wagenschein (1992) nicht kopierbar. Hollenstein (1996) stellt die berechtigte Frage: „Wie aber finden Lehrende *Kernideen*, die schülerzentriert sind und gleichzeitig zu den Zielen des Mathematikunterrichts (...) führen?“ (ebd., S. 61). Hier liegt ein wichtiger Aspekt, den die Konzeption offen lässt.

In Anbetracht der stofflichen und zeitlichen Fülle regulärer Unterrichtspensen stellt die Generierung von Kernideen hohe Ansprüche an die Lehrerinnen. Auch der dargestellte Ansatz von Wagenschein erwartet viel von der Lehrerin, wenn er ihr die didaktische Verantwortung für die Entwicklung exemplarischer Themen überlässt. Mit etwas Umsicht lassen sich auch in Lehrmitteln und Sachbüchern Ideen für schülergerechte Aufträge finden, welche mit den offen formulierten Zielen in Lehrplänen didaktisch gerahmt werden können (z.B. Enzensberger, 1997; Hengartner & Wieland, 1995; Ruf & Gallin, 1995; Wittmann & Müller, 1992, 1993).

In folgenden zwei Beispielen stammen die Aufträge aus Lehrmitteln, die sich an Grundideen des Mathematik-Unterrichts sowie am exemplarischen und dialogischen Lernen orientieren:

1. Schreib grosse Zahlen auf. Erkläre, warum du diese Zahlen gross findest.
2. Denk dir eine grosse Zahl. Wie stellst du sie dir vor? Welche Farbe könnte sie haben? Schreibe und male.
3. Such in deiner Umgebung grosse Zahlen. Schreib auf, wo du sie gefunden hast. Male, zeichne und klebe. (....)
9. Merk dir eine Zahl. Schreib Zahlen auf, die grösser sind als deine Zahl. Schreib auch Zahlen auf, die kleiner sind. (Ruf & Gallin, 1995, S. 113)

Den ersten Teil der Aufträge können wohl die meisten Zweitklässler erfüllen. Die Aufgaben fordern heraus, eigene Wege zu begehen und laden ein, individuelle Lösungen zu finden.

Das zweite Beispiel stammt aus dem Zahlenbuch 1 (Schülerbuch S. 52; vgl. Hengartner & Wieland, 1995, S. 125). Es bezieht sich auf bildlich dargestellte Sachsituationen, zu denen die Schüler Rechengeschichten erfinden:

- In einer Vase sind 5 Blumen eingestellt, ausserhalb befinden sich 9 einzelne Blumen.
- Aus einer Baumkrone gucken 6 Äpfel, 5 liegen am Boden.
- Auf dem Baum sind 5 Birnen zu sehen, 4 liegen frei am Boden, 5 befinden sich in einer Zaine. In einer zweiten liegt eine einzelne Birne, daneben steht ein leerer Korb.

In zwei weiteren Aufträgen sind die Operationen „8 – 3“ und „3 + 3“ vorgegeben, die Schüler sollen dazu eine Zeichnung anfertigen. Kommentar: Aus den Aufgaben dürften individuelle Operationsprotokolle und Zeichnungen hervorgehen, welche die Rezipienten vielfältig überraschen können (vgl. Lorenz, 1993).

Reisetagebuch als dialogische Unterrichtsmethode:
Feld für singuläre Produktionen und den Austausch zwischen Ich und Du

Das Reisetagebuch ist vergleichbar mit einer Lernwerkstatt, in welcher der Lerner auf eine Entdeckungsreise geht und seine persönlichen Erfahrungen mit Bild und Text chronologisch protokolliert. Der Schüler verwendet dabei keine reguläre Fachsprache, sondern die singuläre

Sprache seines Verstehens, denn es „gelten die lokalen Normen des internen Sprachgebrauchs. Beurteilt wird nur das, was für den nächsten Entwicklungsschritt relevant ist“ (Ruf & Gallin, 1999b, S. 90). Der Einzelne darf seine persönliche Auseinandersetzung mit dem Stoff unzensiert und ohne Rücksicht auf globale Normen zu Papier bringen. Es besteht aber der Anspruch, dass ein wohlwollender und eingeweihter Leser die geschaffenen Texte – obwohl sie unperfekt und lückenhaft sind – ohne zusätzliche Erklärungen versteht. „Stichwörter und zusammenhangslose Kritzeleien genügen nicht“ (ebd.).

> Weil das Reisetagebuch den persönlichen Lernprozess dokumentiert, braucht Lückenhaftes oder Verqueres nicht getilgt oder ausgebessert zu werden. Wie jedes geschichtliche Ereignis muss es akzeptiert und aufgearbeitet werden, und zwar nicht so, dass man es nachträglich beschönigt oder fälscht, sondern so, dass man für die Zukunft die notwendigen Konsequenzen zieht. Was im Moment als Irrtum oder Schandfleck erscheint, erweist sich im Nachhinein nicht selten als vielleicht schmerzliche, aber notwendige Schlaufe in der Entwicklung. (ebd., S. 89)

Die Lehrerin äussert sich zu den Produktionen mit einer Rückmeldung, indem sie auf Gelungenes hinweist und die Aufmerksamkeit auf Reguläres lenkt. Sie stärkt damit das Selbstwertgefühl des Lerners und gibt Einblick in ihre persönliche Rezeption des Faches.

Indem die Kinder ihre Gedanken sprachlich und bildlich umsetzen, zeigen sie, wie sie denken und rechnen. Während des Übersetzungsprozesses nehmen sie auch (metakognitive) Reflexionen vor und vollziehen damit wichtige Verstehensakte. Dadurch, dass das Reisetagebuch Lernprozesse dokumentiert, vermag es hervorragende diagnostische Funktionen im Sinne von Standortbestimmungen zu übernehmen (vgl. Kap. 3.2.3). Analog dem Lernen mit Reisetagebuch beschreibt Geering (1994) das Lernen mit Zahlenalbum. Selter (1994a) stellt Varianten dieser didaktischen Richtung in einer Übersicht dar.

Lernen nach dem Spiralprinzip

Auch nach Ansicht der Mitglieder des Projektes „mathe 2000“ verlaufen Verstehensprozesse „nicht linear, wie geplant, sondern in Serpentinen, mit Rückschlägen und unerwarteten Sprüngen; sie sind nicht vorhersehbar, nicht planbar“ (Hengartner, 1992, S. 22). Die Lernprozesse lassen sich eher durch „fortlaufendes Knüpfen und Umstrukturieren eines flexiblen Netzes aus Wissenselementen und Fertigkeiten“ (Müller et al., 1997, S. 21) charakterisieren.

Daher sollen die Schüler wiederkehrend Gelegenheit erhalten, die Grundideen des mathematischen Wissens zu vertiefen, zu abstrahieren und weiter zu führen[41]. Dieses Spiralprinzip findet im Zahlenbuch mit einer Rotation um wenige arithmetische Grundideen[42] (Hengartner & Wieland, 1995, S. 6-7) eine konsequente Umsetzung (vgl. Wittmann, 1995b, S. 84-86): Die Grundideen lauten: 1. Zahlreihe, 2. Rechnen, Rechengesetze, Rechenvorteile, 3. Zehnersystem, 4. Rechenverfahren, 5. Arithmetische Gesetzmässigkeiten und Muster. Unter der Thematik *Grössen und Sachrechnen* kommen die Grundideen (6.) Zahlen in der Umwelt und (7.) Übersetzen in die Zahl- und Formensprache hinzu. Den im Lehrmittel formulierten Katalog begleiten zwei weitere Charakteristiken des Spiralprinzips: Das genetische Prinzip des vorwegnehmenden/fortsetzenden Lernens und dasjenige der fortschreitenden Schematisierung.

Dem vorwegnehmenden und fortsetzenden Lernen stellt Wittmann (1995b, S. 83) den berühmten Satz von Bruner (1972, S. 44) voran: „*Jedem Kind kann auf jeder Entwicklungsstufe jeder Lehrgegenstand in einer intellektuell ehrlichen Form erfolgreich gelehrt werden*“. Die These ist gut vereinbar mit Piagets strukturgenetischem Ansatz, nach dem jedes Individuum jeden Sachverhalt mit seinem kognitiven Rüstzeug deuten und verstehen kann, wenn die Darstellungsmittel genügend konkret sind. Didaktisches Fazit: Die unterrichtliche Thematisierung einzelner Wissensgebiete soll bereits auf frühen Stufen in einfacher und konkreter Form erfolgen. Sie bietet dem Kind wiederkehrende Gelegenheiten, an seinem Wissensnetz zu knüpfen.

Die fortschreitende Schematisierung (Treffers, 1983, 1987) bezeichnet, dass Schüler beim Operationshandeln mit konkreten Materialien Einsichten in mathematische Strukturen gewinnen und in einem natürlichen Prozess verinnerlichen. „Jedes Kind löst sich in dem Masse dort von den Stützen, wo es sie nicht mehr benötigt, kann aber jederzeit zu ihnen zurückkehren, wenn es hilfreich erscheint“ (Hengartner & Wieland, 1995, S. 10). Eigene Erfahrungen zeigen, dass Kinder Anschauungsmaterialien häufig als didaktische Krücken empfinden, welchen sie sich rasch entledigen möchten. Es ist deshalb günstig, die Mittel in eine Lernkultur einzubinden, die zum Darstellen, Erklären und Argumentieren (z.B. im Reisetagebuch) einlädt.

---

[41] Beispiel: Im Zentrum von Lehrplänen und in Lehrmittelangeboten für das erste Schuljahr steht die additive und subtraktive Erschliessung des Zahlenraums von 1 bis 20. Dem Spiralprinzip folgend darf und soll dieser Schwerpunkt im zweiten und dritten Schuljahr mit reduziertem zeitlichen Aufwand erneut aufgegriffen werden.

[42] Die arithmetischen Grundideen bleiben über sechs Schuljahre hinweg fast identisch. Auf die im Lehrmittel formulierten Grundideen der Geometrie trete ich hier nicht ein.

Die Konzeption des Zahlenbuchs ruft nach Lernumgebungen, die „thematisch, in der Begrifflichkeit, in den Darstellungsmitteln, in der Sprache usw. genau zueinander passen, damit unnötige Reibungsverluste beim Lernen so weit als möglich vermieden werden“ (Wittmann, 1997, S. 46). Das Lehrmittel löst die Forderung mit einem kompatiblen Angebot an Anschauungsmaterialien ein und unterscheidet sich insofern von den beiden erstgenannten Ansätzen (Wagenschein, 1992; Ruf & Gallin, 1999a, 1999b), als es sich am lernenden Kind und *und* an einer fachlichen Struktur orientiert.

Folgendes Beispiel veranschaulicht das Spiralprinzip mit dem vorwegnehmenden/fortsetzenden Lernen und der fortschreitenden Schematisierung: Traditionelle Lehrmittel führen sukzessive in den Zahlenraum ein, zuerst bis 6, dann bis 10, erst im Verlaufe des Schuljahres steht der ganze 20er-Raum zum Rechnen zur Verfügung. Das Zahlenbuch offeriert den gesamten 20er-Raum von Beginn weg. Mit den offenen Übungsformaten (z.B. Zahlenmauern) können sich die Schüler ihren Raum selber aussuchen und darin mit oder ohne Materialien rechnen. Sie erhalten am 20er-Feld, auf dem sie mit Wendeplättchen (vgl. Abb. 12) wiederkehrend Rechnungen legen, Gelegenheiten, Einsichten in mathematische Strukturen zu gewinnen, den Zahlenraum in einem natürlichen Prozess zu verinnerlichen und darin Beziehungen zu stiften. Die meisten Mathematiklehrmittel werden von Handlungs- und Anschauungs- bzw. Veranschaulichungsmaterialien begleitet. Sie tragen im didaktischen Konstruktivismus eine eigene kognitions- und lernpsychologische Funktion.

2.3.2 Funktion von Handlungs- und Anschauungsmitteln

Abbildtheoretisch orientierte Lehrpersonen setzen Veranschaulichungsmittel ein, damit sich der Emp*fänger* Ein*drücke* ein*prägen* und mit abstrakten Lerninhalten assoziieren kann. In behavioristischen Lerntheorien sollen Handlungs- und Veranschaulichungsmittel über wahrnehmbare Reize erwünschte *Re*aktionen auslösen. Beiden Motiven ist gemeinsam, dass sie durch wiederholt angebotene Wahrnehmungsobjekte und angeleitete Handlungen zu korrekten Rechenprozeduren und -ergebnissen führen möchten. Didaktische Konsequenz: Die Lehrerin trägt attraktives Material zusammen und bietet es so lange und wiederkehrend an, bis die Schüler die gewünschten Reaktionen zeigen. Die in manchen Schulzimmern dekorativ an den Wänden hängenden Wahrnehmungsquellen weisen in diese Richtung. Die Abbildungs- und

Reiz-Reaktions-Funktion steckt auch im Begriff *Veranschaulichungsmittel*[43]: Mathematische Strukturen erhalten eine Modellgestalt und sollen Beziehungen „ver-anschaulichen" oder „abbilden" (vgl. Gudjons, 1989; Hanisch, 1985; Voigt, 1993; Weidenmann, 1989).

Die Bezeichnung *Anschauungsmittel* entspricht der konstruktivistischen Auffassung, dass die wahrgenommene und handelnd erlebte Wirklichkeit subjektive Konstruktionen dieser Wirklichkeit auslöst. Dem Paradigma entlang ist „das Verhältnis zwischen den vom Lehrer bereitgestellten Hilfen und dem Denken des Schülers (...) keineswegs eindeutig im Sinne einer automatisch ablaufenden Transformation" (Lorenz, 1992, S. 1). Der Schüler muss die *quasi*[44] repräsentierten Beziehungen in konkreten Anschauungsmitteln selber erzeugen und daraus mentale Vorstellungen entwickeln. Der didaktische Schwerpunkt verlagert sich somit von der äusseren Aufmachung der Handlungsobjekte und Veranschaulichungen auf die Unterstützung mentaler Konstruktionen in der Anschauung.

Der Erkenntnisgewinn beruht auf internalen Repräsentationen

Für Piaget bezieht sich der Erkenntnisgewinn und die Interpretation von sinnlich Wahrnehmbarem auf internale Repräsentationen, die auf unterschiedlichen Denkstrukturen gründen. Er legt dies mit der Invarianztheorie anschaulich dar: Kinder, die sich bei der Interpretation der Umgebung (externale Repräsentationen) auf die subjektive Wahrnehmung verlassen, können z.B. nach der Verformung einer Plastilinkugel eine Veränderung des Volumens feststellen. Sobald sie in ihrem Denken über internale Repräsentationen und operative Argumente[45] verfügen, kommen sie zum Schluss, dass Plastilin bei Gestaltveränderung sein Volumen beibehält. Beispiele von Lorenz (1993) zeigen in dieselbe Richtung. Abbildung 10 zeigt eine grafisch umgesetzte Schülervorstellung des Zahlenstrahls bis 100. Sie verdeutlicht, „dass die Schüler für sie wesentliche Eigenschaften wiedergeben [und] dass diese Eigenschaften (...) nicht die numerischen Beziehungen sind" (ebd. S. 139) bzw. noch singulären Charakter aufweisen.

---

[43] Mit *Veranschaulichungsmittel* bezeichne ich durchgehend Angebote, die im abbildtheoretischen oder behavioristischen Sinne zum Tragen kommen. *Anschauungsmittel* sind Werkzeuge an der Hand des Schülers (Wittmann, 1993b) und dienen der mentalen Konstruktion von Vorstellungen und Erkenntnissen. Anschauung steht synonym mit mentaler Vorstellung oder internaler Repräsentation.

[44] *Quasi* repräsentierte Beziehungen deutet an, dass sie wohl mehr oder weniger evident darstellbar sind, der Lerner muss sie aber aktiv erzeugen, damit er sie sehen und nutzen kann.

[45] Mögliche Argumente betreffen die *Identität* (nach der Verformung ist es immer noch dieselbe Plastilinmasse), die *Reversibilität* (die Handlung kann rückgängig gemacht werden) und die *Dezentrierung* auf zwei Aspekte (die Kugel ist nach der Verformung schmaler, aber auch höher).

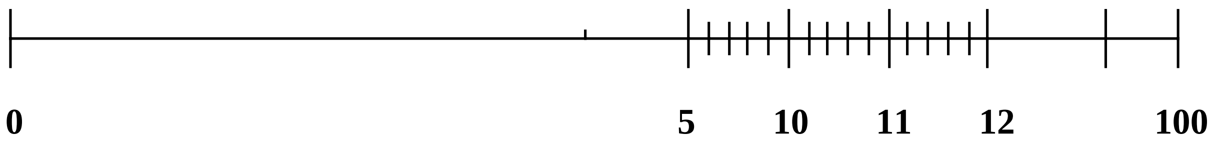


Abbildung 10: Eine grafisch umgesetzte Schülervorstellung des Zahlenstrahls (Lorenz, 1993, S. 139)

Der Schüler zeigt mit seiner Darstellung, dass er bereits einige nummerische Beziehungen erkennt: Die Zahlensymbole 0, 5, 10 markieren den Beginn, die Mitte und das Ende der ersten Dekade. Der Abstand zwischen 5 und 10 ist mit 4 Zwischenstrichen korrekt unterteilt. Nach 10 folgt 11, dann 12. Auf dem 100er-Strahl gibt es Zahlen in grösseren, metrisch aufeinander folgenden Abständen, dazwischen gliedern feinere Unterteilungen. 0 und 100 bezeichnen den Anfang und das Ende des Ausschnittes.

Der Schüler drückt mit seiner Darstellung symbolisch und grafisch aus, dass er erst ansatzweise über ein zusammenhängendes nummerisches Beziehungsnetz verfügt. Seine Interpretation vermischt geometrische Distanzen-Verhältnisse und wechselt den Rhythmus der aufeinander folgenden Zahlen nach subjektiven Gesichtspunkten. Das Beispiel illustriert: Beziehungen zwischen Elementen (z.B. Zahlen) können erst wahrgenommen und dargestellt werden, wenn sie mental verfügbar sind. Ein Modell vermag keine nummerischen und operativen Beziehungen abzubilden und der Schüler kann diese nicht durch passive Verinnerlichung entwickeln. Es dürfte also ...

> unzutreffend sein, dass *jeder* Schüler, der über hinreichende Sehfähigkeit verfügt und motorisch geschickt genug ist, mit dem Material zu manipulieren, seine Struktur *wahrnehmen* könne, und dass dies ausreiche, um die *mathematische* Struktur auch zu *erkennen*. (Lorenz, 1992, S. 2)

Wer handelnd erzeugte Beziehungen in ikonische, sprachliche oder fomal-symbolische Medien übersetzt, wird sich der Handlungsstruktur bewusst

Beziehungen innerhalb mathematischer Zeichensysteme haben für konkret-operativ denkende Schüler keine eigene (intrinsische) Bedeutung[46], sie sind an strukturgleiche Handlungen mit

[46] Sekundäre Verhaltenssysteme bekommen eine eigene Bedeutung, wenn sie sich vom primären Verhaltenssystem, von dem sie ihre Bedeutung beziehen, emanzipieren. Das Medium funktioniert autonom, wenn der Mensch darin Strukturen konstruiert, die nicht (mehr) aus einem primären Verhaltenssystem abgeleitet werden (ebd., S. 314). Dazu bedarf es eines formal-operativen Denkens, das bei Unterstufenschülern (noch) nicht entwickelt ist.

konkreten Objekten gebunden. Die Addition „14 + 5“ bekommt ihren Sinn erst aus der entsprechenden Operationshandlung (Dörfler, 1986, 1989). Hans Aebli (1994, S. 309-315) nennt handelnd erzeugte Beziehungen *primäre Verhaltenssysteme* und sprachlich, kunstsprachlich[47] und denkend hergestellte *abgeleitete* oder *sekundäre Verhaltenssysteme* (vgl. Abb. 11).

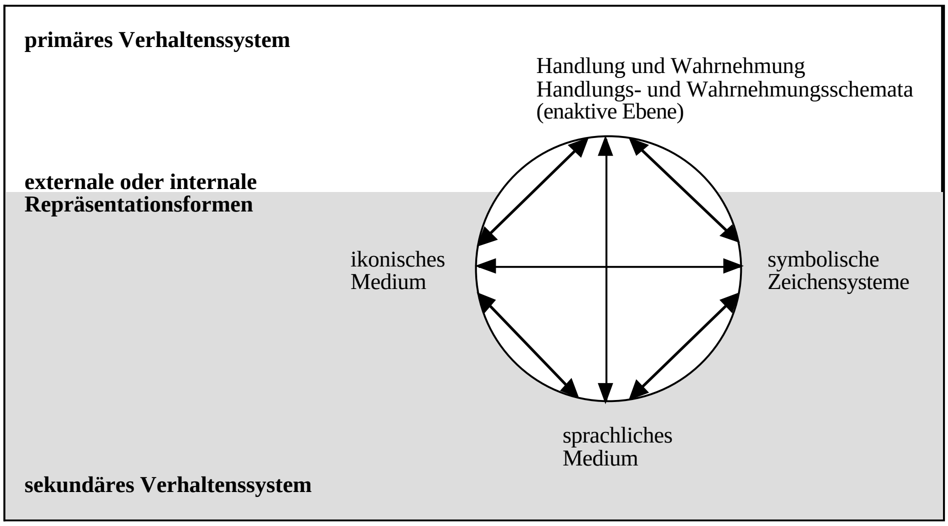


Abbildung 11: Interaktionsmöglichkeiten zwischen Handlung und Darstellungsmedien[48]

Eine Wahrnehmung oder Handlung im primären Verhaltenssystem ...

> erfordert viel Zeit und die Beachtung einer grossen Zahl von Bedingungen, die mit der herzustellenden Struktur nichts zu tun haben. Wegen des langsamen Ablaufs der Handlung kommt der Handelnde hinsichtlich der Strukturbildung nirgends hin. Die Beachtung der vielfältigen Bedingungen des praktischen Tuns droht ihn von den wesentlichen strukturellen Zügen abzulenken. (ebd., S. 312)

In abgeleiteten Verhaltenssystemen[49] ist dieselbe Struktur ökonomischer realisierbar. „Im innerlichen und abstrakten Probehandeln (...) werden die wesentlichen Beziehungen rascher und sicherer

---

[47] Zu den Kunstsprachen gehören die Zeichensysteme des Schreibens und Rechnens. Auch Anschauungsmittel zählen dazu, da sie nicht selbstredend sind und die Bedeutung gelernt werden muss (vgl. Jahnke, 1984).

[48] Je nach theoretischem Bezug entspricht die Handlung und Wahrnehmung dem primären, bedeutungstragenden Verhaltenssystem (Aebli, 1994) oder der enaktiven Wissensrepräsentation (Bruner, 1971, 1974). In Abbildung 11 sind beide Ansätze integriert. Wenn die enaktive Ebene als internale Repräsentationsform gilt, erhalten sie den Status von Handlungs- und Wahrnehmungsschemata. Die Medien im sekundären Verhaltenssystem bezeichnet Aebli als Medien des Denkens. Bruner bezieht die symbolische Form der Wissenserschliessung und -darstellung auf die Sprache. Es erscheint mir in der Mathematik-Didaktik sinnvoll, zwischen der Verbalsprache und der mathematischen Symbolsprache zu unterscheiden (z.B. in Zusammenhang mit Textaufgaben).

[49] Die sekundären oder abgeleiteten Verhaltenssysteme bezeichnet Aebli (1980, 1994) als Medien des Denkens und als Handeln mit anderen Mitteln. Die konkrete Handlung ist kein Denkmedium, sondern eine Verhaltensweise im primären Verhaltenssystem.

> geknüpft. Die Struktursicherung und -verbesserung gelingt eher als in der schwerfälligen, praktischen Handlung“ (Aebli, 1980, S. 22-23).

Da die Bedeutung mathematischer Symbole und Beziehungen in den strukturgleichen Handlungen und Wahrnehmungen liegt, muss der Schüler lernen, die beiden Verhaltenssysteme miteinander zu verbinden.

> Überall dort, wo die Strukturen des Handelns mit den Strukturen des bildhaften Wahrnehmens und Vorstellens übereinstimmen und wo wiederum Zeichen zur Verfügung stehen, die den Strukturen des Handelns und des Wahrnehmens/Vorstellens gemäss sind, ist die Übersetzung in ein anderes Medium möglich. Diese Betrachtungsweise führt uns dazu, die Handlungs- zu den Wahrnehmungs- und Sprachstrukturen in Beziehung zu setzen. (ebd., S. 61)

Damit konkret-operativ denkende Kinder zwischen abstrakten Objekten Beziehungen im ikonischen[50], sprachlichen oder kunstsprachlichen Medium herstellen können, sind sie auf deren sinnlich wahrnehmbare Vergegenständlichung angewiesen (vgl. Dörfler, 1985, 1986, 1988a, 1988b, 1989, 1991). Die Uhr oder das Thermometer ermöglicht z.B., Zeit und Temperatur zu messen, Vergleiche anzustellen und zu kommunizieren. Durch Modelle erhalten mathematische Strukturen eine reale Bühne, auf der sich beim Operieren Einsichten gewinnen lassen.

Didaktisches Prinzip:
Realisierung identischer Strukturen auf verschiedenen Repräsentationsebenen

Für Bruner (1971, 1974) folgt die Wissensdarstellung und -erschliessung einer Entwicklungslogik, die von der Handlung (enaktive Repräsentation) ausgeht und über die ikonische zur symbolischen Repräsentation führt. Der Verlauf ist kein linearer, sondern ein netzartig sich erweitender, der durch Akzentverschiebungen und eine wachsende Kompetenz gekennzeichnet ist, sich flexibler zwischen den Darstellungsformen zu bewegen. Auftretende Koordinations- und Übersetzungsschwierigkeiten lösen Verstehensprozesse aus und legen im Bewusstsein mathematische Strukturen frei.

Es spielt keine Rolle, ob sich die Argumentation auf Aeblis Medientheorie oder Bruners Darstellungsebenen bezieht, denn die mediale Ableitung der handelnden Strukturrealisierung und die Interaktionen zwischen den Repräsentationsebenen sind gemeinsam Kern mathematischer

---

[50] Ich fasse mit Aebli die visuelle Wahrnehmung *und* deren mentale Vorstellung als ikonische Kategorie.

Verstehensprozesse. Die Interaktionen lösen in beide Richtungen, also von der Handlung zur Abstraktion und umgekehrt von mathematisch-symbolischen Zeichen in die konkrete Handlung elementare Lernprozesse aus (vgl. Abb. 11 und Kap. 5.4.9, Diskussion C2).

Das Übersetzungs-Prinzip als Kerngeschäft des mathematischen Erstunterrichts

Krauthausen (1995b, S. 92) beklagt sich mit Meiers (1994, S. 558) über den gängigen dreischrittigen „Brunerismus", den Lehrerinnen einbahnig vom Konkreten zum Abstrakten führen und als Stufen des Unterrichts oder einer Aufgabeneinheit umsetzen. Das folgende Beispiel gibt Einblick, wie der Wechsel von Repräsentationsebenen (bzw. die Strukturrealisierung in verschiedenen Medien) didaktisch gemeint ist. Die Lernumgebung besteht aus den Additionsaufgaben „5 + 4, 5 + 5, 5 + 6, 5 + 7, 7 + 5, 8 + 5", dem 20er-Feld mit Wendeplättchen und dem Reisetagebuch. Aufträge könnten in der vorgeschlagenen Reihenfolge beinhalten:

- „Lege die Rechnungen mit den Wendeplättchen aufs 20er-Feld. Probiere verschiedene Möglichkeiten aus." (Übersetzung: symbolisch – enaktiv)[51]
- „Schau die gelegten Rechnungen an. Was stellst du fest? Schreibe deine Beobachtungen ins Reisetagebuch." (Übersetzung: ikonisch – sprachlich)
- „Erfinde Rechnungen, die nach demselben Muster funktionieren." (Übersetzung: ikonisch oder sprachlich[52] – symbolisch)
- „Schreibe Rechengeschichten zu den Aufgaben." (Übersetzung: symbolisch oder ikonisch – sprachlich)

Die enaktive Ebene bezieht sich auf die handelnde Realisierung einer operativen Struktur und nicht auf beliebiges Aktiv-Sein, z.B. durch Ausmalen einer Blume. Selbst wenn mit dieser gerechnet wurde, entspricht die Handlung (Kolorieren) nicht der Operationsstruktur. Dieselbe Unterscheidung liegt zwischen visualisierten Operationen und dekorativen Illustrationen vor.

Zahlreiche Studien weisen darauf hin, dass es „starken" und „schwachen" Rechnern unterschiedlich gelingt, von einer Repräsentationsform in eine andere zu übersetzen (vgl. Bönig, 1993; Lobeck, 1992; Lorenz, 1991, 1992). Nach Radatz (1991b) verfügen „gute Mathematik-

[51] In Klammer steht jeweils zuerst die Ausgangsebene, in der die Beziehungen vorliegen. Anschliessend ist die Repräsentationsebene angegeben, in der die Struktur realisiert wird.

[52] Ein Schüler kann sich auf die gelegten Rechnungen oder seinen sprachlichen Kommentar zur Aufgabenstruktur beziehen.

schüler“ über ein breites und flexibel anwendbares Schemawissen, sie erkennen die Strukturen und vermögen diese über die Syntax arithmetischer Aufgaben zu realisieren. Schwächeren Rechnern fehlen „oft die Bindeglieder zwischen den einzelnen Repräsentationsebenen mathematischer Problemstellungen“ (ebd., S. 84). Sie können einzelne formal-symbolische Rechnungen mechanisch durchführen, erkennen aber die inhärenten Strukturen nicht und scheitern bei Übersetzungsprozessen (vgl. Abb. 11).

Im Anfangsunterricht erfüllt das operative Tun mit Anschauungsmitteln die Funktion, Einsichten in abstrakte Strukturen zu gewinnen. Die Kinder erweitern und vertiefen damit ihr mathematisches Verstehen und entwickeln Zahlvorstellungen (vgl. Krauthausen, 1994, S. 33-34). Die Mittel sind keine didaktische Krücke, die es möglichst schnell abzulegen gilt, denn sie tragen auf verschiedenen Lernebenen eine wichtige epistemologische Bedeutung.

Anschauungsmittel ermöglichen Einsichten in mathematische Strukturen. – Sie erfüllen diese Funktion aber nicht von selbst:

Entgegen Piagets Auffassung vermögen geeignete Anschauungsmittel Erkenntnisprozesse auszulösen (vgl. Damerow, 1993; Lorenz, 1991, 1992, 1993; Lorenz & Radatz, 1993; Wittmann, 1998b). Da sich abstrakte Strukturen aber erst nach intensiver Auseinandersetzung entdecken lassen, ist die Auswahl an der Beschränkung und nicht an einer bunten Vielfalt auszurichten (vgl. Schipper, 1982; Schipper & Hülshoff, 1984). Nach Wittmann (1993b) sollen Anschauungsmittel schülergerecht-handlich, übersichtlich strukturiert, „innerhalb eines Schuljahres kompatibel und über die Schuljahre hinweg fortsetzbar“ sein (ebd., S. 395).

Radatz (1991a; vgl. Lorenz & Radatz, 1993) stellt weitere Bedingungen[53] an „hilfreiche Arbeitsmittel“ im Erstunterricht: Sie lassen individuelle Lösungswege entwickeln, bieten der Verfestigung des zählenden Rechnens Widerstand, sind gut in verschiedene Darstellungsmedien übersetzbar und müssen „in einem gewissen Umfang auch ‚im Kopf‘ vorstellbar sein, um die Entwicklung von Vorstellungsbildern zu erleichtern“ (Radatz, 1991a, S. 47).

Zwei Bemerkungen: Die Bedingungen dürfen nicht einseitig an den Arbeitsmaterialien festgemacht werden, denn die Suche nach mathematischen Beziehungen am Modell ist auch ab-

[53] Dieser Kriterienkatalog kommt in Kapitel 3.3.1 zur Anwendung, um gebräuchliche Anschauungsmittel des mathematischen Erstunterrichts zu beurteilen.

hängig von einer entsprechend gepflegten Lern- und Übungskultur. Zweitens: Solange Anschauungsmaterialien der sinnlichen Wahrnehmung und der konkreten Manipulation permanent zur Verfügung stehen, lassen sie mechanisch-zählendes Abarbeiten von Rechenaufgaben zu (vgl. Hess, 1997, 1998). Damit *Erkenntnis*instrumente nicht zu stereotyp einsetzbaren Durchführungsgeräten verkommen, sind Lernumgebungen wichtig, die der These von Lorenz (1992, S. 2) folgen. Sie besagt, „dass als notwendiger Zwischenschritt (...) *das mentale visuelle Operieren in der Anschauung* mit den im Unterricht verwendeten Mitteln notwendig ist“.

Der Zwischenschritt kann z.B. durch ein kurz dargebotenes 20er-Feld erfolgen, das mit sieben blauen Wendeplättchen auf der oberen Zeile und acht roten auf der unteren belegt ist (vgl. Abb. 12). Möglicher Auftrag: Die Schüler ermitteln in der Vorstellung, wie viele Plättchen insgesamt auf dem (nicht mehr sichtbaren) Feld liegen. Sie müssen sich auf visuelle Strukturen stützen, da es ihnen während der kurzen Darbietungszeit nicht gelingt, zählend die Anzahl zu ermitteln. Eine Variante besteht darin, die „Kraft der Fünf“[54] (Krauthausen, 1995b) zu nutzen, d.h. aus der roten und blauen Menge die beiden Fünfer zum Zehner zusammenzufassen und die beiden blauen mit den drei roten Wendeplättchen nach der Zäsur zu addieren. Eine andere Strategie ist durch die „geistige Ergänzung“ der oberen Zeile mit den drei blauen Plättchen nach der unteren Zäsur realisierbar.

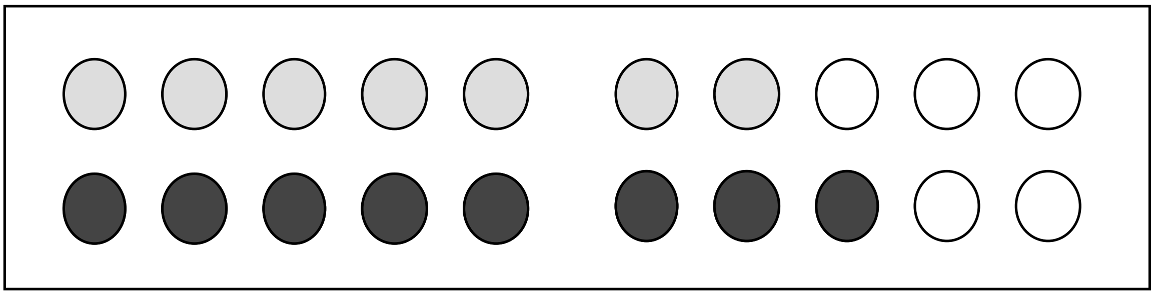


Abbildung 12: Sieben blaue (helle) Wendeplättchen und acht rote (dunkle) auf dem 20er-Feld

Die beschriebene Aufgabenstellung verunmöglicht es, mit der aufwändigen zählenden Strategie vorzugehen, da deren Realisierung eine längere Darbietungszeit bräuchte. Der Entzug des Modells eröffnet die Lernchance, in der Vorstellung nach mathematischen Beziehungen zu suchen, denn „die Möglichkeit, numerische Prinzipien zu entdecken, z.B. dass ‚3 + 4 =‘ und ‚4

[54] „Kraft der Fünf“ bezeichnet die Orientierung am halbierten Zehner. Dadurch können Mengen von 6 bis 10 als „5+1“ bis „5+5“ aufgefasst und eigene Rechenstrategien genutzt werden. Beispiel: „6 + 7 = (5 + 5) + (1 + 2)“.

+ 3 =‘ dasselbe Ergebnis produzieren, (...) ist nicht gegeben, wenn die gesamten Ressourcen zur Strategieausführung [z.B. zum Zählen] benötigt werden“ (Stern, 1998, S. 67). Mentale „operative Turnübungen“ mit den Anschauungsmitteln des Unterrichts „zwingen“ den Schüler, ikonische Strukturen zu erzeugen.

> Gelingt ihm dies nicht, so bleiben für ihn alle ausgeführten Operationen einfache Manipulationen, blosse Handgriffe. Ist er fleissig und guten Willens, so vermag er ihre Abfolge vielleicht auswendig zu lernen, ohne dass sich ihm jedoch die Einsicht in den Sinn eines Ganzen eröffnet. (Aebli 1997, S. 234)

Gute Beispiele zum ikonischen Operieren in der Vorstellung gibt z.B. Senftleben (1996) mit seiner vorgeschlagenen Kopfgeometrie oder Krauthausen (1997b) mit der CD Blitzrechnen.

2.3.3 Prinzip der Mengengliederung und der additiven Komposition

Beim Legen additiver Kompositionen oder beim Vergleichen und Gliedern von Mengen können Schülerinnen mit dem 20er-Feld und den Wendeplättchen (vgl. Abb. 12) mathematische Einsichten gewinnen und tragfähige Mengenvorstellungen entwickeln. Das Potenzial eines solchen Übungsgeländes überzeugt, es verunsichert aber auch, wenn Schüler daran formal-symbolische Operationen mechanisch zählend abarbeiten und die „eigentlich sichtbare“ Fünfer- und Zehner-Struktur nicht nutzen. Für Kinder, die beim zählenden Rechnen verharren, ist die Orientierung am Fünfer ein wichtiger Lernschritt (vgl. Krauthausen, 1995b), den sie selber vollziehen müssen und ihnen kein Material abnehmen kann.

Fünf Elemente sind nicht als Einheit erfassbar, sie bedürfen der Gliederung

Im Zwanzigerfeld halbiert die Zäsur zwischen dem fünften und sechsten Kreis den Zehner in zwei Fünfer-Einheiten (durch das gestaltpsychologische Gesetz der Nähe; vgl. Metzger, 1975). Das Strukturierungsmerkmal „Abstand“ ist ein willkürliches oder externes[55], denn es findet keinen inhaltlichen Zusammenhang zur Anzahleigenschaft der Menge und wirkt somit als assoziativer Reiz für die ökonomische Bestimmung grösserer Anzahlen. Es könnten fünf oder sechs Punkte vor und nach der Zäsur liegen, das Kennzeichen würde die gleiche Reaktion

[55] Die Bestimmung der Anzahl Punkte auf einem Würfelbild erfolgt ebenfalls über ein externes Merkmal, d.h. durch Wiedererkennen einer geometrischen Anordnung und *nicht* durch Erfassung einer Anzahl (Lorenz, 1991, 1993). Die didaktische Position der Anschauer (Zahlbildmethodiker) um 1900 gründet auf diesem Prinzip (vgl. Radatz & Schipper, 1983, S. 36-37).

„es sind fünf“ auslösen, wenn der Fünfer nicht in die additive Komposition von „4 + 1“ oder „3 + 2“ gegliedert werden kann. Damit ist ausgesagt, worauf zahlreiche Studien[56] hinweisen: Kinder und Erwachsene können höchstens drei oder vier[57], nicht aber fünf Elemente spontan[58] als Einheit erfassen (z.B. Chi & Klahr, 1975; Dehaene, 1999). Das Erkennen des Fünfers ist somit eine aktiv zu erbringende kognitive Leistung.

Die Anzahlerfassung in Abbildung 13 (links) kann zählend oder als Komposition von „4 + 1“ bzw. „3 + 2“ gegliedert erfolgen. Bei der linearen Anordnung im 20er-Feld und beim Würfelbild ist die inhaltlich „blinde“ Orientierung an den externen Merkmalen *Abstand* und *geometrische Anordnung* möglich. Dies entspricht aber keiner Anzahlerfassung, sondern einem Reaktionsverhalten auf einen willkürlichen Reiz.

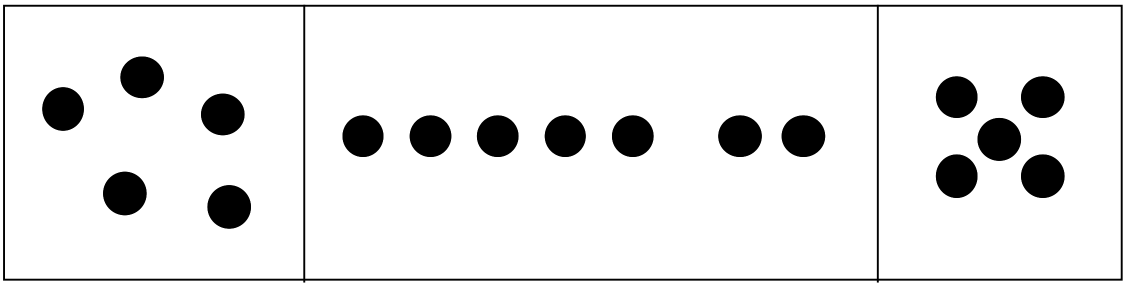


Abbildung 13: Die Anzahl von fünf Einzelelementen ist nicht spontan erfassbar

Bildlich gesprochen: Einige Schüler treten mit Zählkompetenzen in die Schule ein und werden im Anfangsunterricht mit dem Modell des 20er-Feldes konfrontiert, das aus linear angeordneten Kreisen – mit grösserem Abstand in der Mitte – besteht. Die Fünfer-Einheit ist für sie eine Schachtel, die sie am Signal „Abstand“ zwar erkennen, aber nur zählend zu öffnen vermögen. Es fehlt ihnen die Kompetenz, den Fünfer aktiv zu gliedern und so Gewissheit über die Anzahl

56 Gemeint sind vorwiegend amerikanische Studien, aber auch Rude (1907) zitiert Hentschel (einen Zahlbildmethodiker; vgl. Radatz & Schipper, 1983, S. 36-37): „Was das Rechnen mit den Strichreihen betrifft, so ist gewiss, dass die Kinder nicht mehr als 4 Striche als ein ganzes mit einem Blicke übersehen können. Demnach vermögen sie ihre eigenen in Strichen gemachten Aufzeichnungen überall, wo Zahlen über 4 vorkommen, nicht unmittelbar wieder zu lesen, sondern sie sind, wenn das Lesen gefordert wird, zu einem fortwährenden mühsamen und geistlähmenden Nachzählen einzelner Striche gezwungen“ (Rude, 1907, S. 283).

57 Ob *drei* oder *vier* Elemente die grösste spontan erfassbare Einheit bilden, geht aus keiner empirischen Studie eindeutig hervor (vgl. Chi & Klahr, 1975; Dehaene, 1999; Simons, 1981; Stern, 1998).

58 Ich ersetze die üblichere Bezeichnung *Simultan*erfassung [engl. subitizing; zusammengesetzt aus dem lateinischen subito (schnell) und cognitizing (erkennen)] durch *Spontan*erfassung, weil die Bezeichnung ‚simultan‘ in die Kontroverse eingebunden ist, ob das unmittelbare Erkennen einem angeborenen Konzept entspringe oder durch verinnerlichte Zählprozesse erworben werde (vgl. Stern, 1998). Im vorliegenden Zusammenhang interessiert lediglich die Tatsache, dass die Schüler die Einheiten ohne Zählen der Einzelobjekte erfassen.

Elemente zu bekommen. Obwohl die Lehrerin sagt: „Vor dem Abstand sind es immer fünf" trauen sie erst, nachdem sie nachgezählt haben.

Die Anzahlerfassung diskreter Mengen mit drei und mehr Elementen beruht stets auf einem mentalen Mustervergleich, welchen Piaget *mettre en relation* nennt (vgl. Steiner, 1996, S. 273). Eine Vielheit einzelner Objekte wird mit der kognitiven Schablone *spontan erfassbare Gruppen* gegliedert und operativ zu Wahrnehmungseinheiten höherer Ordnung verknüpft.

> Indem unverbundene Elemente zueinander in Beziehung gesetzt werden, wird eine Struktur erzeugt. Liegt diese von Anfang an vor, werden daran gewisse Beziehungen gelöst und andere neu gestiftet, so *transformiert* sich die ursprüngliche Struktur in eine neue. Das Vergleichen stellt fest, ob die elementare Beziehung der Gleichheit/Verschiedenheit vorliegt. Das Suchen eines Elementes in einer Menge von gedächtnismässig gespeicherten oder vorliegenden Elementen impliziert einen Mustervergleich (pattern-matching). (Aebli, 1980, S. 24)

Die über die Handlung (z.B. am Zählrahmen, an einer Perlenkette oder am 20er-Feld) aufzubauende mentale Gliederungsfähigkeit zeigt exemplarisch, dass der Schüler die quasi repräsentierten Beziehungen in seinem Lernprozess vorerst kognitiv konstruieren muss, bis er sie nutzen kann. Das wiederholte passive Wahrnehmen des 20er-Feldes führt kaum zu jenen mentalen Strukturen, die eine nach Beziehungen suchende Wahrnehmung steuern.

Kognitionspsychologischer Hintergrund: Objektivierung als Begriffsbildung

Die Erfassung von fünf linear angeordneten Punkten bedarf der mentalen Gliederung *und* der Herstellung einer additiven Beziehung zwischen den Teilmengen. Die Summe fünf vermag die verknüpften Zweier und Dreier ikonisch und begrifflich „einzupacken" (zu objektivieren), damit sie als *ein* Objekt für die Erzeugung neuer operativer Beziehungen zur Verfügung stehen. In einem objektivierten Element bleiben die eingeschlossenen Beziehungen als Binnenstruktur erhalten und sind bei Bedarf wieder zugänglich (ebd., 1980, 1994).

> Auf dem Wege dieser Strukturierungen spielt die Begriffsbildung eine wichtige Rolle. Sie hat zur Aufgabe, ein Gefüge von Beziehungen innerhalb von Handlungen, von sachlichen Gegebenheiten oder irgendwelcher anderer Aspekte der Wirklichkeit zu *objektivieren*, d.h. in eine quasi-gegenständliche Form überzuführen. (....) Die Begriffsbildung ist also Voraussetzung für die weitere Verknüpfung und damit die weitere Strukturbildung. (ebd., 1980, S. 23)

Das angetönte Prinzip der Verschachtelung zieht sich durchs ganze Zahlensystem: Ein Zehner besteht aus zwei objektivierten Fünfer-Schachteln. Die Fünfziger-Schachtel objektiviert zwei und drei Zehner und der Hunderter zwei Fünfziger. Das Prinzip bleibt dasselbe: 5 objektiviert die Beziehung „2 + 3“ oder „4 + 1“ und 10 objektiviert diejenige von „5 + 5“. Es verändert sich im dekadischen Zahlensystem lediglich der Faktor (10, 100, 1000, etc.) der zu objektivierenden Einheiten (vgl. Abb. 14; Flexer, 1986; Krauthausen, 1995b, S. 98).

Didaktische Konsequenzen: Aufbau einer beweglichen mentalen Gliederung des Fünfers

Bei Lehrerinnen macht sich verständlicherweise Verunsicherung breit, wenn sie die (zu) viel versprechende Aussage der Zahlenbuch-Autoren lesen: „Die Fünf als noch simultan zu erfassende Einheit wird als eine ‚Kraft bewusst‘, die hilft, grössere Anzahlen geschickt zu strukturieren“ (Hengartner & Wieland, 1995, S. 68). Auch Krauthausen (1995b) führt in seinem überzeugenden Artikel *Die Kraft der Fünf und das denkende Rechnen* die Bedeutung dieser „Kraft“ aus und nimmt jene elementaren kognitiven Voraussetzungen als aufgebaut an, die das 20er-Feld als Beziehungen und Strukturen freilegendes Instrument nutzen lassen.

> Am Zehner- bzw. Zwanzigerfeld ist die Kraft der Fünf ganz einfach durch einen vergrösserten Zwischenraum zwischen zwei Fünfern zu nutzen. In allen Fällen entfällt das (insbesondere bei Ziffern grösser als Fünf zudem noch fehleranfällige) Abzählen der Einerstellen einer Zahl, da sie alleine durch Betrachten der Konfiguration zu erkennen ist. (ebd., S. 100)

Aus der Bedeutung des mental verfügbaren und objektivierten Fünfers schliesse ich mit Aebli (1980, S. 171), dass der Zugriff auf höhere Wahrnehmungseinheiten – insbesondere für mechanisch zählende Schüler – nicht *einfach so* erfolgt, sondern einen konstruktiven Lernakt bedingt. Alleine durch Betrachten einer Konfiguration kann der Schüler keine quasi repräsentierten Beziehungen ablesen, es „sind ausgiebige Erfahrungen im handelnden Umgang mit Plättchen o.ä. sowie mit Bildern von Zahl-Mustern erforderlich“ (Krauthausen, 1995b, S. 98).

Der operative Aufbau des Fünfers erfolgt also durch Realisierung und Verbesserung elementarer Strukturen in der Handlung und Wahrnehmung und durch Ableitung in sekundäre Verhaltenssysteme, in mentalen Vorstellungsübungen und Sprechanlässen. Die folgenden Beispiele deuten die didaktische Richtung eines solchen Aufbaus an.

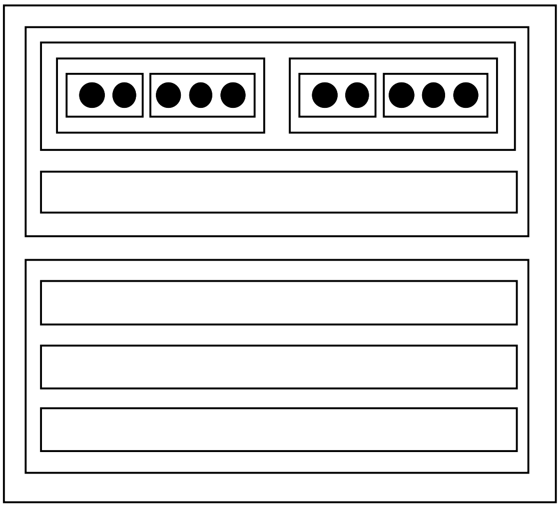


Abbildung 14: Fortlaufende Objektivierung am 100er-Feld, dargestellt bis 50

Übungen mit einem Fünfer-Würfelbild[59] *(vgl. Abb. 15)*

- „Zeichne Fünfer-Bilder des Würfels und male einen Punkt farbig an, auf jedem Bild in einer andern Position. Wie viele Möglichkeiten findest du? Wie viele Möglichkeiten findest du, zwei, drei oder vier Punkte farbig anzumalen?“
- Die auf Karten gezeichneten Möglichkeiten bieten Gelegenheit zum Sortieren und Vergleichen. „Findest du die gleiche Karte aus einer andern Kollektion? Findest du die ‚Gegenteil-Karte‘?“ (Auf der einen Karte ist z.B. der Punkt oben links farbig, auf der andern sind alle farbig, ausser derjenige oben links) Die Übung kann durch direkten Vergleich in der Wahrnehmung erfolgen (zwei nebeneinander liegende Karten) oder durch den Vergleich mit einem eingeprägt Bild.
- Die Kinder erfinden mit ihren Karten selber Spiele wie Memory, Domino oder Quartette.
- Das Würfelbild als geometrisches Anordnungsmuster lässt sich beliebig ersetzen (z.B. lineare oder sternförmige Anordnung; vgl. Krauthausen, 1995b, S. 94; 1997b). Analoge Kompositionsmöglichkeiten ergeben sich durch Geometrie mit Vier- oder Fünflingen (Carniel & Spiegel, 1997), bei der nach Varianten gesucht wird, vier oder fünf Zündhölzer vertikal und horizontal aneinanderzufügen.

[59] Das Beispiel mit dem Würfelbild geht von der schülerseits bekannten geometrischen Anordnung aus. Es zielt auf eine bewegliche ikonische Gliederung des Fünfers und nicht auf dessen statische Verinnerlichung.

- Weitere produktive Übungen bestehen darin, dass die Schüler beim Plättchen verschieben oder -zeichnen günstige Mengendarstellungen suchen und überprüfen. Sie setzen sich aktiv mit der Gliederung des Fünfers auseinander und finden ihre „beste“ Anordnung zur raschen Anzahlerfassung. Sie können die Güte ihrer Darstellungen z.B. prüfen, indem sie die Bilder in eine flache Schachtel legen und nach kurzer Darbietung einen Deckel darüber ziehen. Das Gespräch über verschiedene Anordnungen lässt die Kinder ihre eigenen Gliederungen bewusst werden (vgl. Krauthausen, 1997b; 1. Schuljahr, Übung *wie viele?*).

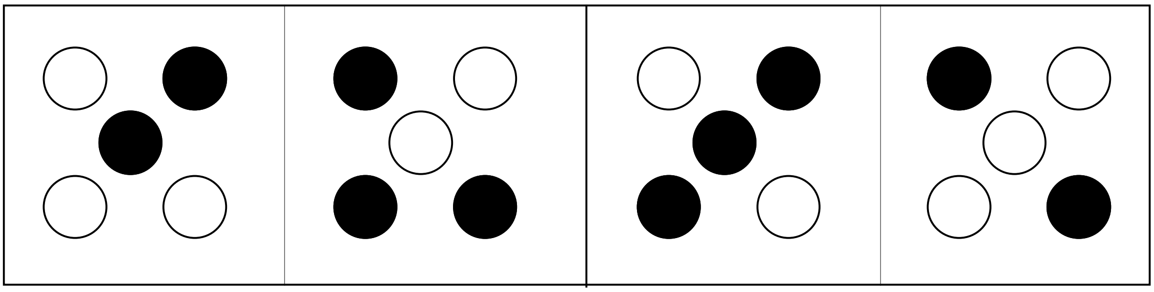


Abbildung 15: Möglichkeiten, zwei oder drei Kreise im Würfelbild auszufüllen (Nebeneinander liegende Zweier- und Dreier-Varianten sind Gegenteil-Karten)

Auch Arbeitsmittel wie Zählrahmen, Steckkuben oder Perlenkette bieten Möglichkeiten, sich aktiv mit der Gliederung des Fünfers und höheren Einheiten via Wahrnehmung *und* Vorstellung auseinanderzusetzen.

2.3.4 Operatives Prinzip – ein konstruktivistisches Prinzip

In einer konstruktiven Lernkultur erfüllt das Üben eher die Funktion des sinnstiftenden *Durcharbeitens* (Aebli, 1997, S. 242) als diejenige des mechanischen *Abarbeitens*[60] willkürlich zusammengestellter Päckchen. Aebli (1985) formuliert – auf Piagets Operationsbegriff aufbauend – das *operative Prinzip*. Wittmann (1985) nimmt dieses auf und konkretisiert es mit dem produktiven Üben (vgl. Kap. 3.4.2; Bauer, 1991).

Das operative Prinzip in drei didaktischen Regeln (Aebli, 1985)

- *Ausgangs*punkt für Lernprozesse sind alltagsbezogene Fragen, die ein relevantes Problem darstellen. Die Lern*ergebnisse* lassen die Situation bewältigen.

[60] Automatisierung zielt auch auf mechanisches Abrufen. Deren Bedeutung kommt in Kapitel 3.4.2 zum Ausdruck.

- Operationen und Begriffe gehen von der Handlung aus und werden sukzessive verinnerlicht und abstrahiert (vgl. Peschek, 1986). Die Schüler *sollen* beim Übersetzen in sekundäre Verhaltenssysteme „stolpern“ und an Schwierigkeiten stossen, denn dabei tritt die realisierte Struktur hervor.
- Durch die Auseinandersetzung mit den Beziehungen zwischen Objekten erlangt der Lerner zunehmend operative Beweglichkeit.

Nach der ersten Regel lösen konkrete problemhaltige Situationen Lernprozesse aus, indem das erkennende Subjekt auf Gegenstände einwirkt und die Wirkungen seiner Handlungen beobachtet. Wissen ist demnach „keine vorgefertigte Sache, sondern wird vom erkennenden Subjekt in Wechselwirkung mit der Realität konstruiert“ (Wittmann, 1985, S. 7). Auf einem Pfadfindertreffen könnte die Regel vielleicht Gelächter der Selbstverständlichkeit auslösen, im mathematik-didaktischen Kontext trägt sie aber eine wichtige Bedeutung, auf die es wiederkehrend hinzuweisen gilt. Wenn sich das mathematische Problemlösen von Handlungsstrukturen entkoppelt und auf das mechanische Durchführen von Rechenprozeduren verlagert, sind die vielerorts beschriebenen Phänomene rund um Kapitänsaufgaben[61] eine natürliche Folge (vgl. Burmester & Bönig, 1993; Hollenstein, 1996; Selter, 1994b). Die zweite Regel spricht den Prozess der Bewusstwerdung an, z.B. bei der Versprachlichung des eigenen Tuns. Die dritte bedarf einer kurzen Ausführung, damit die in Kapitel 3.4.2 dargestellte Übungskonzeption auf einer kognitionspsychologischen Grundlage steht.

Üben als Durcharbeiten heisst Einsicht gewinnen in operative Strukturen

Handeln, Sprechen, Wahrnehmen, Denken und mathematisches Operieren sind Formen des Tuns, die Aebli (1980, 1994) mit dem Strukturbegriff auf einen gemeinsamen Kern zurückführt (vgl. Kap. 2.3.2). Erkennende Subjekte können mit jeglichen Verhaltensweisen unverbundene Objekte miteinander in Beziehung bringen und als Struktur realisieren (ebd., 1980, S. 24). Beispiel: Zwei Mädchen spielen mit sieben Murmeln. Sie stellen mit ihnen handelnd Be-

[61] Dem Sinn nach lautet eine Kapitänsaufgabe: „Auf einem 20 Meter langen Schiff befinden sich 36 Schafe. Wie alt ist der Kapitän?“ Die empirisch festgestellten Phänomene der Kapitänssymptomatik beziehen sich auf die Reaktion von Schülern, die Assoziationen zwischen Textmerkmalen und automatisierten Formalismen herstellen. D.h., „es entstehen nichtöffentliche und mechanisch ablaufende Muster der Problembewältigung“ (Hollenstein, 1996, S. 20), die sich nicht auf die vorliegende Situation beziehen, sondern im leeren Formalismus ein eigenes Spiel treiben.

ziehungen her, können deren Struktur sprechend, wahrnehmend und denkend erzeugen und in eine algebraische Operation übersetzen. Das Additionszeichen symbolisiert z.B. die Verknüpfung „3 + 4“ Murmeln oder „1 + 1“ Mädchen. Die Addition „3 + 4 = 7“ weist eine Verknüpfungsstruktur auf, die sich links im Term spiegelt, nicht aber in der Summe 7. Die additive Komposition ist im Ergebnis nicht eindeutig ersichtlich, sie könnte auch aus „5 + 2“ bestehen.

Weil das Durcharbeiten zu Einsichten in operative Beziehungen und zu einem beweglichen mathematischen Denken führen soll (ebd., 1997, S. 385), interessiert als erstes Ergebnis einer Operation die Verknüpfungsstruktur und *nicht* das Resultat. „Wer die Operation in seinem geistigen Repertoire hat, der wird nichts strukturell Neues entdecken, wenn er das Ergebnis der Operation betrachtet“ (ebd., 1980, S. 228). Das heisst: Aus der Operation „3 + 4“ interessiert zunächst die Konstruktion von „3 + 4“ und die Beziehung zu Nachbar-Operationen. Im Gegensatz dazu liegt die Priorität des behavioristisch orientierten Lehrers auf der Resultatseite bzw. auf der Vereinfachung und Benennung von Operationen durch Namen.

> Wir halten dies für keine attraktive Beschreibung seiner Tätigkeit und meinen, sie werde besser gekennzeichnet, wenn wir sie als ein Konstruieren von mathematischen Gebilden und als ein Deuten und Verarbeiten derselben mit Hilfe neuer auf sie bezogener Operationen kennzeichnen. (ebd., S. 225)

„Welche operativen Deutungen sind beim Betrachten der Verknüpfungsstruktur ‚3 + 4‘ möglich?“ – Tabelle 7 listet einige Varianten auf: Zum Beispiel die Feststellung, dass die Summe grösser ist als ein einzelner Summand (Teil-Ganzes-Prinzip), dass sich die Richtung der Operationsdurchführung nicht aufs Ergebnis auswirkt (Kommutativgesetz) und die Summe konstant bleibt, wenn ich den einen Summanden um eins vergrössere und den andern um eins verkleinere (Satz der Summenkonstanz). Auch Ableitungen auf andere Operationen sind möglich: „Wenn ‚3 + 4‘ ein Ergebnis x hat, dann ergibt ‚3 + 5‘ (eins) mehr.“ Die letzten drei Beispiele beider Spalten beziehen sich auf die konkrete Ausgangssituation (vgl. Stern, 1998).

Tabelle 7: Möglichkeiten, die Operationsstruktur „3 + 4“ zu deuten

• 3 + 4 > 3 (Teil-Ganzes-Prinzip)	• 3 + 4 > 4 (Teil-Ganzes-Prinzip)
• 3 + 4 = 4 + 3 (Kommutativgesetz)	• 3 + 4 = 2 + 5 (Satz der Summenkonstanz)
• 3 + 4 < 3 + 5, denn: ...	• ... (3 + 4) + 1 = 3 + 5

• Die Mädchen können die Murmeln nicht „gerecht“ verteilen, denn: ...	• ... Die ungerade Anzahl lässt sich nicht auf zwei gleich mächtige Mengen verteilen
• 3 + 1 = 4 (dem einen Mädchen fehlt 1 Murmel, bis beide gleich viele haben) ...	• ... Lösung 1: 7 + 1 = 8 (Sie treiben eine Murmel auf und teilen 8)
• 4 – 1 = 3 (wenn das eine Mädchen eine Murmel weglegt, haben beide 3) ...	• ... Lösung 2: 7 – 1 = 6 (die Mädchen legen eine Murmel weg, sie teilen 6)

Den didaktischen Kern des operativen Prinzips formuliert Wittmann (1985, S. 9) prägnant:

> *Objekte* erfassen bedeutet, zu erforschen, wie sie *konstruiert* sind und wie sie sich *verhalten*, wenn auf sie *Operationen* (Transformationen, Handlungen, ...) ausgeübt werden. Daher muss man im Lern- oder Erkenntnisprozess in systematischer Weise
>
> (1) untersuchen, welche *Operationen* ausführbar und wie sie miteinander verknüpft sind,
>
> (2) herausfinden, welche *Eigenschaften* und *Beziehungen* den Objekten durch Konstruktion *aufgeprägt* sind,
>
> (3) beobachten, welche *Wirkungen* Operationen auf *Eigenschaften* und *Beziehungen* der Objekte haben (Was geschieht mit ..., wenn ...?)

Die Beispiele in Kapitel 2.2.2 (Vierfeldertafel, Zahlenmauern, Summen mit Reihenfolgezahlen) und das produktive Üben (Kap. 3.4.2) bieten dem operativen Prinzip eine gute Referenz.

2.3.5 Unterrichtsgestaltung als indirekte Steuerung komplexer Systeme

Der traditionelle Unterricht reagiert auf Komplexität mit direkter Schülersteuerung via Frontalunterricht, Stoffsegmentierung, innerer Differenzierung und Fremdkontrolle. Dem gegenüber appelliert die konstruktivistische Didaktik an eine Unterrichtsgestaltung, welche Komplexität entfalten lässt, indem sie das Prinzip der kleinen Schritte und die monopolisierte Stellung lehrerzentrierter Unterrichtsformen überwindet (vgl. Wittmann, 1988, 1995a):

- Die Betonung liegt bei reichhaltigen, exemplarischen und substanziellen Lernangeboten, denen die Schüler in einem aktiv-entdeckenden, sozialen und natürlich differenzierten Lernprozess begegnen (vgl. Kap. 2.2).
- Gegenüber experimentellen Zugängen, verirrten Lernwegen und begangenen Fehlern besteht ein unverkrampftes Verhältnis (Krauthausen, 1997a). Das individuelle, kreative und selbstbestimmte Lernen soll auf Ungereimtheiten stossen und Widersprüche erzeugen. So entsteht Anlass für die Konstruktion mathematischen Wissens (vgl. Kap. 2.1.3).

- Die Lehrerin begleitet das Mathematiktreiben im individuellen Lerndialog, führt zu Aha-Erlebnissen und neuen Entdeckungsreisen (vgl. Kap. 2.2.5).

Eine solche idealtypische Charakterisierung des Unterrichts beherbergt reichhaltig Potenzial für Skepsis: „Besteht dieser konstruktivistische Unterricht also doch aus einem bunten Markttreiben mit unverbindlichen ‚Buffet-Angeboten' und didaktisch organisiertem Chaos?" (vgl. Krauthausen, 1997a)

Ich meine mit Krauthausen (1998, S. 46), dass sich die Qualitäten eines konstruktivistischen Unterrichts weder durch das blosse Dasein dezentrierter Unterrichtsformen, noch durch didaktische Beliebigkeit von selbst entwickeln. Die Lehrerin kann und soll der Komplexität des Unterrichts neben direkten Einflussnahmen im individuellen Lerndialog und in geführten Klassengesprächen v.a. mit indirekten Steuerungsformen begegnen, d.h. durch die Gestaltung substanzieller Lernumgebungen und den Aufbau einer Lern- und Kommunikationskultur.

Wittmann (1988, 1993a, 1998a) analysierte die Steuerung komplexer Systeme in der Managementlehre (vgl. Malik, 1992). Er stellt daraus zwei Ansätze dar, die das Grundproblem der Beherrschung von Komplexität unterschiedlich lösen.

Das mechanistisch-technomorphe[62] Paradigma orientiert sich am Bild der Maschine. Diese „muss von ihrem Konstrukteur bis ins einzelne im voraus durchdacht und beherrscht werden, nichts bleibt unbestimmt; Maschinenbau in diesem Sinne erfordert vollständiges Wissen über alle Details der Einzelteile und vollständige Informationen über deren Zusammenwirken" (ebd., S. 38). Eine Lehrerin kann der Komplexität in mechanistisch-technomorpher Art begegnen, wenn sie den Lernstoff in kleine und kleinste Schritte seziert und den Schülern häppchenweise vorgibt. *Sie* „kennt" die Einzelteile und deren Zusammenwirken, isoliert Schwierigkeiten und hebt sie auf die unterrichtliche Übungsbühne. Ihr Wissensnetz bzw. ihre daraus sezierten Wissenselemente sollen beim Schüler analog ineinander greifen und zu vergleichbaren mathematischen Konzepten führen. Der „Steuerknüppel" für die Lenkung der komplexen Systeme des Unterrichts bleibt in fester Hand der Lehrerin.

[62] Malik (1992, S. 7) gebraucht die Bezeichnung *konstruktivistisch-technomorph,* allerdings nicht im Sinne des konstruktivistischen Paradigmas (vgl. Kap. 2.1.2). Da die Bezeichnung missverständlich ist, halte ich mich an Wittmanns (1988, S. 341) Übersetzung: *mechanistisch-technomorph.*

Wittmann favorisiert mit Malik das systemisch-evolutionäre Paradigma, das Parallelen zu einer konstruktivistischen Didaktik bzw. zum aktiv-entdeckenden Lernen aufweist. Sein fünfteiliger Hauptsatz der Komplexitätsbeherrschung lautet:

- Es ist unmöglich, ein hochgradig komplexes System von aussen im Detail vollständig zu kontrollieren und ihm vorgegebene Verhaltensstrukturen aufzuzwingen.
- Die Komplexität lässt sich nur beherrschen, indem den im System selbst spontan entstehenden Verhaltensstrukturen Raum gegeben wird.
- Je komplexer die angestrebten Verhaltensweisen sind, desto mehr bedarf es ihrer Ausbildung der spontanen Kräfte im System.
- Je rigider die Kontrolle von aussen gehandhabt wird und je mehr die spontanen Kräfte übergangen oder gar unterdrückt werden, desto ärmere Verhaltensstrukturen bilden sich heraus.
- Der grösste Zuwachs an interner Organisation tritt in der Symbiose teilweise autonomer, sich selbst steuernder Subsysteme ein. (ebd. 1988, S. 341)

Der Hauptsatz postuliert die Selbstregulation von komplexen Systemen und richtet sich gegen die direkte Steuerung, da sie zur Verarmung des Lernverhaltens der Schüler, zur „Verkümmerung ihrer Selbstorganisation und ihres sozialen Lernens“ (ebd., S. 342) führt. Damit sich die Systeme produktiv entfalten, bedarf es des langfristigen Aufbaus einer verbindlichen Lernkultur (vgl. Krauthausen, 1997a, 1998; Wittmann, 1995a). Die notwendigen Bedingungen, welche für ein selbstständiges Lernen zu erarbeiten sind, betreffen ...

- Abmachungen und Reflexionen zum sozial-interaktiven Austausch (z.B. die Lautstärke während Interaktionen),
- regulierte Umgangsformen (z.B. die gegenseitige Achtung individueller Lernräume oder die Gangart beim Wechseln eines Lernortes),
- individuell angepasste Hilfestellungen durch die Lehrerin, die eine Erweiterung der Lernkompetenzen anvisieren (im Sinne der kognitiven Berufslehre; vgl. Kap. 2.2.5) und
- Zeitgefässe, um das individuelle Lernverhalten und den Unterrichtsprozess gemeinsam zu reflektieren.

> Kinder müssen also den Umgang mit der Freiheit und Offenheit lernen: Nicht um das Umgehen oder Abstreifen lästiger Verpflichtungen geht es, sondern um die Befähigung, (zunehmend) selbst die Verantwortung für das eigene Lernen zu übernehmen (...). Dies stellt sich nicht dadurch ein, dass Kinder in „offene“ Lernsituationen (im Sinne von unstrukturiert und orientie-

rungslos) „geworfen“ werden; es muss – als wichtigste Voraussetzung für die Möglichkeit und Wirksamkeit selbständigen Lernens – gelehrt und gelernt werden. (Krauthausen, 1997a, S. 10)

Das selbstständige Lernen bedarf der prozesshaften Einführung in die lernkulturelle Choreografie[63] des Unterrichts, die sich an der Wissenskonstruktion des Einzelnen *und* am sozialen Austausch orientiert. Wenn dezentrierte Lernformen Freiräume zum individuellen Lernen bieten, bedürfen sie der sozial-interaktiven Ergänzung, damit keine Vereinzelung im Schulzimmer stattfindet (Gage & Berliner, 1986). Singuläres Forschen mit Reisetagebüchern ist z.B. eine aufzubauende Lernkultur, die erst mit dem sozialen Austausch lebt (vgl. Kap. 2.3.1). Die Lehrerin, die im Wechsel mit Sololernen Zeitgefässe anbietet, um zu fragen „Wie machst du es?“ oder um Vereinbarungen zu treffen „das machen wir ab“, öffnet soziale Lernräume, die keine Unterrichtsform ausschliessen (vgl. Ruf & Gallin, 1995).

Der Kompetenzerwerb zur Erfüllung der „neuen“ Lehrerinnenrolle erfolgt weniger über einen Lehrmittelwechsel oder ein einzelnes kursorisches Angebot, sondern wächst organisch aus praktischen Erfahrungen *und* einer kontinuierlichen Praxisreflexion heraus (vgl. z.B. Cohen & Hill 1998; Dick, 1996; Krauthausen, 1998; Kap. 4.2.2).

2.3.6 Einwände gegenüber konstruktivistischer Unterrichtsgestaltung

Vorbehalte gegenüber aktiv-entdeckendem Lernen richten sich gerne an ...

- die hohe zeitliche und fachliche Beanspruchung der Lehrerin,
- das Lernverhalten der Schüler, insbesondere der lernschwachen,
- die investierte Lernzeit und
- die übertriebene Individualisierung beim Rechnen auf eigenen Wegen (vgl. Krauthausen, 1994; Selter & Sundermann, 1999; Wittmann, 1993a).

[63] *Choreografie* heisst: künstlerische Gestaltung eines Balletts oder inszenierte Tanzschöpfung. Oser und Patry (1990) beschreiben mit *Choreografien unterrichtlichen Lernens* didaktische Tiefenstrukturen, die inhaltsspezifischen Lehr-/Lernbereichen zu Grunde liegen und eine verbindliche Reihenfolge der Lernschritte festlegen. Ich beziehe den Begriff ausschliesslich auf die Gestaltung von Lernumgebungen und die *lernkulturellen* Verbindlichkeiten im konstruktivistisch orientierten Unterricht.

Die Unterrichtsgestaltung stellt an die Lehrerin hohe fachliche und zeitliche Anforderungen

Die Gestaltung eines konstruktivistisch orientierten Unterrichts verlangt von der Lehrerin didaktisches Umdenken und die Bereitschaft, zeitliche Ressourcen freizulegen. Bis zur befriedigenden Choreografie des Unterrichts ist es ein anspruchsvoller Weg. Vor allem unerfahrene Lehrerinnen „fühlen sich u.U. bald enttäuscht, wenn sie erleben, wie ihre engagierten Ideen und Vorsätze im Graben des Alltagsgeschäfts verschüttet werden“ (Krauthausen, 1998, S. 17). Im Schweizer Schulsystem kommt als belastendes Moment hinzu, dass die Lehrerinnen den gesamten Fächerkanon unterrichten. Dem Einwand, ein konstruktivistisch orientierter Unterricht sei für Lehrpersonen fachlich und zeitlich anspruchsvoll, sehe ich also offen entgegen. Es ergeben sich daraus wichtige Konsequenzen für die Weiterbildung (vgl. Kap. 6.3).

Die Schüler können die Lernangebote nicht produktiv nutzen

Aktiv-entdeckendes und natürlich differenziertes Lernen verlangen von den Schülern einige Lernkompetenzen punkto Selbstständigkeit und intrinsischer Lernmotivation. Die Bedenken sind deshalb auch an die Überforderung der Schüler gerichtet, nicht selten verquickt mit den Ressourcen schwacher Rechner. Wittmann (1993a, S. 165) entgegnet, aktiv-entdeckendes Lernen dürfe nicht elitär (im Sinne anspruchsvollen Problemlösens) aufgefasst werden, sondern betone die aktive Erarbeitung von Wissen. „Ohne eigene Aktivität und ohne eigenes Zutun können (...) auch lernschwache Schüler nicht effektiv lernen“ (ebd.). Gerade dem schwachen Rechner kann aktives Lernen mit Materialien Einsichten in mathematische Zusammenhänge ermöglichen.

Es liegt wesentlich an der Unterrichtsgestaltung, inwiefern Kinder mit unterschiedlichem Lernverhalten und Leistungsvermögen aus offenen Angeboten profitieren: Einige Belege[64] weisen darauf hin, dass die Überforderung lernschwacher Rechner eher durch Unterforderung als durch ganzheitliche Lernangebote zu Stande kommt (vgl. Trickett & Sulke, 1993).

> Mich schreckt viel mehr das Gespenst der Unterforderung, das im schwierigkeits-isolierten und komplex-reduzierten Unterricht umgeht; vor allem dann, wenn dieser mit Hinweis auf die „Schwachen“ legitimiert wird. Ich befürchte sogar, dass die sogenannten „Schwachen“ durch den Automa-

[64] Weitere Untersuchungen zum Lernverhalten schwächerer Rechner von Scherer (1995a) und Moser Opitz (2001) kommen in Kapitel 3.3.3 zur Darstellung.

> tismus einer immer weiter gehenden Problemvereinfachung und damit auch „Entsinnlichung“ bei immer grösser werdenden Schwierigkeiten zu unterforderten Lernversagern werden, weil ihnen schliesslich jegliche Herausforderung vorenthalten wird. (Erichson, 1991, zit. in Krauthausen, 1994, S. 24)

Auch wenn lernschwache Kinder beim aktiv-entdeckenden Lernen eine Konfrontation mit Schwierigkeiten erleben, ist das mechanische Abarbeiten grauer Päckchen mit der Versüssung bunter Hunde[65] nur bedingt eine didaktisch sinnvolle Alternative (vgl. Wittmann, 1993a; Kap. 2.1.1; *Behaviorismus*). Ein Unterricht, der Lernkompetenzen aufbauen möchte, konfrontiert den Lerner mit dem eigentlichen Lernprozess, d.h. mit seiner eigenen Lust und Unlust, mit Überwindung und persönlicher Genugtuung beim Erreichen von Lernzielen.

Aktiv-entdeckendes Mathematiktreiben ist unökonomisch und unübersichtlich

Entlang des von Lehrmitteln gespiegelten Stoffumfangs und dem dadurch erzeugten Stoffdruck ist das zeitliche Argument gut platziert: Aktiv-entdeckendes Lernen, selbstständiges Überlegen und der soziale Austausch brauchen mehr Zeit „als nötig ist, um Musteraufgaben und Musterlösungen vorzuführen und gleichartige Übungsaufgaben lösen zu lassen“ (Wittmann, 1993a, S. 166). Die investierte Lernzeit verspricht aber Tiefgang, visiert breitere Zielsetzungen an und erhält eine intrinsische Lernmotivation aufrecht. Für Wagenschein, Ruf/Gallin und Wittmann/Müller lohnt es sich deshalb, potenziellen Stoffdruck durch die Konzentration auf Grundideen zu entkräften (vgl. Kap. 2.3.1). Dadurch wird der Blick frei für Wesentliches und es entstehen zeitliche Freiräume für aktiv-entdeckendes und soziales Lernen. Auch Bildungspolitiker weisen darauf hin, dass ein lehrplanorientiertes Arbeiten eine gezielte Auswahl, d.h. eine Beschränkung auf das Wesentliche erfordert. „Besonders verhängnisvoll wirkt sich das unreflektierte ‚Durcharbeiten‘ von Lehrmitteln aus. (....) Die Folgerung für die Unterrichtsgestaltung besteht deshalb darin, die Leistungsforderungen den Leistungsmöglichkeiten des Kindes anzupassen“ (Schildknecht, 2001, S. 11).

Ein weiterer Einwand gegenüber aktiv-entdeckendem Lernen richtet sich an die Unübersichtlichkeit des Unterrichts, welche aus der natürlichen Differenzierung entstehe und die Kontrolle über den Stand der Klasse erschwere: „Wenn nicht alle dasselbe tun, kann man nicht verglei-

[65] In der konkreten Situation mit dem einzelnen Kind kann der gezielte Einsatz bunter Hunde u.U. auch wichtige motivationale Funktionen erfüllen.

chen." – Meine Antwort: Das materialgestützte Tun, die Beschreitung aktiver Lernwege und die sprachlichen Reflexionen geben einer Standortbestimmung inhaltlich substanziellere Informationen als blosse Korrekturen schriftlicher Rechenresultate. Von der Lehrerin sind allerdings hohe didaktische und diagnostische Kompetenzen gefordert, bis sie die Informationen für weiterführende Lernprozesse fruchtbar machen kann (vgl. Hengartner, 1999; Kap. 3.2.3).

Die übertriebene Individualisierung führt zur Vereinzelung des Lernens

Selter und Sundermann (1999) diskutieren in Zusammenhang mit Eigenproduktionen (vgl. Kap. 3.3.2) die Kritik, geöffnete Spielräume für individuelle Lern- und Denkwege würden die Ich-Bezogenheit und die narzisstische Genusssucht kultivieren.

> So führe die verstärkte Nutzung von Eigenproduktionen dazu, dass jedes Kind seine eigenen, häufig komplizierten und für andere nur unter unzumutbarem Interpretationsaufwand verständlichen Rechenwege gehe. Vereinzelung statt Gemeinsamkeit sei die Folge. Um die soziale Dimension des Lernens wieder zu betonen, müsse der Unterricht stärker standardisiert, statt noch weiter ausdifferenziert werden. (ebd., 1999, S. 62)

Obwohl der Vorbehalt eine reale unterrichtliche Schwierigkeit birgt, laufen Konsequenzen, die eine Vereinheitlichung des Lernens propagieren, in eine falsche Richtung. Die von Schülern hervorgebrachte Lösungsvielfalt dient der individuellen Wissenskonstruktion und bereichert die gemeinsame Reflexion. Es gehört zum natürlich differenzierten und sozialen Lernen, dass die Kinder eigene Lösungswege darstellen und versuchen, fremde nachzuvollziehen. Wenn sie merken, dass Mitschüler ihre Erklärungen und Begründungen nicht verstehen, suchen sie nach alternativen Darstellungen, die sie selber zu einem vertieften Verständnis führen.

Lernen ist und bleibt mit Schwierigkeiten verbunden

Die m.E. wichtigste Antwort auf die genannten Einwände: Konstruktivistische Unterrichtskonzeptionen sind kein Wundermittel, um didaktische Schwierigkeiten zu beseitigen. Diese bestehen nach wie vor. Die Abfederung unterrichtlicher Problembereiche mittels methodisch-didaktischer Konzeptionen ist und bleibt Fiktion. Auch aktiv-entdeckendes Lernen vermag keine spektakulären Erfolge aufzuweisen und ist nicht frei von Misserfolgen (vgl. Scherer, 1999b, S. 159; Selter & Sundermann, 1999, S. 62).

Es gibt überhaupt keine Unterrichtsmethode, die alle Lernschwächen aus der Welt schaffen und alle Lehr- und Lernprobleme lösen kann. Auf aktiv-entdeckende Weise lassen sich aber die in den Schülern liegenden Möglichkeiten weitaus besser erkennen und auffangen als mit einem kleinschrittigen, eng geführten Unterricht. (Wittmann, 1993a, S. 165)

Es darf nicht Ziel einer Didaktik sein, Schwierigkeiten zu nivellieren. Im Gegenteil: Der Unterricht soll dazu befähigen, Spannungen auszuhalten und Probleme konstruktiv zu lösen.

2.4 Zusammenfassung

Dass Verstehen, Wissenserweiterung und -vertiefung *aktiven* Konstruktionsprozessen unterliegen und ins Zentrum des Unterrichts gehören, ist in didaktischen Kreisen unbestritten. An Stelle der Reiz- und Wissensvermittlung tritt die Anregung mentaler Lernprozesse, die über einsichtiges Lernen und den sozialen Austausch erfolgt. Das bedeutet für den Unterricht, dass er sich an Lern- und nicht an Lehraktivitäten orientiert, obwohl das Lehren eine wichtige Funktion behält. Die Lehrerin gestaltet Lernumgebungen, führt in eine Unterrichtskultur ein, begleitet Lernprozesse und übergibt dem Schüler sukzessive Lernverantwortung.

Der konstruktivistisch orientierte Mathematik-Unterricht muss von elitären Vorstellungen absehen und sich auf seinen Kern – die aktive Auseinandersetzung mit mathematischen Grundideen – besinnen. Dies zu Gunsten des Lerners, auch des schwachen.

Vor diesem Hintergrund sucht und entwickelt die gegenwärtige mathematik-didaktische Forschung. Sie möchte ergründen, was im Lernprozess des Schülers stattfindet und welche Unterrichtsbedingungen seine singulären Konstruktionen unterstützen.

3 Forschungsstand zum mathematischen Anfangsunterricht

3.1 Konstruktivistisches Forschungsparadigma und Kritik am traditionellen Unterricht

Unter dem konstruktivistischen Label entstanden Forschungsfragen[66], die in traditionelle Sichtweisen und Unterrichtspraktiken greifen. Die aktuellen Ergebnisse sprechen *für* ein aktives, sinnstiftendes und soziales Lernen und *gegen* passives und reproduktives Lernen.

Kritik am traditionellen Anfangsunterricht

Wittmann (1993a, S. 159-162; vgl. Kap. 2.3.6) leuchtet die didaktisch-konstruktivistische Richtung aus, indem er mögliche Vorbehalte entkräftet und den traditionellen Mathematik-Unterricht kritisiert (vgl. Krauthausen, 1994, S. 3-7; Meiers, 1994; Voigt, 1994). Die Einwände zielen auf verbreitete behavioristische Lehr-/Lernmuster, in denen die Lehrerin Aufgabentypen einschleift und den Schülern konditionierte Lösungswege entlockt, richtige Antworten lobt und falsche korrigiert und die Verbindung zwischen Reiz und Reaktion bis zur gefestigten Reaktions-Koppelung wiederholen lässt. Dieser plakativ vereinfachte Steckbrief provoziert Kritik gegenüber dem traditionellen, behavioristisch orientierten Unterricht:

- „Man züchtet ‚Treibhauspflänzchen', die in den Kindern gar nicht einwurzeln und (...) nur in einer bestimmten Schulumgebung eine Zeitlang am Leben erhalten werden können" (Wittmann, 1993a, S. 161). Die Lehrerin führt zur Entkoppelung von Denken und Rechnen, verweist auf Äusserlichkeiten und lässt mathematische Zusammenhänge ausser Acht. „Bereits leichte Änderungen von Formulierungen, Schreibweisen, Aufgabenstellungen usw. können den Schüler völlig verwirren" (ebd.) und Reaktionen blockieren.
- Mechanisch eingeübte Musterlösungen wirken sich negativ auf die Lerneinstellung der Schüler aus. Die eingespielte passive Lernhaltung hat die Gewöhnung zur Folge, die Lernverantwortung der Lehrerin zu überlassen und abzuwarten, bis sie neue Aufgabentypen mit neuen Anweisungen anbahnt (vgl. Scherer, 1999b; Selter & Sundermann, 1999). Die pas-

[66] Meine Ausführungen konzentrieren sich auf Studien zum mathematischen Unterricht der ersten drei Schuljahre, mit Schwerpunkt auf dem ersten.

sive Lernhaltung geht von Lehrerinnen aus, die ihre Schüler durch die Brille des Schulbuches sehen und ihnen lediglich Kompetenzen zutrauen, die via Lehrmittel „aufgebaut" wurden (Voigt, 1994; vgl. Geering, 1997).

> Die Fähigkeit, Aufgaben selbst zu durchdenken, die eigenen Überlegungen zu bewerten, und damit *selbst* Verantwortung für das Lernen zu übernehmen, wird so beim Schüler nicht entwickelt. Der kleinschrittige, förmliche Rechenunterricht wirkt auf das Denken der Schüler wie „Chloroform". (Wittmann, 1993a, S. 162)

- Das Training gleichförmiger Aufgaben zeigt längerfristig eine bescheidene Wirkung und der investierte Aufwand erzeugt Zeit- und Stoffdruck (vgl. Kap. 2.3.1). „Immer wieder müssen Kenntnisse und Fertigkeiten aufgefrischt werden, die längst ‚sitzen' sollten" (Wittmann, 1993a, S. 162). Zudem richtet sich das Augenmerk auf die Lerndefizite der Schüler und orientiert sich nicht am verfügbaren Wissen (vgl. Selter, 1993). Es trägt Potenzial, um einen „Teufelskreis Lernstörung" (Betz & Breuninger, 1987) oder eine „erlernte Hilflosigkeit" (Seligmann, 1979) auszulösen, die sich schülerseits mit „Verstecken" von Kompetenzen äussert. Nach Voigt (1994, S. 399) halten die Schüler Wissen und Können zurück, um die „offizielle Kompetenz" der Erwartung der Lehrerin anzupassen. Wenn die Kinder über gestellte Anforderungen hinausgehen, hält die Lehrerin entschlossen zurück: „Das haben wir noch nicht behandelt" oder „so weit können wir noch nicht rechnen".
- Für die Anpeilung von in die Tiefe gerichteter Lernziele bieten kleinschrittiges Lernen und graue Päckchen mit bunten Hunden kaum Gelegenheit, eigenständig und kreativ an Problemsituationen heranzugehen und dabei operative Strukturen aufzubauen. Wittmann (1993a, S. 162) fragt zutreffend: „Woher soll denn ein Schüler, der an kleinschrittiges Lernen und Üben gewöhnt worden ist, plötzlich die Fähigkeit zur Lösung von Aufgaben haben, bei denen gerade *nicht* vorgegeben ist, was er zu rechnen hat?"
- Voigt (1994) richtet seine Kritik an Unterrichtskonzeptionen, in denen didaktische Aufgabenverpackungen im Zentrum stehen. „Die Kinder haben oft mehr Probleme damit, die aus didaktischen Gründen entwickelten Einkleidungen mathematischer Zusammenhänge zu verstehen, als Probleme mit den Rechnungen" (ebd., S. 398). Es ist ein berechtigter Einwand, dass Kinder in einem Festival rasch wechselnder Veranschaulichungen und formaler Darstellungsweisen mehr Mathematik-Didaktik lernen als Mathematik. Sie lernen

Konventionen, „die konstruiert wurden, damit sie Mathematik lernen, obwohl die Kinder diese Mathematik zum beträchtlichen Teil schon können“ (ebd.).

Die Einwände gegenüber dem traditionellen Mathematik-Unterricht lösten im Zuge des Paradigmenwechsels Fragen aus, die in ein eigentliches Forschungsvakuum stiessen.

Sichtweise und Suchrichtung der konstruktivistisch orientierten Forschung

Der mathematik-didaktische Mainstream orientiert sich im Bereich des Anfangsunterrichts hauptsächlich an drei Desiderata:

a) Lernen ist ein kontinuierlicher Konstruktionsprozess, Neues ist nie ganz neu.
b) Lernen ist eine aktive und *inter*aktive Konstruktionsleistung des Lerners.
c) Lehren orientiert sich an der Kompetenzerweiterung der Schüler und nicht an Defiziten.

ad a) Mathematische Lernprozesse sind eine aktive und Sinn erzeugende Konstruktionsleistung des Lerners und beginnen vor dem künstlich festgelegten Schuleintritt (vgl. Stern, 1998). Die Kinder kommen nicht als „tabula rasa“ zur Schule (vgl. Meiers, 1994; Schipper, 1982) und der Unterricht muss nicht bei „Stunde Null“ beginnen (Selter, 1995b). Die Forschungsergebnisse, die diese Behauptungen in Kapitel 3.2 empirisch belegen, stammen von Hengartner und Röthlisberger (1994, 1995), Krauthausen (1994), Schipper (1982), Schmidt und Weiser (1982), Selter (1993, 1995b) und Selter und Spiegel (1997). Die darzustellende Übersicht schliesst mit der Frage nach der didaktischen Funktion von Standortbestimmungen.

ad b) Einige aktuelle Studien beziehen sich auf den konstruktivistisch orientierten Mathematik-Unterricht, der Schreibanlässe (Hollenstein, 1996), Eigenproduktionen (Selter, 1994a), sozial-kooperatives Lernen (Röhr, 1995) und aktiv-entdeckende Konzeptionen mit schwachen Rechnern (Moser Opitz, 2001; Scherer, 1995a) fokussiert und favorisiert. Die unterrichtlichen Lehr-/Lernlandschaften und deren Wirkungen[67] kommen in Kapitel 3.3 zur Darstellung. Die ausgewählten Arbeiten korrespondieren mit den Grundideen des Projektes „mathe 2000“.

ad c) Die Bedeutung der Ressourcenorientierung im Lehr-/Lernprozess ist in einem berühmten heilpädagogischen Leitsatz von Paul Moor (1965) verankert: „Wo immer ein Kind versagt,

[67] In Ergänzung zu den Fragen „was ist möglich?“ und „wie wirkt das?“ ist meine eigene Studie auf die Fragen „was denken Lehrerinnen darüber?“ und „was findet in der Praxis statt?“ ausgerichtet (vgl. Kap. 5).

haben wir nicht nur zu fragen: Was tut man dagegen? Pädagogisch wichtiger ist die Frage: Was tut man dafür? ... nämlich für das, was werden sollte, soweit es werden kann“ (ebd., S. 259). Während die traditionelle (heil-)pädagogische Helferdidaktik den Defiziten der Schüler hinterherrennt, orientiert sich die konstruktivistische Didaktik an aufgebauten Kompetenzen: Die Devise „das kann ich schon, das habe ich erreicht“ tritt an Stelle von „das kann ich noch nicht“ (vgl. Schipper, 1982; Selter, 1993, 1995b; Selter und Spiegel, 1997; Voigt, 1994).

3.2 Mathematische Kompetenzen der Schulanfängerinnen

3.2.1 Zählkompetenzen, Zählstrategien und Zahlsymbole lesen

Schmidt und Weiser (1982) ermittelten, dass 86% der Schulanfänger (Alter 5;9 bis 6;10) korrekt bis 20 vorwärts zählen, was vereinzelten sogar bis 100 und darüber gelingt. Moser Opitz (2001) berichtet, dass 56% der Schulanfänger in Lernbehinderten- und Einführungsklassen die Zahlwortreihe bis 20 fehlerfrei aufsagen, 15% sogar bis mindestens 50. Bei Schuleintritt verfügen die meisten Kinder über Zählkompetenzen, die wesentlich über das verbale Hersagen von Zahlwörtern hinausgehen (vgl. Hengartner & Röthlisberger, 1995).

Hinter dem Aufbau von Zählkompetenzen steckt eine Entwicklung, die v.a. im amerikanischen Raum erforscht wurde (vgl. Moser Opitz, 2001; Radatz & Schipper, 1983; Schmidt & Weiser, 1982; Stern, 1998). Die Studien entstanden, nachdem Piaget dem Zählen jegliche erkenntnistheoretische Bedeutung abgesprochen hatte. Sie revidieren die lange Zeit vorherrschende Meinung, die Kinder müssten zuerst über die Mengeninvarianz[68] verfügen, bevor das Rechnen mit Zahlen einen kognitiven Gewinn bringe. Die „Neo-Piagetaner“ legen nahe, sich mit der Erweiterung der Zählkompetenzen und der Verinnerlichung, Flexibilisierung und Ökonomisierung von Zählprozessen und Zählstrategien auseinander zu setzen (vgl. Moog, 1995).

Modell der Zählentwicklung nach Gelman & Gallistel (1978)

Kinder verfügen vor Schuleintritt in der Regel über drei Zählprinzipien (counting-principles):

1. Das Eins-zu-eins-Zuordnungsprinzip (one-one principle) beinhaltet, dass sie jedem Element einer Kollektion genau ein Zahlwort zuordnen können.

[68] Mit Mengeninvarianz bezeichnet Piaget die Erkenntnis, dass eine Kollektion mit einzelnen Objekten (z.B. Steinen) auch bei Veränderung der Anordnung die Anzahl beibehält.

2. Mit dem Prinzip der stabilen Reihenfolge (stable-order principle) verfügen sie über Zahlnamen mit stabiler und wiederholbarer Abfolge.
3. Das Kardinalprinzip (cardinal principle) bezeichnet, dass der letzte Zahlname beim Abzählen einer Kollektion die Anzahl der Menge repräsentiert (kardinaler Zahlaspekt).

Die Prinzipien 1 bis 3 (how-to-count-principle) beherrschen die meisten Kinder im Alter von ca. 3 bis 4 Jahren. Im Vorschulalter ist die weitere Entwicklung der Zählkompetenz weniger durch den Erwerb neuer Prinzipien gekennzeichnet als durch „zunehmende Sicherheit im Vollzug des Zählens sowie in einer Erweiterung des ‚Zahlenraumes', über den zählend verfügt wird" (Schmidt & Weiser, 1982, S. 233). Die beiden weiteren Prinzipien (what-to-count-principles) können Gegenstand von Lernprozessen im Erstunterricht sein:

4. Mit dem Abstraktionsprinzip (abstraction principle) sind die how-to-count-principles auf beliebige Kollektionen anwendbar. Die Bestimmung der Anzahl erfolgt ungeachtet der Beschaffenheit, Grösse oder Farbe der Elemente.
5. Das Prinzip der Irrelevanz der Anordnung (order irrelevance principle) bezieht sich auf die räumliche Anordnung der Kollektion, die für das Resultat des Zählens irrelevant ist.

Krauthausen (1994) reflektiert die während klinischen Interviews gezeigten Zählprozesse von Schulanfängern und stellt eine allgemeine Verfügbarkeit der counting-principles fest:

- Die Kinder stellten beim Abzählen zwischen Kugeln und Zahlwörtern verlässliche Eins-zu-eins-Korrespondenzen her, keine Zahl wurde vergessen oder doppelt gezählt.
- Alle konnten die Zahlwörter sicher in einer festen Folge abrufen.
- Es war klar, dass das letzte Zählwort die Anzahl bezeichnet: „Dieses zuletzt genannte Zahlwort wurde beim Zählen oft noch einmal wiederholt (z.T. nach einem kurzen Innehalten des Sprachflusses, welches eine akustische Trennung von Zählvorgang und Anzahlnennung kennzeichnete): Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs ... SECHS!" (ebd., S. 205).[69]
- Die Kinder zählten gleiche Kugeln manchmal von links und manchmal von rechts, ordneten denselben Kugeln also je nach Zählrichtung verschiedene Zahlwörter zu. „Es war (...) in keinem Fall problematisch, die Kinder erkannten durchweg, dass es gleichbedeutend für das Zählergebnis war, mit welcher Kugel sie begannen oder in welche Richtung sie ab-

[69] Das Abstraktionsprinzip spielte in der Versuchsanordnung der Interviews keine Rolle, da die Zählobjekte aus uniformen Kugeln bestanden.

> zählten“ (ebd.). Diese Beobachtung lässt allerdings nur bedingt auf die irrelevante Anordnung schliessen, da die Kugeln stets linear aneinander gereiht vorlagen.

Die Ergebnisse von Krauthausen illustrieren, dass bei Schulbeginn von der Beherrschung der how-to-count-principle auszugehen ist[70] und das Zählen als Instrument zum Problemlösen und zur Umwelterschliessung taugt (vgl. Schmidt & Weiser, 1992, S. 247). Die Zählkompetenz weist Schemacharakter auf und muss im Verlaufe der ersten Klasse verinnerlicht, flexibilisiert und im Zahlenraum erweitert werden[71], denn die Kinder „verfügen in der Regel über einen Anzahlbegriff auf der Basis ihrer Zählkompetenz“ (ebd.).

Die Aussagen von Schmidt und Weiser (ebd.) entspringen einer empirischen Untersuchung, bei der Schulanfänger verschiedene „Schachtelaufgaben“ lösten (vgl. Selter & Spiegel, 1997, S. 121-122). Ein erster Auftrag bestand darin, *n* Plättchen in eine leere Schachtel zu legen (*n* lag jeweils im oberen Bereich der verbalen Zählkompetenz des Kindes). Bei einer weiteren Aufgabe lagen 10 zufällig angeordnete Plättchen und die Schachtel vor. Der Auftrag lautete: „Lege 6 Plättchen in die Schachtel“. Bei der zweiten Aufgabe nutzten die Kinder Strategien, die über das elementare Zählen hinaus gingen. Sie zählten z.B. in Zweierschritten, gruppierten die Kollektion und addierten deren Anzahlen. Bei der ersten Aufgabe fand kein Zerlegen der verbal vorgegebenen Zahl statt. Die Interpretation der Autoren lautet:

> Bei grösseren Anzahlen fühlen sich die Kinder unsicherer und greifen auf die elementare Vorgehensweise des einfachen Abzählens zurück. Die gewählten Lösungsstrategien sind sicher abhängig von der Vertrautheit des Kindes mit dem in der Aufgabe angesprochenen Bereich des Zahlenraums. (ebd., S. 246)

Die von Fuson (1988)[72] dargestellte Theorie weist direkt auf den Schemacharakter von Zählkompetenzen hin und betont deren grundlegende Bedeutung fürs Addieren und Subtrahieren.

---

[70] Scherer (1995a, S. 179) analysierte die Zählprozesse von lernbehinderten Zweit-, Dritt- und Viertklässlern, die am Hunderterfeld Anzahlen bestimmten. Sie schliesst aus ihren Beobachtungen allerdings, dass das 2. Prinzip der stabilen Reihenfolge präziser gefasst werden müsste, „denn es fanden sich Kinder, die durchaus über eine stabile (auch wiederholbare!) Zahlwortreihe verfügten, jedoch konnte diese (eben auch stabile) Lücken aufweisen“ (ebd.; vgl. Moser Opitz, 2001, S. 71).

[71] Selter und Spiegel (1997) geben interessante Beispiele von Zählprozessen bei Schulanfängern und stellen Fragen zu deren Zählentwicklung, die im Anfangsunterricht leitend sein können.

[72] Die Darstellung der Zählentwicklung weist eine grosse Ähnlichkeit mit derjenigen von Oehl (1935) auf.

Entwicklungsphasen bei der Ausdifferenzierung der Zahlwortfolge nach Fuson (ebd.)

1. In der Phase der ganzheitlichen Auffassung der Zahlwortfolge (string level) verfügt das Kind über die Zahlwortfolge als eine undifferenzierte Ganzheit, d.h. es kann sie wie ein Lied singen oder wie ein Gedicht aufsagen.
2. In der Phase der unflexiblen Auffassung der Zahlwortfolge (unbreakable chain level) sind einzelne Zahlwörter voneinander unterscheidbar. Das auf fünf folgende Zahlwort muss weiterhin durch „Aufsagen“ der gesamten Zahlwortfolge ermittelt werden. Es gelingt die Anzahlbestimmung (kardinaler Zahlaspekt) und ordinales Abzählen (an welcher Stelle?).
3. In der Phase des Weiterzählen-Könnens (breakable chain) kann das Kind von einer beliebigen Stelle aus vor- und rückwärts zählen und damit Additionen und Subtraktionen lösen.

Die 4. und 5. Phase ist durch Flexibilisierung, Ökonomisierung und direkten Zugriff auf Sequenzen der Zahlenreihe gekennzeichnet (vgl. Schmidt & Weiser, 1982; Stern, 1998).

Im Modell von Fuson (1988) und demjenigen von Gelman und Gallistel (1978) besteht der entscheidende Entwicklungsfortschritt in der Sequenzierung von Zahlabschnitten und im Weiterzählen-Können. Er legt die Basis für den Erwerb von Zählstrategien beim Addieren und Subtrahieren. Lorenz und Radatz (1993, S. 127) listen die Strategien auf:

Zählstrategien beim Addieren

- Alles-Zählen (mit bzw. ohne Zählobjekte): Die Kinder zählen zur Aufgabe 4 + 5 zunächst 4 Elemente ab, dann 5 und zählen schliesslich von 1 bis 9 die Summe der Elemente.
- Weiterzählen vom ersten Summanden: Bei 4 + 5 wird weitergezählt: 5, 6, 7, 8, 9.
- Weiterzählen vom grösseren Summanden aus: 6, 7, 8, 9.
- Weiterzählen in Schritten: (6) 7, (8), 9.

Zählstrategien beim Subtrahieren

- Auszählen mit Material: Bei 7 - 5 werden zunächst 7 Elemente abgezählt, davon 5 zählend bestimmt und weggenommen. Schliesslich wird der übrig gebliebene Rest ausgezählt.
- Rückwärtszählen: 7 - 5 / 7, 6, 5, 4, 3, / = 2.
- Ergänzendes Zählen: 7 - 5 / 6, 7 / = 2.

Beim Addieren und Subtrahieren führen Zählstrategien im Zahlenraum bis 20 relativ sicher zu richtigen Ergebnissen. Sie werden allerdings von zwei typischen Zählfehlern begleitet.

Minuseins- und Pluseins-Zählfehler als typisch auftretende Fehler bei Zählvorgängen

Bei der Addition „4 + 5“ kann ein *Minuseins*-Zählfehler entstehen, wenn der Schüler den ersten Summanden bis vier zählt und den zweiten beim vierten Zählobjekt beginnt, also das vierte Element doppelt zählt: „1, 2, 3, *4*, (+ 5) *4*, 5, 6, 7, 8“. Der *Pluseins*-Zählfehler passiert am selben Beispiel, wenn der Schüler die beiden Summanden korrekt bis neun zählt, aber zehn als Anzahl angibt. „Der Zählprozess beginnt zwar an der richtigen Stelle und endet auch beim richtigen Ergebnis, doch die Kinder nennen die nächstfolgende Zahl als Ergebnis: Sie ‚hüpfen‘ sozusagen beim Rhythmisieren ihres Zählprozesses um eine Einheit über das richtige Ergebnis hinaus“ (Wagner & Wacker, 1991, S. 62).

Jede der genannten Zählstrategien kann beim Addieren und Subtrahieren zu Plusminuseins-Zählfehlern führen. Unter anderem decken die Fehler auf, dass der Unterschied zwischen dem ordinalen und dem kardinalen Zahlaspekt unklar ist (vgl. Moog, 1993, 1995).

Zahlsymbole lesen

Schmidt und Weiser (1982, S. 240) berichten, dass 87% der Kinder bei Schuleintritt die Zahlsymbole 3, 7 und 9 und 35% auch die Zahlen 17 und 32 korrekt lesen. Heute dürfte dieser Prozentsatz höher liegen, da die elektronischen Medien zunehmend vorschulische Lebenswelten berühren. Hengartner und Röthlisberger (1995) berichten, dass 95% der Kinder in der ersten Schulwoche die schriftlichen Zahlsymbole bis 5 kennen. „Der Umgang mit Zahlsymbolen bis 20 scheint überdies den meisten Kindern selbstverständlich“ (ebd., S. 72). Moser Opitz (2001, S. 143) schreibt, dass mindestens 70% der Schulanfänger in Sonderklassen die schriftlich fixierten Zahlsymbole 2, 5 und 8 richtig benennen und knapp 40% auch die Zahlen im zweiten Zehner lesen können.

Fazit

Da die Kinder bei Schuleintritt über mehr oder weniger elaborierte Zählkompetenzen im Zahlenraum bis 20 verfügen, soll der Anfangsunterricht daran anknüpfen und vertiefende Lernprozesse auslösen. Darin sichern und erweitern die Schulanfänger individuelle Zählkompetenzen, sie verinnerlichen und flexibilisieren Zählprozesse und erarbeiten sich notwendige Voraussetzungen, um Zähltechniken sukzessive durch alternative Strategien abzulösen.

Obschon die meisten Kinder bereits im Vorschulalter über taugliche Zählkompetenzen verfügen, müssen jene Kinder im Bereich des Zählens elementare Lernvoraussetzungen erwerben, die kaum bis 5 zählen und erst ansatzweise Eins-zu-eins-Korrespondenzen zwischen Zahlwörtern und Zählobjekten vornehmen. Für ihren mathematischen Lernprozess ist es wichtig, dass sie sich intensiv mit Zählprozessen und -strategien auseinander setzen und dabei die eigenen Hände auf den Tisch legen, mit ihnen Operationen vollziehen und sie als offizielle Argumentations- und Reflexionsreferenz gebrauchen. Die Loslösung vom *zählenden Rechnen* setzt voraus, dass die Zählkompetenzen hinreichend aufgebaut sind, oder metaphorisch gesprochen: Die Kinder vermögen sich erst von jemandem zu verabschieden, wenn sie ihn zuvor begrüsst und kennen gelernt haben.

3.2.2 Operative Kompetenzen

Zählstrategien taugen als mathematisches Werkzeug, wenn sie auf einem elaborierten Zahlbegriff und Operationsverständnis gründen (vgl. Radatz & Schipper, 1983, S. 49). Schipper (1982, S. 106) zieht nach empirischer Überprüfung[73] von 417 Schulanfängern den Schluss, dass sie „*im Durchschnitt* schon einen erheblichen Teil jener Aufgaben zum Zahlverständnis lösen können, zu deren Bewältigung im 1. Schuljahr noch Unterrichtsmassnahmen für *alle* Kinder in nicht geringem Umfang durchgeführt werden“. Hasemann (1998) untersuchte bei rund 300 Kindergartenkindern das pränummerische Operationsverständnis (u.a. Klassifikations- und Seriationsoperationen) und die Zählkompetenzen. Sein Resümee verläuft parallel zu demjenigen von Schipper (1982): „Die meisten Kinder haben bereits vor Schulbeginn in weiten Bereichen eine deutlich höhere mathematische Kompetenz als viele Erwachsene vermuten“ (Hasemann, 1998, S. 266).

Einige Untersuchungen bestätigen die nummerisch-operativen Kompetenzen von Schulanfängern. Schipper (1982) referiert z.B. die Untersuchung von Hendrickson (1979), der 57 Schulanfänger zu Sachaufgaben mit Grundoperationen befragte. Die Aufgaben lauteten derart:

[73] Die Aufgaben beziehen sich auf nummerische Vergleiche/Zuordnungen/Reihenfolgen und Operationen mit Visualisierungen. Die Kinder malten z.B. so viele Objekte in ein leeres Feld, wie Objekte in zwei Feldern eingezeichnet oder wie im einen Feld mehr enthalten sind als im andern.

„Nimm acht Murmeln. Wenn ich dir 13 Murmeln dazu gebe, wie viele hast du dann zusammen?“ Die Befunde lassen aufhorchen:

> Die Aufgabe „2 + 7“ wurde auf Anhieb von 23 Kindern ohne Material und von weiteren 6 mit Material richtig gelöst. Nach einer Verstärkung konnten weitere 22 Kinder die Aufgabe lösen, so dass insgesamt 51 der 57 Kinder zu einer richtigen Antwort gelangten. Selbst die schwierige Divisionsaufgabe „15 : 3“ wird von 27 Schulanfängern sofort, von weiteren 11 Kindern nach einer Verstärkung richtig gelöst. (Schipper, 1982, S. 101)

Neben dem operativen Verständnis für die arithmetische Struktur von Sachsituationen dokumentieren die Untersuchungsergebnisse die Zählkompetenzen von Schulanfängern, welche die Lösungen vorwiegend zählend ermittelten.

In dieselbe Richtung weisen aktuelle Untersuchungen, die mit den Utrechter Testaufgaben (van den Heuvel-Panhuizen, 1995) u.a. in den Niederlanden, Deutschland (Selter, 1993, 1995b) und der Schweiz[74] (Hengartner & Röthlisberger, 1995) durchgeführt wurden (vgl. Röthlisberger, 1999). Der Test, welcher aus 13 bildlich dargestellten Sachaufgaben besteht (vgl. Anhang C), wurde jeweils mündlich instruiert und in den ersten Schulwochen als Gruppentest durchgeführt. Hengartner und Röthlisberger (1995) ziehen aus der Schweizer Untersuchung mit rund 200 einbezogenen Schulanfängern folgende Bilanz[75]:

> Fast vier Fünftel der Kinder können bis 10 addieren, wenn die Möglichkeit zum Zählen besteht, ohne Zählmöglichkeiten kann das die Hälfte der Kinder. Mehr als 40% der Kinder können subtrahieren von 10, ohne Zählmöglichkeit, jedoch in der konkreten Vorstellung von Geldbeträgen; jedes vierte Kind kann das auch schon mit Zehnerübergang. Einem Drittel gelingt die Anzahlbestimmung von 18 teils verdeckten Büchsen, die aus der geometrischen Anordnung teils erschlossen werden muss. Fast die Hälfte vermag bei eigener Wahlmöglichkeit der Summanden 12 zu bilden, wobei keine Gelegenheit zum Zählen besteht. Selbst die für das Ende der 1. Klasse gedachten Zuordnungsaufgaben Anzahl – Preis und Grössen – Preis werden von manchen Kindern (28% und 16%) richtig gelöst. (ebd., S. 71-72)

Die an Mittelwerten orientierte Ergebnisdarstellung betont die vorschulisch aufgebauten Kompetenzen. Leider macht sie nur bescheidene Angaben zur Streuung und beschränkt sich auf Hinweise zu den beträchtlichen Leistungsunterschieden zwischen den Klassen (ebd., S.

[74] In der vorliegenden Studie prüfte ich 423 Kinder mit diesem Test (vgl. Kap. 5.4).

[75] Die Bilanz entspricht derjenigen aus den erwähnten Untersuchungen in den Niederlanden und in Deutschland.

73-75). Selter (1995, S. 15) weist explizit auf das grosse Leistungsspektrum innerhalb der Klassen hin und betont: Die tollen Kompetenzen von vielen Schulanfängern dürfen nicht darüber hinweg täuschen, dass einige Kinder über bescheidene Vorerfahrungen verfügen und geringe mathematische Basisvoraussetzungen in den Erstunterricht mitbringen. Schipper (1998) warnt sogar vor dem entstandenen Mythos, Schulanfänger verfügten geschlossen über hohe arithmetische Kompetenzen. Die Untersuchungen aus den achtziger Jahren (Schmidt, 1982; Schipper, 1982; Schmidt & Weiser, 1982) und diejenigen aus den Neunzigern (z.B. Hengartner & Röthlisberger, 1995; Selter, 1995b) weisen gemeinsam darauf hin, „dass nicht die allgemein hohe mathematische Kompetenz, sondern die grosse Leistungsheterogenität der Schulanfänger das wesentliche Kennzeichen ist“ (Schipper, 1998, S. 123).

Kinder verfügen bei Schuleintritt über *durchschnittlich* hohe, aber breit gestreute mathematische Basisvoraussetzungen. Die konstruktivistisch orientierte Forschung, welche individuelle Lernprozesse in sozialen Kontexten ergründet, findet damit einen guten Nährboden: Schulanfänger sind keine Lernanfänger (Hengartner & Röthlisberger, 1995, S. 84), neue schulische Lerninhalte sind für sie nicht neu. Die Botschaft lautet: Der Lernstoff soll substanziell sein, unterschiedliche Zugriffsmöglichkeiten bieten und ein individuelles Lernen ermöglichen. „Wenn in der Didaktik trotzdem von ‚Einführungen‘ gesprochen wird, heisst dies nur, dass der *systematische Unterricht* sich *erstmalig* mit einem solchen Thema befasst“ (Hengartner & Wieland, 1995, S. 26). Da ein heterogenes Lernverhalten und Leistungsvermögen der Schüler Kennzeichen von Unterricht schlechthin ist, bedarf es (nicht nur) im Erstunterricht Standortbestimmungen, die es erlauben, die Schüler bei ihren individuellen Wissenskonstruktionen zu begleiten und einen kriteriumsorientierten Vergleich zu ziehen. Es bleibt vorerst offen, unter welchen Bedingungen die vorgeschlagenen diagnostischen Mittel greifen.

3.2.3 Standortbestimmungen und didaktische Konsequenzen

Die oben genannten Untersuchungen lassen befürchten, dass der programmatisch aufgezogene traditionelle Anfangsunterricht viele Kinder ‚unter-fordert‘ und schwächere Rechner zu unspezifisch unterstützt. Das didaktische Postulat lautet: Die Lehrerin soll die Standorte der Kinder bestimmen und die vorschulisch erworbenen Kompetenzen mit substanziellen Lernangeboten natürlich differenziert ‚heraus-fordern‘ (vgl. Hasemann, 1998, S. 266; Hengartner & Röthlisberger, 1995, S. 83-86; Schipper, 1982, S. 106; Selter, 1995b, S. 15-17).

Schriftliche Standortbestimmungen am Schulanfang

Die Durchführung und Auswertung des Utrechter Tests (van den Heuvel-Panhuizen, 1995) ist *eine* mögliche Variante, um während der ersten Schulwochen die unterschiedlichen Kompetenzen und Kenntnisse der Kinder zu überblicken[76]. Die schriftliche Standortbestimmung ist ökonomisch, bietet aber nur begrenzte Informationen zu Lösungswegen und Vorgehensweisen. Eigenproduktionen von Schülern oder klinische Interviewsituationen wären aufschlussreicher, allerdings mit dem Preis eines grösseren Erhebungs- und Auswertungsaufwandes. Röthlisberger (1999, S. 25-26) erwartet von Standortbestimmungen im Anfangsunterricht:

- Sie stecken ein breites lehrplanbezogenes Spektrum mathematischer Anforderungen ab.
- Die Aufgaben beziehen sich auf Alltagserfahrungen der Kinder.
- Die ermittelten Informationen geben Aufschluss über Fähigkeiten und Lösungsstrategien.
- Die Erhebung ist im regulären Unterricht und mit knapper Instruktion durchführbar.
- Bei Standortbestimmungen im späteren Verlauf des Unterrichts dürfen die Schüler ihre Kompetenzen auch in Bereichen zeigen, die noch nicht thematisiert worden sind.

Auch wenn die Aufgaben im Utrechter Test die genannten Ansprüche erfüllen, decken sie primär die Anzahl richtiger Ergebnisse auf und bieten nur bescheiden Einsicht in Lernprozesse. Das Anliegen von Standortbestimmungen besteht aber darin, die Lern- und Leistungs*entwicklung* der Schüler zu verstehen. Dies ist „viel wichtiger, als den momentanen Leistungsstand zu erfassen“ (Röthlisberger, 1999, S. 23). Der schriftlichen Standortbestimmung sind Grenzen gesetzt, wenn sie singuläre Lösungs- und Denkwege erkunden möchte, da Deutungen rasch ins Spekulative führen.

Schriftliche Eigenproduktionen von Kindern interpretieren

Der Vorteil von Standortbestimmungen durch Eigenproduktionen liegt darin, dass die Kinder offen gestellte Aufgaben individuell lösen und schriftlich Auskunft über ihre beschrittenen Lösungs- und Denkwege geben. Die Arbeitsweise mit Kernideen und Reisetagebuch zielt in diese Richtung (vgl. Kap. 2.3.1). Die Lehrerin erfährt, wie eine Schülerin eine Aufgabe anpackt und kann ihr mit weiterführenden Impulsen antworten. Das Reisetagebuch ist ein dia-

---

[76] Knapstein stellt zur Standortbestimmung im Anfangsunterricht einen gleichartigen schriftlichen Test mit Bildsituationen vor (Knapstein & Spiegel, 1995; vgl. Selter & Spiegel, 1997, S. 113-120).

gnostisches Instrument in Form eines schriftlichen Kommunikationsmittels und öffnet dem Schüler Lernräume zum Erforschen und Reflektieren mathematischer Beziehungen.

Maier (1998) arbeitete Kriterien heraus, entlang derer textliche und bildliche Eigenproduktionen einen diagnostisch validen Interpretationswert erhalten:

a) Die Interpretation orientiert sich an der Deskription. Die Arbeiten sind möglichst ohne Erwartungshaltung bezüglich richtig und korrekt bzw. falsch und unerlaubt zu deuten.

> Eine (...) normative, im Wesentlichen an den Kriterien „vollständig" oder „unvollständig" bzw. „richtig" und „falsch" orientierte Interpretation verstellt den Blick dafür, welche Art von Wissen und Verstehen der einzelne Schüler tatsächlich konstruiert hat. Das Bewusstsein, dass diese Konstruktion bei jedem Schüler individuell unterschiedlich und in spezifischer Weise erfolgt, muss das Interesse dafür wecken, wie der jeweilige Verfasser der Eigenproduktion tatsächlich denkt, welche Begriffs- und Verfahrensvorstellungen er sich zurechtgelegt hat, ob er sein Wissen auf reale Modelle bezieht und in welcher Weise er dies tut, wie er es akzentuiert und strukturiert. (ebd., S. 147-148)

b) Die Interpretation kann sich auf nicht Formuliertes beziehen. Die Instruktionen laden zur vollständigen Darstellung all dessen ein, was Schüler zu einem Sachverhalt wissen. Wenn die Lehrerin dafür genügend Zeit gewährt, lässt auch Ungeschriebenes „auf Lücken im Wissen und Verstehen des Schülers schliessen" (ebd., S. 150).

c) Die Interpretation soll vollständig und detailliert vorgenommen werden. Es käme einer subjektiven Verzerrung gleich, wenn aus Eigenproduktionen lediglich einzelne Äusserungen herausgegriffen würden. Da alle Textteile gleichermassen bedeutsam sind, ist eine diagnostische Gründlichkeit angesagt, die sich nicht auf pauschale Deutungen reduzieren lässt.

d) Die Interpretation ist offen bezüglich Mehrdeutigkeit. Widersprüchliche Interpretationen dürfen nebeneinander stehen bleiben. Die Vieldeutigkeit gesellt sich gleichberechtigt zur Eindeutigkeit und gewährt eine Optik für komplexe Lernprozesse.

Didaktisch beispielhafte Impulse für Eigenproduktionen geben z.B. Hengartner (1992, 1999), Ruf und Gallin (1995, 1999b), Selter (1994a) sowie Selter und Spiegel (1997). Radatz (1989, 1991b) liess z.B. Grundschüler eigene mathematische Vorstellungen zeichnen. Der Auftrag bestand darin, Anzahlen und Operationen (z.B. „6, 0" oder „7 – 2 = 5, 2 + _ = 5") jemandem zeichnerisch zu erklären, der unsere Sprache, Zahlsymbole und Rechenzeichen nicht kennt.

Die Darstellungen der Kinder geben Einblick in ihre mentalen Repräsentationen und *könnten* ergänzt mit einer sprachlichen Kommentierung weitere diagnostische Informationen abgeben.

In den genannten Beispielen zeichnet sich ab: Substanzielle Lernumgebungen mit ganzheitlichen Zugängen ermöglichen ein natürlich differenziertes Lernen mit diagnostischem Potenzial. Die systematische Auswertung der Standortbestimmungen erfordern lehrerseits allerdings hohe didaktische Kompetenzen und einen beträchtlichen Zeitaufwand.

Offene Ortungsaufgaben im mündlichen Unterricht und im klinischen Interview

Der sinnvolle Einstieg in ein Unterrichtsthema lotet vorerst aus, über welches Vorwissen die Schüler verfügen. Die Standortbestimmung erfolgt über geeignete mündliche Ortungsaufgaben, die den Kindern Gelegenheit geben, „ihr vorhandenes Wissen freizügig anzuwenden und zu demonstrieren, *bevor das Buch aufgeschlagen wird*“ (Hengartner & Wieland, 1995, S. 26). Mündliche Ortungsaufgaben können bei einem ganzheitlichen Unterrichtseinstieg in den Zwanzigerraum z.B. lauten: „Wie weit kannst du zählen? – Wie viele Kinder sind in unserer Klasse? – Welche Zahlen kannst du schreiben?“ (vgl. ebd.; Piechotta, 1995).

Gisela Piechotta (1995) berichtet über Entdeckungsreisen, die sie mit ihren Erstklässlern unternahm. Sie gestaltete einen natürlich differenzierten Unterricht mit Zahlenhäusern und Zahlenmauern[77], die als offene Lernangebote dienten und eine diagnostische Funktion erfüllten. Ihrer Meinung nach schaffen solche Lernumgebungen grundsätzlich „Freiräume für individualistisches und differenzierendes Lernen, (...) für Versuche und Fehler. Dem Lehrer gibt es die Möglichkeit, Schwierigkeiten und Fortschritte einzelner Schüler zu beobachten und gezielte Einzelhilfen zu geben“ (ebd., S. 77). Die Lehrerin illustriert die Wechselwirkung zwischen Diagnose und natürlich differenziertem Lernen mit einem Praxisbericht:

> Viele konnten die Zahlreihe weit über die 10 hinaus aufsagen, Tillmann zählte bis 25 und Sebastian ganz spontan in Zweierschritten. Lisa sagte: Ich kann schon bis 100 zählen.
> Als ich die Schüler nach einigen Tagen alle ihnen bekannten Zahlen aufschreiben liess, bestätigte sich der mündlich gewonnene Eindruck (...).
> Die Voraussetzungen für einen ganzheitlichen, aktiv-entdeckenden Einstieg in den Zahlenraum bis

[77] Im Übungsformat „Zahlenhäuser“ schreiben die Schüler (oder die Lehrmittelautoren) ins Dach eines Hauses eine Summe. Die auszufüllenden Etagen beinhalten die möglichen additiven Kompositionen. Die Beschreibung des Übungsformates ‚Zahlenmauern‘ ist in Kapitel 2.2.2 nachzulesen.

> 20 schienen mir damit voll gegeben zu sein, denn die ganzheitliche Einführung ermöglicht es allen Kindern, an ihre individuellen Vorerfahrungen anzuknüpfen, den ganzen Zwanziger „in den Blick“ zu nehmen und ihn weitgehend selbsttätig zu erobern. (ebd. S. 74-75)

Mündliche Standortbestimmungen erfüllen zwei Funktionen: Die Schülerin darf zeigen, was sie schon weiss und die Lehrerin erhält Informationen über singuläre Fähigkeiten und Vorgehensweisen. Die Schwierigkeit der Standortbestimmung im mündlichen Unterricht besteht darin, dass die Lehrerin zwar detaillierte Informationen über individuelle Kompetenzen erhält, sie kann sie im Unterrichtsfluss aber nur schwerlich protokollieren.

Eine weitere Methode der mündlichen Standortbestimmung bietet das klinische Interview, welches in der mathematik-didaktischen Forschung verbreitet ist. Die Interviews tragen der *Unvorhersagbarkeit* des kindlichen Denkens durch einen offenen Verlauf und dem Kriterium der *Vergleichbarkeit* durch verbindlich festgelegte Leitfragen Rechnung (Selter & Spiegel, 1997, S. 100-112). Die Lehrerin führt eingangs in eine offene Fragestellung ein:

> Während des Interviews muss sie Hypothesen über die Gedanken der Kinder bilden, um in einer flexiblen Weise Fragen stellen zu können, die sich in der Regel auf deren vorangehende Antworten oder Handlungen beziehen. Beim klinischen Interview geht es also nicht darum, die Kinder durch geschicktes Fragen möglichst schnell zur richtigen Lösung zu führen. Die Hauptintention besteht vielmehr darin, mehr darüber zu erfahren, wie Kinder denken. Aus diesem Grund sollten die Reaktionen der Interviewerin grundsätzlich keine negativen Rückmeldungen („Falsch! oder das hätte ich so nicht gemacht“!) enthalten. (ebd. S. 101)

Es ist denkbar, während individualisierten Unterrichtsphasen kürzere klinische Interviews durchzuführen. Als mögliche Eingangsfragen könnten z.B. diejenigen zur Vierfeldertafel oder dem Zahlenmauern dienen (vgl. Kap. 2.2.2). Der Aufwand, der für klinische Interviews im Rahmen von individuellen Standortbestimmungen notwendig ist, übersteigt aber schnell die unterrichtlich verfügbare Kapazität der Lehrerin.

Substanzielle Lernumgebungen in klinischen Unterrichtsexperimenten

Ein mit substanziellen Lernumgebungen gestalteter Unterricht, der eine natürliche Differenzierung ermöglicht und sich am aktiv-entdeckenden und sozialen Lernens orientiert, ist vergleichbar mit dem strukturellen Kern klinischer Interviews. Es werden Schlüsselfragen definiert und die Lehrerin bzw. Interviewerin folgt dem Denken der Kinder. Wittmann (1995c, 1997, 1998a) weiss um das diagnostische Potenzial klinischer Interviews. Mit den *klinischen Unterrichtsexperimenten* überträgt er den Ansatz auf das System Unterricht und legt nahe, sie als Forschungsmethode zu nutzen. Martina Röhr (1995) folgte diesem Vorschlag und konnte damit differenzierte sozial-kooperative Muster herausarbeiten.

> Diese Unterrichtsexperimente dienen allerdings nicht nur als Forschungswerkzeuge, sondern sind auch selbst Forschungsobjekte, da die erhaltenen Daten doppelt genutzt werden können: Die Daten geben einerseits Aufschluss über Lehr-/Lernprozesse, Denkprozesse und Lernfortschritte von Schülerinnen und Schülern, ihre soziale Interaktion usw. Andererseits helfen sie, die Lernumgebungen zu evaluieren und zu revidieren, um Lehr-/Lernprozesse noch effektiver gestalten zu können. (Wittmann, 1998a, S. 339)

Krauthausen (1998) nimmt die Methode des klinischen Unterrichtsexperiments mit der Bezeichnung *dokumentierte Unterrichtsversuche* in die Lehrerinnen- und Lehrerausbildung auf. Die Unterrichtstauglichkeit dieser Methode hängt von einer diszipliniert festgehaltenen Unterrichtsbeobachtung und einer konsequenten Reflexion ab.

Didaktische Konsequenzen aus Standortbestimmungen

Schriftliche und mündliche Standortbestimmungen sind in ganzheitliche Lehr-/Lernprozesse integrierbar. Sie flankieren einen Unterricht, der sich an substanziellen Lerngelegenheiten und einer individuell angepassten Schülerbegleitung orientiert. Offene Aufgaben und ein natürlich differenzierter Unterricht bieten ergiebige diagnostische Quellen, wenn die Lehrperson bereit ist, die notwendigen didaktisch-diagnostischen Kompetenzen zu erwerben und ein gewisses zeitliches Engagement aufzubringen.

3.3 Unterricht mit aktiv-entdeckendem und sozialem Lernen

Handlungs- und Anschauungsmittel sind im mathematischen Erstunterricht hoch präsent. Einige Forschungsergebnisse legen in Kapitel 3.3.1 eine gezielte Auswahl nahe, damit Lernprozesse unterstützt und nicht unnötig belastet werden.

Eigenproduktionen stellen eine kreative Form des aktiv-entdeckenden Lernens dar. Die Beispiele von Selter (1994a) und Hollenstein (1996) belegen in Kapitel 3.3.2 deren Lerneffizienz.

Das Argument, aktiv-entdeckendes Lernen sei ungeeignet für schwächere Schüler, entkräften Scherer (1995a; 1995b) und Moser Opitz (2001) in Kapitel 3.3.3 mit klaren Aussagen.

3.3.1 Lernen mit Handlungs- und Anschauungsmitteln

Die in Fachkreisen weit herumgereichten Untersuchungsergebnisse von Hülshoff (Schipper, 1982; vgl. Scherer, 1999b) zeigen auf, dass Schüler Veranschaulichungen erlernen müssen wie jeden anderen Unterrichtsstoff. Selbst „Veranschaulichungen zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 10 sind keine ‚selbstredenden' Bilder" (Schipper & Hülshoff, 1984, S. 56). Hinter den Befunden steckt eine Studie mit über 100 Schülern aus sechs ersten Klassen. Den Kindern wurden Veranschaulichungen[78] mit dem Auftrag vorgelegt, „zu jedem Bild die passende Rechenaufgabe zu schreiben" (ebd. S. 55). Beispielsweise schrieb ein Schüler zur Darstellung eines Mengenkreises mit 4 Punkten und einem durchgestrichenen Dreier die Rechnung „4 – 3 = 1" (vgl. Abb. 16).

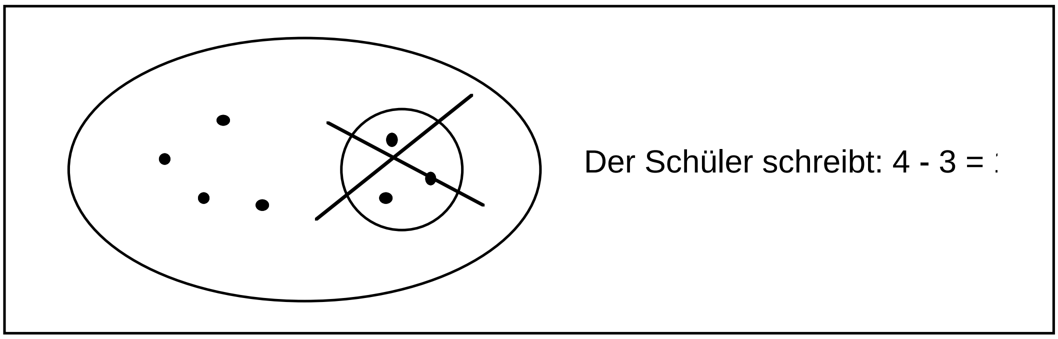


Abbildung 16: Interpretation einer Veranschaulichung (Schipper & Hülshoff, 1984, S. 55)

Voigt (1993) deutet eine solche Interpretation als ein Anders-Verstehen einer mehrdeutigen grafischen Darstellung und nicht als ein Nicht-Verstehen. Er legte Erstklässlern ein Bild aus einem Schulbuch vor, zu dem nur eine Rechnung als „richtig" vorgesehen ist. Darauf befindet sich ein Zoowärter mit drei Bananen in der Hand und ein Affe, der bereits zwei Bananen erhielt. Die Schüler kamen auf verschiedene mathematische Interpretationen: „5 – 2 = 3" (der Wärter gibt dem Affen zwei Bananen), „3 + 2 = 5" (Summe der Bananen), „1 + 1 = 2" (Wärter und Affe), „3 – 2 = 1" (der Wärter hat eine Banane mehr als der Affe), „5 – 4 = 1" (es ist eine Banane mehr als Hände, also muss eine herunter fallen) (ebd. S. 149).

> Das Problem mit der Mehrdeutigkeit der Bilder hat seine Ursache nicht in dem fehlenden Verständnis der Kinder, sondern in uns, falls wir zwischen unseren didaktischen Scheuklappen nicht mehr

[78] Die Veranschaulichungen stammen aus verschiedenen Lehrmitteln, teilweise kamen sie in ihrem eigenen Lehrmittel nicht vor. Die Untersuchung fand nach Einführung der Addition und Subtraktion statt.

> Alternativen der Mathematisierung der Bilder sehen oder erwarten.
>
> Nennt man bildliche Darstellungen im Mathematikunterricht „Veranschaulichungen“, dann nimmt man schon die Perspektive der Lehrerin oder des Schulbuchautors ein, aus der ein gegebener mathematischer Zusammenhang veranschaulicht wird. Dagegen ist die Beschreibung des Umgangs mit bildlichen Darstellungen als „Mathematisierung“ näher an der Schülersichtweise, aus der erst ein mathematischer Zusammenhang aus einem Bild gewonnen werden muss. Und der Schüler kann aus dem Bild eine andere mathematische Aussage entwickeln als die, die der Lehrbuchautor/Lehrer aus didaktischen Gründen anzielt und zu veranschaulichen meint. (ebd. S. 149-150)

Die Schwierigkeit mit den in Lehrmitteln gezeigten *Veranschaulichungen* liegt darin, dass sie ein Verständnis voraussetzen, das sie eigentlich aufbauen möchten (vgl. Seeger, 1993). Dem gegenüber bezeichnet der Begriff *Anschauungsmittel*, dass sich die Kinder mit dem Erkenntnisinstrument aktiv auseinander setzen, Beziehungen herstellen, innere Anschauungen ausbilden und zu vertieftem Wissen gelangen (vgl. Kap. 2.3.2). In diesem (konstruktivistischen) Sinne erfüllen Anschauungsmaterialien die Funktion der Lernhilfe, des Erkenntnismittels und der Stützung von Argumentationen (ebd., S. 164). Lorenz und Radatz (1993, S. 91-99) unterziehen die im Anfangsunterricht gebräuchlichsten einer kriteriengeleiteten Beurteilung[79]:

- Gute Arbeitsmittel lassen dieselbe Aufgabe über verschiedene Wege und Strategien lösen.
- Sie weisen sichtbare Strukturen auf, damit die Kinder eine Chance erhalten, sich an diesen zu orientieren und sich vom zählenden Rechnen zu lösen.
- Sie gewähren gute Übersetzungsmöglichkeiten zwischen der Handlungsstruktur und der grafisch-bildlichen Darstellung.
- Sie unterstützen die Entwicklung mentaler Vorstellungen durch ihre strukturelle Klarheit.
- Sie sind auf verschiedene Inhalte übertragbar und in verschiedenen Lernformen einsetzbar.

Steckwürfel[80] fallen bezüglich Offenlegung mathematischer Strukturen in dieselbe Beurteilungskategorie wie Wendeplättchen oder Erbsen und Knöpfe. Sie unterstützen weder ein strukturiertes Zählen noch ein nicht-zählendes Operieren, geschweige denn eine mathematische Strukturorientierung an der Dekade. Prädikat: wenig empfehlenswert.

[79] Vgl. Kommentar in Kapitel 2.3.2.

[80] Die Bezugsquellen der Materialien sind in Lorenz und Radatz (1993) angegeben.

Die *Rechenkette* besteht aus 20 Perlen, die eine Schnur zusammen hält. Sie wird als geeignet beurteilt, wenn sie eine farbliche Fünferstrukturierung aufweist. Die Vor- und Nachteile halten sich die Waage. Hervorzuheben ist der wesentliche Nachteil der möglichen, aber wenig sinnvollen Fortsetzbarkeit in den 100er-Raum.

Zusätzlich beurteile ich die *Cuisenaire-Stäbe*, die das Thurgauer Lehrmittel begleiten. Da die farbigen Stäbe den Einer nicht zeigen, verleiten sie kaum zum mechanischen Zählen. Aus eigenen Beobachtungen als Schulischer Heilpädagoge darf ich allerdings berichten, dass die Schüler Rechenergebnisse mehrheitlich zählend mit ihren Fingern ermitteln, auch wenn sie die Aufgaben mit den Stäben legen. Das Anschauungsmittel bleibt somit Handlungskulisse mit bescheidenem funktionalen Wert. Es ist geeignet, um Vergleiche anzustellen, Verhältnisse zu bilden oder Erkenntnisse beim Multiplizieren zu gewinnen. Die einzelnen Stäbe repräsentieren zu vervielfachende Einheiten und sind z.B. kompatibel mit dem Poster Einmaleins-Plan aus dem Lehrwerk Zahlenbuch 2. Meine Beurteilung: Nur sinnvoll für ausgewählte Bereiche. Sie sind nicht zu empfehlen als Anschauungsmittel im Arithmetik-Unterricht der ersten Klasse.

Im Weiteren beurteile ich ein Begleitmaterial des Zahlenbuches: das *Zwanzigerfeld mit Wendeplättchen* (vgl. Abb. 12). Die Fünfer- und Zehnerstruktur ist visuell ersichtlich. Für das Erzeugen und Entdecken mathematischer Beziehungen bietet das Feld gute Möglichkeiten (vgl. Hengartner & Wieland, 1995; Krauthausen, 1995b). Es ist fortsetzbar in erweiterte Zahlenräume (Hunderterfeld, Tausenderbuch), lässt individuelle Lösungen zu und unterstützt die Ausbildung mentaler Strukturen. Einziger Kritikpunkt: Die Wendeplättchen aus dem Begleitmaterial zum Zahlenbuch 1 sind zu fein, verrutschen leicht oder „kleben“ aneinander. Die Alternative besteht darin, sich robustere Wendeplättchen zu beschaffen. Es ist allerdings Vorsicht geboten, da die Plättchen verschiedenster Herkunft unterschiedlich gross und nur teilweise kompatibel sind mit dem Zwanzigerfeld aus dem Zahlenbuch.

Fazit

Da Bilder, grafische Darstellungen und Handlungsmaterialien Erkenntnisinstrumente sind, müssen sie singulären Wissenskonstruktionen dienlich sein. Die zeitintensiven Lernprozesse mit Anschauungsmitteln legen nahe, diese sorgfältig auszuwählen und sich an der Devise „weniger ist mehr“ zu orientieren (vgl. Wittmann, 1993b).

3.3.2 Eigenproduktionen und soziales Lernen

Eigenproduktionen gehen von offenen Fragestellungen aus, sie bieten singulären Interessen und Fähigkeiten Spielraum und liefern dem sozialen Austausch eine natürliche Grundlage. Selter und Sundermann (1999, S. 60; vgl. Selter, 1994a, 1995a, 1995c) definieren Eigenproduktionen als mündliche und schriftliche „Äusserungen von Schülerinnen und Schülern, bei denen diese selbst entscheiden, wie sie vorgehen oder wie sie ihr Vorgehen und dessen Ergebnis darstellen".

Christoph Selter (1994a) zeigt mit der Auswertung eines mehrmonatigen Unterrichtsprojekts in einer zweiten Grundschulklasse, dass Eigenproduktionen nicht nur kreativ und motivierend sind, sondern auch Lerneffizienz aufweisen. Sein lancierter Unterrichtsversuch beabsichtigte, Eigenproduktionen bei der Einführung der Multiplikation und Division anzuregen und in Lernprozesse einzubinden. Die Schüler sollten darin selber Multiplikations- und Divisionsaufgaben „erfinden", die Aufgaben mit eigenen Vorgehensweisen lösen, Auffälligkeiten beschreiben und begründen sowie schreibend über den Lernprozess reflektieren.

Eigenproduktionen erfüllen eine Doppelfunktion: Sie ermöglichen differenzierte Standortbestimmungen (vgl. Kap. 3.2.3) und öffnen produktive Lernwege, indem die Schüler ...

- über das eigene Vorgehen nachdenken, d.h. metakognitiv aktiv werden,
- im sozialen Austausch zwischen dem Ich und Du vergleichen und
- dabei die argumentative Ausdrucksfähigkeit schulen und auf eine reguläre Ebene bringen.

Die von Selter (1994a) gewährten Einblicke in seine Unterrichtskonzeption bestehen aus der Einführung in die Multiplikation und Division, gestütztem und strukturiertem Üben[81], der Erarbeitung von Rechenstrategien, der alltagsbezogenen Erkundung und Durchführung von Operationen und einer Reflexion über die Projektphase. Er hat die notwendige Automatisierung des Einmaleins nicht vergessen, aber minimal gehalten. Dennoch vermag seine Konzeption bezüglich Lerneffizienz Stand zu halten mit einem „automatisierungs-betonten" Unterricht.

Die Einblicke in den Unterrichtsversuch regen zu didaktischer Fantasie an, wenn die Schüler z.B. mit der „Einmaleinsbrille" ihre Umgebung erkunden oder ihre singulären Entdeckungen

[81] Gestütztes Üben meint ein Durcharbeiten mit Anschauungsmaterialien und ist in eine produktive Übungskonzeption eingebunden (vgl. Kap. 3.4.2).

kund tun. Dem Ansatz gewinne ich ab, dass er unterrichtlich durchführbar ist, wenn die Lehrerin über eine didaktische Kreativität und lehrzielbezogene Leichtfüssigkeit verfügt.

Armin Hollenstein (1996) überprüfte die Wirkung von Eigenproduktionen bei Textaufgaben. Er verglich das traditionelle Textaufgaben-Lösen mit der Nutzung von Schreibanlässen, bei denen die Schüler (der Sekundarstufe I) eigene Aufgaben erfinden. Sein Fazit lässt aufhorchen: Die Schreibanlässe werden (v.a. von Schüler*innen*) kreativ und produktiv genutzt und lösen substanziellere kognitive Lernprozesse aus als das Abarbeiten traditioneller Aufgaben.

Hollenstein (ebd.) und Selter (1994a, 1995c; vgl. Selter & Sundermann, 1999) betonen die soziale Einbindung singulärer Wege. Sie heben die Fahne hoch für die didaktische Leitidee: „Ich mache es so! – Wie machst du es? – Wir machen das ab.“ (vgl. Ruf & Gallin, 1995).

3.3.3 Entdeckendes Lernen mit lernschwachen Schülern

Aktiv-entdeckendes Lernen weckt in der Praxis vielerorts Skepsis, v.a. in Zusammenhang mit lern- und leistungsschwachen Kindern (vgl. Kap. 2.3.6). Petra Scherer (1995a) und Elisabeth Moser Opitz (2001) gingen in separaten Projekten der Frage nach, ob die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens auch in Sonderschulen[82] eine wirkungsvolle Alternative zur traditionellen heilpädagogischen Didaktik darstellt.

Scherer (1995a) konzipierte und evaluierte an einer Sonderschule für Lernbehinderte (2. bis 4. Klasse) einen mehrmonatigen Unterrichtsversuch. Der didaktische Schwerpunkt lag bei aktiv-entdeckenden Lernformen. Das Thema bestand aus der Orientierung im Zahlenraum bis 100 und dessen operativer Erschliessung. Der geprüfte Lerngewinn überzeugt:

- Der Lernzuwachs zwischen Vor- und Nachtest ist signifikant (leider fehlt der Vergleich mit einer Kontrollgruppe).
- Der ganzheitliche Einstieg in den 100er-Raum liess eine natürliche Differenzierung entstehen und wurde von den Schülern mehrheitlich produktiv genutzt.
- Die Kinder entwickelten singuläre Strategien.
- Nur anfangs bereiteten die (ungewohnt) offenen Aufgabenformate einigen Schülern Mühe.

[82] Damit sind Schulen für lernbehinderte Kinder gemeint, die in der Schweiz auch als Sonderklassen oder Kleinklassen bezeichnet werden.

- Die Verbindung zwischen abstrakten Zahlen und konkreten Aufgabenstellungen gelang, die Schüler gewannen dabei Einsichten in operative Strukturen.
- Der gezielte Einsatz von Veranschaulichungen bewirkte einen zunehmend bewussteren Gebrauch, „indem die Kinder versuchten, Aufgaben zunächst einmal im Kopf zu rechnen, d.h. sie strebten selbst nach Vereinfachung und Eleganz“ (ebd.).

Die Ergebnisse sind umso höher einzuschätzen, als einige der im Unterrichtsversuch behandelten Inhalte nicht zum Curriculum von Sonderschulen gehören. Die Befunde sind nicht nur auf aktiv-entdeckendes Lernen zurückzuführen, „sondern auch auf die Verwirklichung weiterer Leitideen, wie etwa die Beschränkung auf wenige sachadäquate Veranschaulichungen oder die stärkere Berücksichtigung produktiver Übungsformen“ (Selter & Sundermann, 1999). Die Botschaft von Scherer (vgl. 1993, 1995a, 1995b, 1996, 1999b) ist unmissverständlich: Auch schwächere Rechner profitieren vom aktiven Entdecken!

In dieselbe Richtung weist die Studie von Moser Opitz (2001). Sie verglich den Lerngewinn aus dem traditionellen heilpädagogischen Anfangsunterricht mit demjenigen, der aus aktiv-entdeckendem Lernen resultiert. Ihre Befunde und Empfehlungen lauten:

- In heilpädagogisch geführten Schulen sind konstruktivistisch orientierte Unterrichtskonzeptionen lerneffizient.
- Programmatische und für alle Schülerinnen verbindliche pränummerische Angebote sind unnötig. Falls individuelle „Rückstände“ vorliegen, soll die entsprechende Förderung individuell erfolgen und auf Alltagserfahrungen der Schüler Bezug nehmen.
- Der Aufbau von Zählkompetenzen ist wichtig und verlangt adäquate Lernumgebungen.
- Standortbestimmungen sollen der Öffnung natürlich differenzierter Lernräume dienen und pauschale Lehrmittelangebote in Frage stellen.

Die Arbeiten von Scherer (1995a) und Moser Opitz (2001) deuten darauf hin, dass Unterrichtskonzeptionen mit aktiv-entdeckendem Lernen auch im heilpädagogischen Umfeld fruchtbar sein können.

3.4 Das Zahlenbuch: Ergebnis aus dem Forschungs- und Entwicklungsprojekt „mathe 2000“

Das Zahlenbuch ist *ein* Ergebnis aus dem Dortmunder Forschungs- und Entwicklungsprojekt „mathe 2000“ (vgl. Müller et al., 1997). Die im Lehrmittel verständlich dargelegte didaktische Grundposition ist beispielhaft für eine direkte Kommunikation zwischen Theorie und Praxis.

Das Zahlenbuch entstand als Antwort auf die positive Resonanz, welche die didaktischen Handbücher *produktive Rechenübungen* von Wittmann und Müller (1992, 1993) auslösten. Das Lehrwerk erschien zunächst in einer bundesdeutschen Fassung für die Schuljahre 1 bis 4. Elmar Hengartner und Gregor Wieland (1995, 1996, 1997, 1998) adaptierten es auf Schweizer Verhältnisse und eine Autorengruppe ergänzte mit Bänden fürs 5. und 6. Schuljahr, so dass heute ein didaktisch kohärentes Lehrwerk für die Primarschulklassen 1 bis 6 vorliegt.

3.4.1 Didaktische Grundposition

Die mit dem Zahlenbuch vermittelte Grundposition stellt den aktiven Lerner ins Zentrum eines fachlich offenen und ganzheitlich gestalteten Unterrichts. Das Lehrmittel regt mit konkreten didaktischen Vorschlägen zu kreativem, entdeckendem und sinnstiftendem Lehren und Lernen an. Die Leitideen wenden sich entschieden gegen die traditionelle Unterrichtspraxis mit behavioristischer Couleur (vgl. Kap. 2.1.1 und 3.1):

- *Im Zentrum steht aktiv-entdeckendes und soziales Lernen.* Kinder treten in der Regel mit einer ausgeprägten Lernmotivation in Kindergarten und Schule ein. „Soll diese Lernfreude im Verlaufe der Schulzeit erhalten bleiben, muss der Unterricht das natürliche Lernen der Kinder durch aktiv-entdeckende und soziale Lernformen und ganzheitliche Lehrangebote verstärken“ (Müller et al., 1997, S. 10; vgl. Kap. 2.2.3).
- *Das natürlich differenzierte Lernen geht vom Kind aus.* Die von der Lehrerin vorgenommene Zuweisung von Zielen und Inhalten wird dem individuellen Lernen nicht gerecht. Auch an Leistungsgruppen gerichtete Pauschalangebote überfordern stets einige Kinder und schüren die Lernhaltung *Vermeidung von Misserfolgsangst*, andere sind unterfordert und gelangweilt. Die traditionelle innere Differenzierung ist auf extrinsische Motivationsmechanismen mit Belohnung durch Noten oder attraktive Aufgabenverpackungen angewiesen, da sie nicht von der Neugier des Kindes ausgeht (vgl. Kap. 2.2.4). Laut Empfeh-

lungen des Zahlenbuchs sollen die Schüler Mitverantwortung für den Lernprozess übernehmen und eine Lernmotivation durch herausfordernde und individuell lösbare Problemstellungen aufbauen (vgl. Wittmann, 1993a, S. 166). Die natürliche Differenzierung folgt der natürlichen Lern- und Leistungsheterogenität im Klassenverband und richtet sich an die Lernhaltung *Orientierung an Erfolgshoffnung* (vgl. Kap. 2.2.4).

- *Die Lernangebote konzentrieren sich auf Grundideen der Mathematik.* Mit der Orientierung am inhaltlichen Kern der elementaren Mathematik und am Spiralprinzip möchte das Zahlenbuch zeitliche Freiräume schaffen und Vertiefung ermöglichen (vgl. Kap. 2.3.1).

  > Die zentralen Rahmenthemen (z.B. das Einspluseins) werden in *mehreren Durchgängen* in jeweils anderem Kontext behandelt. Das entsprechende Wissensnetz wird bei jedem Durchgang im vollen Zusammenhang neu aufgeschlossen, was eine ständige Wiederholung mit sich bringt (z.B. Einspluseins in Sachsituationen, am Zwanzigerfeld, mit Wendekärtchen, am Rechendreieck, an Zahlenmauern, an der Einspluseinstafel, im Blitzrechnen usw.). Die Kinder erhalten so mehrfach die Chance, Wissenslücken aufzuarbeiten. Kein Kind wird „abgehängt". Der offene Ansatz des *Zahlenbuchs* erlaubt es in besonderer Weise, langsamere und schnellere Kinder in gemeinsame Lernaktivitäten zu integrieren. (Müller et al., 1997, S. 23)

- *Fachlich strukturierte Lernumgebungen sind unabdingbar.* Die didaktisch-lernpsychologische Grundposition stellt klar: „Kinder können ihr mathematisches Wissensnetz nicht völlig aus sich heraus knüpfen" (ebd.). Sie sind auf substanzielle Lernangebote und fachlich strukturierte Übungsformate angewiesen, damit sie Zugänge zum mathematischen Wissen finden. Die Gestaltung der Lernumgebung orientiert sich an der fachlichen Substanz und *nicht* an einer bunten Vielfalt mit lustigen Arbeitsblättern (vgl. Krauthausen, 1998, S. 98).

- *Die Devise bei Handlungs- und Anschauungsmitteln lautet: Weniger ist mehr* (Wittmann, 1993b, 1998b). Das Zahlenbuch und die begleitenden Arbeitsmittel verkörpern mathematische Grundideen und wollen die Schüler zu mathematischen Einsichten führen. Dies nach der Prämisse: Ein Hin- und Herhüpfen zwischen einer ungefilterten Palette an Arbeitsmitteln ist ineffizient, da es die Lernzeit durch das Kennenlernen der Mittel unnötig belastet (vgl. Schipper, 1982; Schipper & Hülshoff, 1984).

Die aus dem Projekt „mathe 2000" gewachsenen Leitideen sind transparent, intersubjektiv nachvollziehbar und didaktisch kohärent begründet. Der Anspruch des Lehrmittels an Schüler und Lehrerinnen ist hoch, die anvisierten Zielsetzungen sind aber didaktisch wertvoll.

3.4.2 Produktives Üben

Ansiedelung des Übens im Unterrichtsverlauf und im Lernprozess des Schülers

Die Übungskonzeption des Zahlenbuchs verläuft quer zu einer Unterrichtspraxis, in der das Üben hauptsächlich über mechanisches Abarbeiten von Päckchen erfolgt. Problemstellung, Begriffsaufbau, Durcharbeiten, Automatisierung und Anwendung (vgl. Aebli, 1997) sind nicht linear aneinander gereiht, sondern in einen ganzheitlichen Unterrichtsprozess verwoben. Die scharfe Etappierung parallel geschalteter Lernprozesse entfällt zu Gunsten eines natürlich differenzierten Lernens (vgl. Wittmann, 1992b).

> Die Phase der „Übung" durchdringt (...) alle Phasen in doppelter Weise: Einerseits enthalten Unterrichtseinheiten zur Einführung, Anwendung, oder Erkundung immer auch Elemente des Übens. Zum anderen sind in den gesamten Lernprozess (kleinere oder grössere) Unterrichtseinheiten zum Üben einzuflechten. Diese Durchdringung ist im didaktischen Rechteck durch eine Öffnung des Feldes „Übung" nach beiden Seiten zum Ausdruck gebracht. (ebd., S. 178)

Im didaktischen Rechteck sind organisatorische/selbstorganisatorische und individuelle Lernphasen durch Unterstreichung markiert (vgl. Abb. 17). Jede Phase spricht alle aufgeführten Lernaktivitäten an und variiert je nach Standort individueller Lernprozesse. Eine Einführung kann z.B. mit einer produktiven Übung erfolgen. Beim Einen löst sie Lernaktivitäten mit Gewichtung auf Kennenlernen aus und beim Andern mit Schwerpunkt Üben.

Dass die Lernaktivitäten des Schülers im Zentrum stehen, zeigt sich in Abbildung 17 auch begrifflich: Lediglich die erste Phase (Einführung) ist nach dem Schwerpunkt des Organisationstypen benannt, die übrigen sind den unterstrichenen Lernaktivitäten entlehnt.

Die Unterrichtskonzeption verfolgt einen Weg von der Organisation und Lenkung durch die Lehrerin zum selbst organisierten und begleiteten Lernen. Wittmann (ebd., S. 181) versteht das didaktische Rechteck denn auch als heuristisches Instrument „zur Unterstützung der didaktischen Intuition", das der Unterrichtsplanung in diesem Sinne dient.

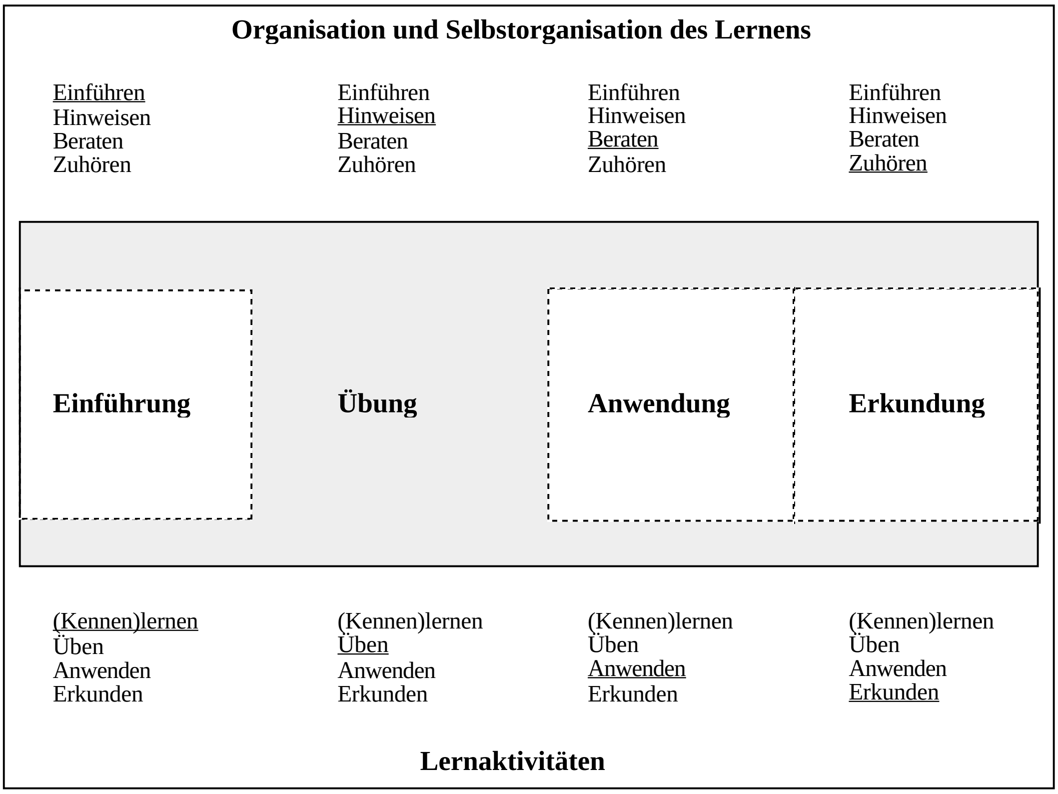


Abbildung 17: Das didaktische Rechteck situiert das Üben im Unterrichtsprozess (Wittmann, 1992b, S. 178)

Produktives Üben: Lernen in Sinnzusammenhängen

Die Übungsangebote im Zahlenbuch orientieren sich am operativen Prinzip, d.h. am Lernen in Sinnzusammenhängen (vgl. Kap. 2.3.4). Wittmann (1993a, S. 164) belegt mit Argumenten, warum er ein solches Lernen als *produktiv* bezeichnet:

- Aktiv-entdeckendes Lernen und Üben in Sinnzusammenhängen veranlasst und befähigt, eigene Denkleistungen zu erbringen.
- Der Lerngewinn aus substanziellen Angeboten besteht aus der Überwindung von Hindernissen und Widerständen und bietet dem natürlich differenzierten Lernen Hand.
- Der einzelne Schüler steuert seinen Lernprozess und übernimmt Lernverantwortung.

> Der Schüler lernt und übt überlegter (Worum geht es? Was ist leicht? Was kann ich schon? Was fällt mir schwer? Welcher Weg ist vorteilhafter? Was muss ich noch lernen? usw.) und er versucht, sich möglichst aus eigener Kraft in dem betreffenden Stoffgebiet zurechtzufinden. (ebd.)

- Die Auseinandersetzung mit den eigenen Kenntnissen und Denkstrategien führt zu nachhaltigerem Lerngewinn als mechanisches Üben.
- Produktives Üben ermöglicht ein aus der Sache heraus motiviertes und sozial eingebundenes Lernen.

Das in sämtliche Unterrichtsphasen integrierte produktive Üben kann mit Material gestützt oder formal erfolgen.

Produktives Üben kann in unterschiedliche Strukturen eingebunden sein

Da willkürlich zusammengestellte Rechnungen keine strukturellen Zusammenhänge aufweisen und die einzelnen Aufgaben nicht voneinander ableitbar sind, ist isoliertes Abarbeiten angesagt. Dem gegenüber bezieht sich produktives Üben auf operative Verknüpfungsstrukturen und Lösungsmuster (vgl. Hengartner & Wieland, 1995, S. 11; Wittmann, 1992b, S. 179).

> Für lernschwache Schüler ergeben sich daraus wesentliche Folgerungen: Unstrukturierte Übungen stellen hohe Anforderungen an das Gedächtnis, und gerade hier finden sich häufig Schwächen. Da die Kinder Schwierigkeiten haben, Strukturen zu erkennen bzw. auszunutzen, sollten insbesondere strukturierte Übungen zentraler Bestandteil des Unterrichts sein. Sie sind unstrukturierten Übungen vorzuziehen. (Scherer, 1999a, S. 14)

Strukturiertes Üben ist in Zusammenhang mit der Loslösung vom zählenden Rechnen und dem Erwerb alternativer Strategien zu favorisieren. Der Vorteil besteht darin, dass Kinder Rückgriff auf prozedurales Wissen und erkannte Muster nehmen können.

Wittmann (1992b, S. 179-182) unterteilt verschiedene produktive Übungstypen nach der Art ihrer Struktur in problem-, sach- und operativ strukturierte Übungsformen:

- Beim *problemstrukturierten Üben* besteht der Zusammenhang aus einem mathematischen Problem, wie z.B. bei der Aufgabe *Summen mit Reihenfolgezahlen* (vgl. Kap. 2.2.2). Übergeordnete Fragestellungen (z.B. „Hast du alle Aufgaben? – Warum?“) treten erst in Erscheinung, nachdem die Kinder vielleicht einzelne Aufgaben isoliert berechnet und unsystematisch aufgelistet haben.
- *Sachstrukturiertes Üben* rahmt Aufgabenstellungen mit Alltagssituationen. Bei der Übung *Tageslängen im Jahresverlauf* müssen die Schüler z.B. Zeitdifferenzen berechnen, damit ihnen die Ab- und Zunahme der Tageslängen bewusst wird und als Reflexionsbasis zur

Verfügung steht (ebd. S. 180). Danach können verschiedene Vergleiche angestellt, weitere Aufgaben abgeleitet und neue erfunden werden. Die sachstrukturierten Aufgaben unterscheiden sich insofern von *traditionellen* Textaufgaben, als sie einen Bezug zur Lebenswelt des Schülers aufweisen (vgl. Scherer, 1999a, S. 15; Hollenstein, 1996).

- *Operativ strukturierte* Übungen bestehen aus systematisch variierten Aufgabenserien mit einem gesetzmässigen Zusammenhang zwischen Verknüpfungsstrukturen und Ergebnissen (Wittmann, 1992b, S. 180). Das Zahlenbuch 1 bietet operativ strukturiertes Üben häufig in Ausschnitten aus der Einspluseinstafel an (z.B. „Päckchen mit Pfiff"; vgl. Hengartner & Wieland, 1995, S. 11 und S. 139-142).

In Abbildung 18 sind die ersten vier Aufgaben jedes Päckchens nach demselben Muster „gestrickt": Im linken bleibt der erste Summand (6) stehen und der zweite wird mit jeder neuen Aufgabe um eins grösser. Im mittleren vergrössern sich beide Summanden um eins und im rechten steigt der Minuend und der Subtrahend ebenfalls iterativ. Die Struktur ist in jeder Serie bei der fünften Aufgabe gebrochen, damit ihr die Kinder nicht „blind" folgen.

Die operative Struktur kann zu vertiefenden Diskussionen über die Verknüpfungsstruktur und den Strukturbruch führen: „Warum steigt die Resultatzahl im zweiten Päckchen immer um 2? – Warum funktioniert der ‚Trick' bei der fünften Aufgabe nicht?" etc.

6 + 4	2 + 3	14 - 5
6 + 5	3 + 4	15 - 6
6 + 6	4 + 5	16 - 7
6 + 7	5 + 6	17 - 8
5 + 7	6 + 5	16 - 8
4 + 7	5 + 5	18 - 9

Abbildung 18: Operativ strukturierte Päckchen

Vielleicht lösen die Schüler anfangs jede einzelne Aufgabe isoliert und lernen aus der gemeinsamen Reflexion über die Verknüpfungsstrukturen, dass diese die Ergebnisermittlung erleichtern können.

Produktives Üben kann gestützt oder formal erfolgen

Es hängt vom individuellen Lernstand *und* der aufgebauten Lernkultur ab, ob Schüler mathematische Einsichten auf Anschauungsmaterialien stützen und diese als Verständnisgrundlage nutzen. Das produktive Üben führt wiederkehrend zum konkreten Operieren mit Materialien und zeichnerischen Darstellungen, damit ein Lernen in Sinnzusammenhängen gewährleistet ist und sich nicht in bedeutungsleeren Formalismen verliert. Die Schüler sollen das gestützte erst durch formales Üben ersetzen, wenn sie mathematische Beziehungen mental erzeugen können.

> Nach dem Prinzip der fortschreitenden Schematisierung muss (...) die Symbolsprache der Mathematik behutsam als immer kürzere Beschreibung dieser anschaulichen Operationen aufgebaut werden. Insbesondere muss das gestützte Üben anfänglich Vorrang vor dem formalen Üben haben. (Wittmann, 1992b, S. 181)

Im Zahlenbuch ist die Automatisierung des Rechnens in das Trainingsprogramm Blitzrechnen integriert und bekommt im Verlaufe des Lernprozesses einen zunehmend höheren Stellenwert (vgl. Aebli, 1997, S. 220-222). „Aber: *Ein zu früher Übergang zu diesem Übungstyp ist für den Lernprozess tödlich und muss daher unter allen Umständen vermieden werden*“ (Wittmann, 1992b, S. 181).

Nicht nur die Frage nach gestütztem oder formalem Üben hängt vom Lernstand der Schüler ab, sondern auch diejenige zum Zugang in Übungsstrukturen:

Produktives Üben dient der Einsicht in Strukturen und deren Vertiefung und Anwendung

Reflektives Üben besteht aus den Phasen Einzelaufgaben lösen und Reflexion über die Aufgabenstruktur: Die Schüler lösen so lange Aufgaben, bis sie die Übungsstruktur erkennen. Anschliessend folgen (gemeinsame) Reflexionen, bei denen die Ergebnismuster und Verknüpfungsstrukturen diskutiert werden.

Sobald die Schüler eine Übungsstruktur durchschauen, können sie begonnene Strukturen fortsetzen und gleich funktionierende Päckchen erfinden. Mit diesem *immanenten Üben* entstehen kreativ-schöpferische Lernanlässe (z.B. „Wie geht mein Päckchen weiter?“), die neue Wege zu erkannten Strukturen öffnen und diese festigen.

3.4.3 Erwartungen an die Haltung der Lehrperson

Wittmann (1993a; vgl. Müller et al., 1997) favorisiert mit der Beschreibung der Unterrichtsgestaltung jene Entwicklungsrichtung des sozialen Systems Unterricht (vgl. Kap. 2.3.5), welche von einem kleinschrittigen und an die Lenkung der Lehrerin gebundenen zu einem aktiv-entdeckenden und selbst organisierten Lernen führt.

> Die Festlegung des Unterrichtsablaufs, die Ausschaltung der nicht konformen Reaktionen der Schüler, die Einengung ihrer mündlichen und schriftlichen Äusserungen auf bestimmte äussere Formate, die Motivation der Schüler von jedem kleinen Schritt zum nächsten, die Vermittlung jedes kleinen Wissenselements und jeder kleinen Fertigkeit, und die detaillierte Lernkontrolle: all dies erfordert die ständige Initiative und Bereitschaft des Lehrers und bürdet ihm die volle Last für die Unterrichtsgestaltung bis in die kleinsten Arbeitsanweisungen auf. (....) Dagegen versetzen aktiv-entdeckende Unterrichtsformen den Lehrer in die Lage, sich zumindest teilweise vom direkten Eingriff in den Unterricht zurückzuziehen und sich mehr auf eine *indirekte* Lenkung des Lernens zu verlegen. In diesem Fall kann sich der Lehrer nicht nur auf seine *eigenen* direktiven Fähigkeiten der Informationsvermittlung und Lernkontrolle stützen, sondern auch auf die *Selbstorganisationskräfte der Schüler und ihre Fähigkeit, sich gegenseitig zu helfen. (...)* Indem der Lehrer lediglich *„Hilfe zur Selbsthilfe“* leistet, erfährt er nicht nur eine wesentliche Entlastung, sondern er erweist den Schülern auch den besten Dienst, den er ihnen erweisen kann. (Müller et al., 1997, S. 37-38)

Lehren heisst demnach, Lernprozesse in Richtung Selbstorganisation anzuregen und dem Potenzial des selbst organisierten Lernens zu vertrauen. Die Lehrerin kann zunehmend loslassen und den Unterricht in dezentrierte Bahnen lenken, wenn sie einen organisatorischen, fachlichen und sozialen Rahmen schafft und den Schülern Freiräume öffnet (ebd., S. 11). In diesem Verständnis sind Lehrwerke Orientierungshilfen, sie tragen Werkzeugcharakter und sollen die unterrichtlichen Lehr-/Lernprozesse unterstützen (vgl. Geering, 1997).

3.5 Fazit aus dem Forschungsstand

Die Forschungsergebnisse weisen geschlossen auf die Vorzüge eines konstruktivistischen Lehr-/Lernverständnisses hin. Die Lehrerin soll die mathematischen Kompetenzen von Schulanfängern ermitteln und mit reichhaltigen Lernangeboten beantworten. Der Erstunterricht kann den heterogenen Lernvoraussetzungen der Schüler entsprechen, wenn er ein natürlich differenziertes Lernen ermöglicht und die Selbstorganisation des Lernens sich entfalten lässt. Voraussetzung dafür ist eine Lehrerin, die sich am aktiven Lerner, an fachlichen Strukturen und am Aufbau einer Lern- und Kommunikationskultur orientiert. Die Anforderungen verdeutlichen, dass die Verantwortung für den Verlauf des Unterrichts und der Lernprozesse bei der Lehrerin und den Schülern liegt und nicht bei einem Lehrmittel.

Kapitel 4 fokussiert die Beziehung zwischen der didaktischen Einstellung und dem konkreten Handeln. Es interessieren die Bedingungen, die zur Veränderung des Einstellungskonzeptes *und* dem Erwerb von didaktischen Handlungskompetenzen führen. Die Darstellung beschränkt sich auf Grundsatzfragen, die dem Verständnis der empirischen Untersuchung dienen.

4 Didaktische Einstellung und Umsetzung

In der amerikanischen Unterrichtsforschung existieren einige Ansätze, die das berufliche *Wissen* von Lehrern inhaltlich differenzieren. Sie unterscheiden Wissenskategorien, die zur Gestaltung des Unterrichts notwendig sind, z.B. fachlich-mathematische und pädagogisch-didaktische (vgl. Bromme, 1992, 1997; Terhart, 1991; Thompson, 1992).

Der Begriff *didaktische Belief-Systeme*[83] fasst die ideelle Ausrichtung dieses Wissens zusammen. Die Gründe, warum sich Lehrer z.B. behavioristisch oder konstruktivistisch orientieren, sind vielschichtig und der einzelnen Person häufig unbewusst. Ein Belief-System vermag Steuerungsfunktion zu übernehmen, wenn die notwendigen Handlungskompetenzen verfügbar sind und geeignete Unterrichtsbedingungen vorliegen. Zwischen der didaktischen Einstellung und Umsetzung können aber auch erhebliche Diskrepanzen bestehen (vgl. Thompson, 1984).

4.1 Einstellungskonzept und Handlungskompetenz

4.1.1 Einstellungskonzept als persönliche „fach-didaktische Philosophie“

Shulman (1986, 1987) überprüfte Studien zum beruflichen Lehrerwissen und stellte fest, dass sie einseitig allgemein didaktische Themen fokussieren (z.B. Anteil von Frontalunterricht). Damit ignorierte die Forschung *fach-didaktische* Gesichtspunkte, welche die unterrichtliche Übersetzung fachlichen Wissens betreffen (vgl. Dick, 1996, S. 80-81). Shulman (1986) ruft deshalb ein fehlendes Paradigma (missing paradigm) aus und schlägt der Unterrichtsforschung drei Kategorien des *fachbezogenen* Lehrerwissens vor: das fachinhaltliche, das curriculare (unterrichtsbezogene) und das pädagogische Inhaltswissen (vgl. Dick, 1996, S. 121-124; Terhart, 1991, S. 145-160).

[83] Ich gebrauche synonym mit dem Begriff *didaktisches Belief-System* die Bezeichnungen didaktische Einstellung, didaktische Orientierung und Einstellungskonzept.

Fachinhaltliches Wissen (subject matter content knowledge)[84]

Die Kategorie beinhaltet Umfang und Organisation des fachlichen Wissens im Kopf des Lehrers (Begriffe, Regeln, Techniken, Problemlöseprozesse). Fennema und Loef Franke (1992, S. 162) bezeichnen es mit Knowledge of Mathematics als mathematisches Wissen (vgl. Abb. 20).

Curriculares Wissen (curricular knowledge)

Das curriculare Wissen bezieht sich auf den Unterrichtsinhalt der Zielstufe. Es geht wesentlich über ein verdünntes fachliches Wissen hinaus und hat ein „‚Eigenleben‘ mit einer eigenen Logik, d.h., die Bedeutung der unterrichteten Begriffe ist nicht allein aus der Logik der wissenschaftlichen Fachdisziplin zu erklären“ (Bromme, 1992, S. 96). Eine Lehrerin zeichnet sich durch ein horizontales curriculares Wissen aus, wenn sie über ein Repertoire an Angeboten (Lehrmittel, Medien, etc.) verfügt und Querverbindungen zu Materialien und Sachstrukturen in anderen Fächern herstellen kann. Das vertikale Äquivalent besteht aus der Kenntnis von Curriculum und Lehrmitteln der vorausgehenden und anschliessenden Schulstufe.

Pädagogisches Inhaltswissen (pedagogical content knowledge)[85]

Die dritte Art fachspezifischen Inhaltswissens bezieht sich auf didaktisch sinnvolle Angebote (z.B. Unterrichtsformen, Schwerpunkte, Repräsentationen), die den Schülern individuelle Zugänge ermöglichen. Es ist ein fach-didaktisches Wissen notwendig, um geeignete Darstellungsformen zu finden, Schwerpunkten zeitliche Freiräume zu öffnen und ein Verständnis für die Denk- und Lernwege der Schüler aufzubringen. Das letztere bezeichnen Fennema und Loef Franke (1992, S. 162) mit Knowledge of Learners‘ Cognitions in Mathematics als Wissen über das mathematische Denken des Lerners (vgl. Abb. 20).

Bromme (1992) greift Shulmans Klassifikation des professionellen Wissens für die Gestaltung von Unterricht auf und differenziert das pädagogische Inhaltswissen, indem er die *„Philosophie der Schulmathematik“* hinzufügt und zwischen dem fachunabhängigen pädagogischen Wissen und dem fach-didaktischen unterscheidet.

[84] Ich halte mich an die Übersetzung der englischen Begriffe von Dick (1996, S. 122), der „‚content‘ als ‚Unterrichtsinhalt‘, ‚subject‘ als ‚Schulfach‘, und ‚subject matter‘ als ‚Fachinhalt‘“ übersetzt.

[85] Der anglo-amerikanische Ausdruck „pädagogical knowledge“ darf mit pädagogisch-didaktischem oder fachdidaktischem Wissen übersetzt werden, wenn er sich auf ein europäisches Pädagogikverständnis bezieht (Dick, 1996, S. 123).

Fachunabhängiges pädagogisches Wissen

Bromme (ebd., S. 97) bezeichnet das Wissen für den Aufbau einer Unterrichtskultur als fachunabhängige pädagogische Kompetenz, sie betrifft die Unterrichtsgestaltung und ist relativ unabhängig von Fachbezügen. Fennema und Loef Franke (1992, S. 162) führen unter demselben Begriff methodisches Know-how, Planungsstrategien, Unterrichtsroutinen, Techniken der Verhaltenssteuerung und organisatorische Kenntnisse an (vgl. Abb. 20).

Philosophie der Schulmathematik

Die Lehrerin gestaltet den Mathematik-Unterricht nach ihrer eigenen Auffassung hinsichtlich der Bedeutung des Fachinhaltes und den Bezügen zu anderen Bereichen menschlichen Lebens und Wissens (vgl. Bromme, 1992, S. 97). Die fachliche Philosophie ist eine subjektive Sichtweise bezüglich mathematischer Inhalte, Unterrichtsgestaltung und angestrebter Ziele. Die Überzeugungen tragen normativen Charakter und stimmen unterschiedlich mit der Realisierung überein. Sie können z.B. in Richtung Behaviorismus oder Konstruktivismus verlaufen und sind den Wissensbereichen übergeordnet (vgl. Abb. 19).

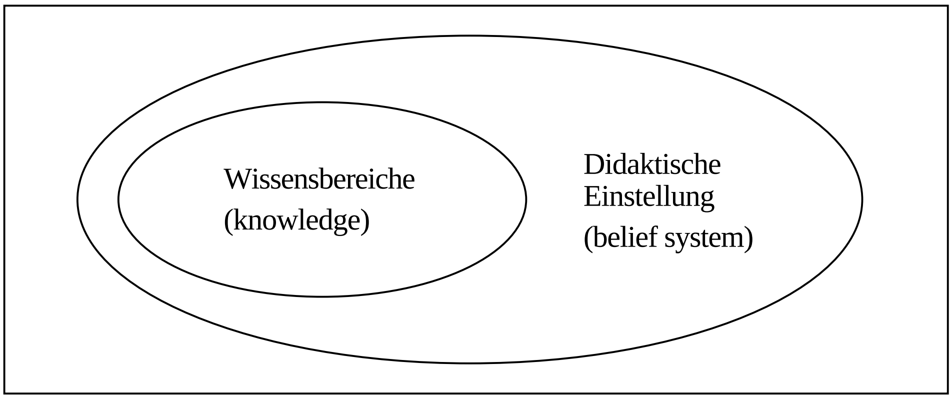


Abbildung 19: Die didaktische Einstellung ist den Wissensbereichen übergeordnet (vgl. Pehkonen, 1994b, S. 182)

Analog unterscheidet Alba G. Thompson (1992) zwischen Wissensbereichen und Beliefs. Sie betont, dass einzelne Beliefs in Systeme integriert sind und bei der Wissensaneignung und -anwendung eine Steuerungsfunktion übernehmen.

> The notion of a belief system is a metaphor for examining and describing how an individual's beliefs are organized (...). It seems appropriate, at least from a struktural point of view, to conceive of a belief system much in the same way that we think of a cognitive strukture in a particular concep-

> tual domain. As such, belief systems are dynamic in nature, undergoing change and restructuring as individuals evaluate their beliefs against their experiences. (ebd., S. 130)

Thompson (ebd.) stützt sich auf die Arbeit von Green (1971), der inhaltsunabhängige Belief-Systeme empirisch identifizierte. Diese verleihen der Beziehung zwischen einzelnen Beliefs Systemcharakter mit drei Kennzeichen:

Quasi-Logik

Das erste bezeichnet, dass ein einzelnes Belief meist einen subjektiv hergestellten Zusammenhang zu anderen Beliefs, d.h. zur Art von Meinungen, Gründen oder Schlussfolgerungen aufweist. Einem Belief-System unterliegt eine subjektive, quasi-logische Struktur mit stabilen und instabilen Beliefs.

Emotionale Bedeutung

Das zweite Merkmal betrifft den Grad der persönlichen Überzeugung, die hinter Beliefs steht. Nach Green (ebd.) weisen zentrale Beliefs eine hohe Stabilität auf, während periphere leichter gewechselt oder revidiert werden. Ein Belief kann in seiner Logik brüchig, aber subjektiv bedeutungsvoll (und damit stabil) sein oder eine objektive Logik aufweisen und emotional unbedeutend (und damit instabil) sein.

Cluster-Struktur

Das dritte Kennzeichen bezieht sich auf die Feststellung, dass Beliefs clusterartig zusammenhängen und trennscharf sind zu Beliefs in anderen Clustern. „Beliefs are held in clusters, more or less in isolation from other clusters and protection from any relationship with other sets of belief“ (Green, 1971, S. 46, zit. in Thompson, 1992, S. 130). Zahlreiche Untersuchungen weisen aber auch auf inkonsistente (oder quasi-logische) Beliefs hin, die nicht kompatibel sind mit persönlichen Belief-Systemen (vgl. Kap. 5.2.6).

Fennema und Loef Franke (1992) stellen die drei beschriebenen Bereiche des professionellen Lehrerwissens in die Unterrichtssituation und machen darin gesammelte Erfahrungen verantwortlich für die Entwicklung des Lehrerwissens und des subjektiven Belief-Systems[86] (vgl. Abb. 20).

[86] Fennema und Loef Franke (1992) verwenden den Begriff ‚beliefs‘. Ich übersetze ihn im Sinne der Darstellung von Thompson (1992) als Belief-System.

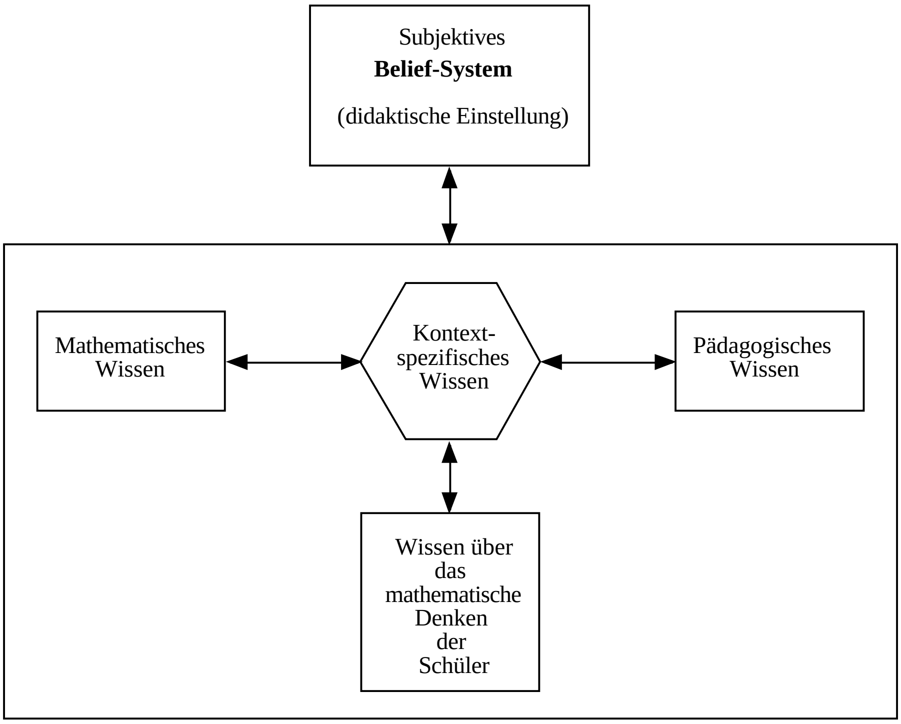


Abbildung 20: Beziehung zwischen den Bereichen des Lehrerwissens und dem Belief-System (vgl. Fennema & Loef Franke, 1992, S. 162)

4.1.2 Messinstrument zum didaktischen Einstellungskonzept

Fritz Staub und Elsbeth Stern (1998) übersetzten ein Messinstrument von Peterson, Fennema, Carpenter und Loef (1989)[87], das analog dem pädagogischen Inhaltswissen (Shulman, 1987) das pädagogisch inhaltliche Belief-System von Lehrpersonen ermittelt. Das Instrument *Einstellungen zum Mathematikunterricht* besteht aus 48 Glaubenssätzen zum Lehren und Lernen mit *Textaufgaben*, welche Lehrpersonen zwischen *überhaupt nicht einverstanden* und *sehr einverstanden* bewerten (vgl. Anhang A). Die Aussagen fordern eine Beurteilung heraus, die zwischen einem konstruktivistischen und einem behavioristischen Standpunkt liegt.

Der *konstruktivistische* Pol der Items orientiert sich am Lerner, der sein Verstehen und Wissen aktiv konstruiert. In dieser Absicht bietet die Lehrerin reichhaltige Lernumgebungen an und begleitet singuläre Wissenskonstruktionen. Aus *behavioristischer* Perspektive besteht Lernen aus passiver Rezeption, der Lehrerin wird die Funktion der Wissensvermittlerin und Vorzeige-

[87] Vergleiche sind mit Publikationen von Peterson, Carpenter und Fennema (1989) oder Stern (1997) möglich.

rin von Musterlösungen zugewiesen. Die konstruktivistische und die behavioristische Sichtweise spiegeln Belief-Systeme, die sich kontrastieren (vgl. Staub & Stern, 1998).

Urteile über Glaubenssätze

Die zu beurteilenden Aussagen sind in vier Bereiche unterteilt: (1) Rolle des Lerners, (2) Beziehung zwischen Aufgaben, Problemlösen und Verstehen, (3) sozio-konstruktivistische Aspekte und (4) Rolle der Lehrerin. Ich gebe zu jedem Bereich zwei Item-Beispiele. Die Zustimmung zum ersten Beispiel (a) entspricht jeweils einer konstruktivistischen Auffassung, die Ablehnung einer rezeptiven. Beim zweiten Glaubenssatz (b) ist die Bejahung einer behavioristischen Orientierung zuzuordnen und die Ablehnung einer konstruktivistischen[88].

1. Rolle des Lerners

Die Sätze des ersten Bereichs laden zur Beurteilung ein, ob der Lerner mathematisches Wissen aktiv konstruieren oder von aussen vermittelt bekommen müsse:

a) *Die meisten Grundschüler können selbst Lösungen für einfache Textaufgaben finden* (12).
b) *Schüler lernen Mathematik am besten, indem sie den Erklärungen der Lehrerin oder des Lehrers folgen* (26).

2. Beziehung zwischen Aufgaben, Problemlösen und Verstehen

Die Bewertung der Aussagen differenziert zwischen der Auffassung, mathematische Aufgaben sollten in Verstehens- und Problemlöseprozesse eingebunden sein und der Ansicht, sie sollten unabhängig vom Verstehen geübt werden:

a) *Schüler sollten Rechenprozeduren verstehen, bevor man viel Zeit auf ihre Einübung verwendet* (3).
b) *Schüler sollten erst dann einfache Textaufgaben erhalten, wenn sie einen Teil des numerischen Faktenwissens gut beherrschen* (39).

3. Sozio-Konstruktivismus

Die Aspekte des Sozio-Konstruktivismus beziehen sich auf Vermittlungsaspekte, wie z.B. *es hilft Schülern Mathematik zu begreifen, wenn man sie ihre eigenen Lösungsideen diskutieren lässt* (31). Die behavioristische Auffassung spricht sich für eine direkte Vermittlung aus (z.B.

[88] In Klammer steht jeweils die Nummer des Items (vgl. Anhang A).

Schüler benötigen ausführliche Anleitungen dazu, wie Textaufgaben zu lösen sind; 46).

a) *Lehrerinnen und Lehrer sollten Schüler ermutigen, ihre eigenen Lösungswege für Mathematikaufgaben zu suchen, auch wenn diese ineffizient sind* (2).

b) *Die von Schülern schriftlich gelösten mathematischen Aufgaben lassen den erreichten Grad des Verstehens erkennen* (17).

4. Rolle der Lehrerin

Die Aussagen des vierten Bereichs unterscheiden zwischen der Meinung, die Lehrerin sollte Bedingungen schaffen, damit die Schüler ihr mathematisches Wissen aktiv aufbauen können und der rezeptiven Auffassung, die Lehrerin müsse das Wissen möglichst klar präsentieren.

a) *Mathematik sollte in der Schule so gelehrt werden, dass die Schüler Zusammenhänge selbst entdecken können* (9).

b) *Lehrerinnen und Lehrer sollten für das Lösen von Textaufgaben detaillierte Vorgehensweisen vermitteln* (5).

Das Testinstrument ermittelt also mathematik-didaktische Einstellungen zwischen konstruktivistischer und rezeptiver Orientierung[89]. Meinungen und Handlungen, die quer stehen zu persönlichen Belief-Systemen, finden in sozialpsychologischen Konsistenztheorien Erklärungsansätze (vgl. Nawratil & Rabaioli-Fischer, 1983).

4.1.3 Widersprüche zwischen didaktischer Einstellung und Umsetzung

Im Kontext des Unterrichts sind zwei Hauptfaktoren für die Widersprüche zwischen der didaktischen Einstellung und dem konkreten Handeln verantwortlich (vgl. Wahl, 1991):

- Wenn der Lehrerin didaktische Kompetenzen fehlen, kann sie das Beabsichtigte nicht realisieren und es kommt zu Unstimmigkeiten zwischen ihrem Belief-System und dem konkreten Handeln. Es bedarf hinreichender didaktischer Fähigkeiten und Fertigkeiten, damit ein konsistentes Verhalten zu Tage treten kann (vgl. Krauthausen, 1998, S. 46-48).

- Die Gründe können auch in den Unterrichtsbedingungen liegen, die eine Umsetzung des Gewollten behindern oder verunmöglichen. Fehlende didaktische Kompetenzen und er-

[89] Für weitere Ausführungen zum Erhebungsbogen verweise ich auf Kapitel 5.2.2 und 5.2.6.

schwerte Unterrichtsbedingungen sind komplementär: Je kompetenter eine Lehrperson ist, desto weniger scheitert die Umsetzung an Unterrichtsbedingungen.

Die Lehrperson kann entstandene Dissonanzen auflösen, indem sie ...

- ihr Verhalten ändert, die didaktischen Kompetenzen erweitert und den Unterrichtsbedingungen anpasst.
- ihre didaktische Einstellung ändert und mit vorhandenen Kompetenzen oder Unterrichtsbedingungen abstimmt.
- ihre didaktische Einstellung differenziert und einschränkt: „Das Beabsichtigte ist in dieser Klasse nicht realisierbar“ oder „die Umsetzung ist nur mit guten Rechnern möglich“ (vgl. Nawratil & Rabaioli-Fischer, 1983, S. 88-89).

4.1.4 Didaktische Handlungskompetenzen und -performanzen

Verschiedene sozialpsychologische Theorien erklären die fehlende Übereinstimmung zwischen Denken und Handeln mit der Unterscheidung von Kompetenz und Performanz. Die Kompetenz bezeichnet das verfügbare Potenzial, die Performanz das situativ gezeigte Verhalten. Hinter jedem beobachtbaren Verhalten stecken verfügbare Kompetenzen, die in der Einzelsituation nicht gezeigt werden müssen oder können (vgl. Heursen, 1983).

Ich illustriere den Unterschied zwischen Kompetenz und Performanz an zwei Beispielen. Das erste nimmt Bezug auf Kohlbergs Theorie über die Entwicklung des moralischen Urteils (vgl. Kohlberg, 1995), das zweite steht in einem mathematischen Kontext.

Moralische Urteilskompetenz und Handlungsperformanz

Das moralische Urteil eines kleinen Kindes orientiert sich an Strafe und Belohnung (Entwicklungsstufe 1). Das belohnte Verhalten ist gut, das bestrafte schlecht. Auf Stufe 4 leiten gesetzliche Vorgaben das Gerechtigkeitsempfinden, der eigene Vorteil tritt in den Hintergrund.

Situationsschilderung: Herr X verfügt über ein Urteilsvermögen auf Stufe 4. Er ist in Zeitnot und muss sein Auto vor einem Geschäft parkieren, findet aber keinen erlaubten Parkplatz. Er entscheidet sich für einen verbotenen, der sein Auto hinter Bäumen abschirmt, und hofft, nicht gebüsst zu werden. Obwohl Herr X über die Handlungs- und Urteilskompetenzen verfügt, sein

Auto in ein beliebiges Parkfeld zu lenken und sich am gesetzlich Richtigen zu orientieren, lässt er sich von Motiven auf Stufe 1 leiten. Er tut etwas Verbotenes und möchte dafür nicht bestraft werden. Er zeigt eine Handlungsperformanz, die unter seiner (Urteils-)Kompetenz liegt. Auf Stufe 4 hätte er sein Auto auf ein erlaubtes oder unverdeckt auf ein verbotenes Parkfeld gestellt und eine Busse riskiert. Es wäre vermessen, vom Verhalten auf Urteilskompetenzen zu schliessen, da sich diese nicht im gezeigten Verhalten spiegeln müssen.

Mathematische Performanzen und Kompetenzen

Stern (1998) veranschaulicht die Unterscheidung zwischen Performanz und Kompetenz am Beispiel des Lösens einer mathematischen Aufgabe. Sie attestiert dem Leser mit vollzogener Grundschule, die Aufgabe „Hans hat 5 Murmeln. Peter hat 3 Murmeln mehr als Hans. Wie viele Murmeln haben Hans und Peter zusammen?“ (ebd., S. 17) lösen zu können. Falls er die Aufgabe *nicht* bewältigt, ist ein Mangel in der Performanz eine nahe liegende Interpretation (z.B. Konzentrationsmangel). „Der Erwachsene hat, als ihm die Aufgabe präsentiert wurde, nicht von seinem verfügbaren Wissen Gebrauch gemacht und deshalb nicht die optimale Leistung erbracht“ (ebd.). Dem Zweitklässler wird hingegen (rasch) unterstellt, „dass er noch nicht das zum Lösen einer Aufgabe benötigte Wissen verfügbar hat, also noch nicht über die Kompetenz zur Lösung einer Aufgabe verfügt“ (ebd.).

Die Unterscheidung zwischen umgesetzten und potenziell verfügbaren Kompetenzen ist für die Interpretation von Dissonanzen zwischen Denken und Handeln grundlegend. Bezogen auf das didaktische Verhalten halte ich fest: Die in *einer* Situation beobachteten Performanzen lassen nur bedingt auf vorhandene Kompetenzen schliessen. Deren Verfügbarkeit müsste in Längsschnittstudien erfolgen und situative Spezifitäten ausschliessen.

4.2 Veränderung der didaktischen Einstellung und Erweiterung der Handlungskompetenzen

Lehrerinnen orientieren sich in ihrer Alltagsdidaktik an subjektiven Theorien (vgl. Dann, 1983, 1989; Koch-Priewe, 1986; Schlee, Scheele & Groeben, 1988; Schlee & Wahl, 1987), an Unterrichtsbildern aus der eigenen Schul- und Studienzeit und an Lehr-Erfahrungen (vgl. Meyer, 1987a, 1987b; Scheller, 1981). Unterrichtsbilder und Belief-Systeme sind veränderungsresistent, emotional eingewurzelt und wirken bremsend auf die Weiterentwicklung des Lehr-/Lernverständnisses (Meyer, 1987b, S. 27- 33). Meine Fragen lauten:

- „Unter welchen Bedingungen und aus welchen Motiven heraus verändern Lehrpersonen ihre didaktische Einstellung?"
- „Wie sehen konstruktivistische Vorschläge für die Erweiterung didaktischer Handlungskompetenzen aus?"

4.2.1 Veränderung der didaktischen Einstellung

Die in 4.1.3 beschriebenen Möglichkeiten zur Auflösung kognitiver Dissonanzen sind aus der Konsistenztheorie von Festinger (1959) abgeleitet. Pehkonen (1994a) stellt ein Modell von Shaw, Davis und McCarty (1991) dar, das für die Veränderung der didaktischen Einstellung vier Faktoren verantwortlich macht:

- Die Lehrpersonen werden in ihrem Denken und Handeln gestört und geraten in Konflikte.
- Sie sind bereit, etwas für die Lösung dieser Störung zu tun.
- Sie haben eine Vision, was sie in ihrem Unterricht verändern und realisieren möchten.
- Sie entwickeln selber einen Plan für die Umsetzung dieser Vision.

Die Autoren fassen die Bedingungen für die Veränderung der didaktischen Einstellung in ein dynamisches Modell (vgl. Abb. 21). Grundsätzlich wirken einige Elemente der *Kulturumgebung* („Geist" im Lehrerteam, Kontakte zur Elternschaft, verfügbare Zeit, Tabus, Gewohnheiten) begünstigend oder hemmend auf Veränderungen. Auch spontan auftretende oder bewusst inszenierte *Störungen* im Handeln und Denken lösen Neuorientierungen aus. In der praxisnahen Weiterbildung kann z.B. ein unterrichtlicher Ablauf gezielt unterbrochen werden, „um dem Handelnden sein eigenes Tun und insbesondere verfestigte Routinen bewusst zu machen und zur Reflexion darüber anzuregen" (Krauthausen, 1998, S. 48). Als Störungsquellen wirken Schüler, Kolleginnen, Eltern, Lehrmittel, Fachartikel etc. und begünstigen Veränderungsprozesse via Reflexion und Perspektivenwechsel.

Der Aphorismus *Erfahrung ist der beste Lehrer* kann ergänzt und differenziert werden: *Gewohnheiten, die gestört und reflektiert werden, sind der beste Lehrer* (vgl. Dick, 1996).

Erfahrung ist zwar weiterhin notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für das Expertentum. Hinzugesellen muss sich nämlich die *Bereitschaft und Motivation*, aus der Erfahrung lernen zu wollen. Aus und von Erfahrungen lernen als ‚metakognitive Fertigkeit' heisst, man versucht den Zugang zu finden zu den eigenen handlungssteuernden oder handlungsleitenden Kognitionen. (ebd., S. 174) [kursive Schriftsetzung; KH]

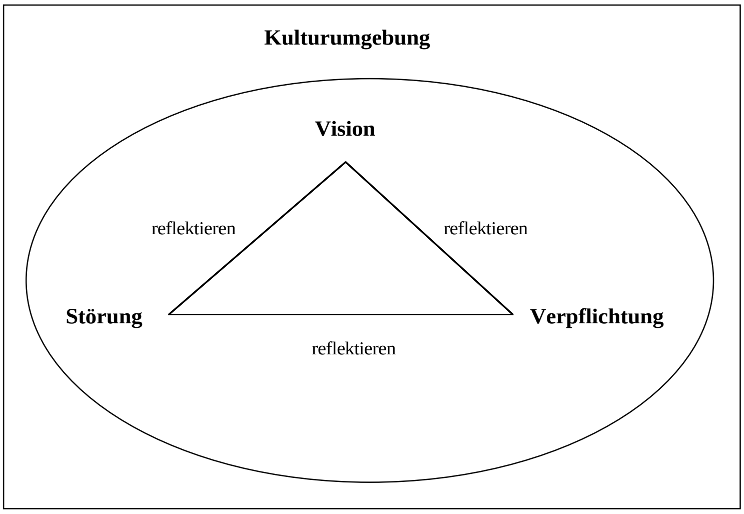


Abbildung 21: Ein dynamisches Modell für den Gesinnungswandel von Lehrpersonen (Shaw et al., 1991; vgl. Pehkonen, 1994a, S. 193)

Die persönliche *Verpflichtung* geht von der inneren Bereitschaft aus, auf Störungen mit Veränderung zu reagieren. Die Unzufriedenheit mit einem Lehrmittel könnte z.B. als Störung wahrgenommen und einen Lehrmittelwechsel auslösen.

Ideologien, *Visionen* oder Belief-Systeme einer Lehrperson bestimmen die Richtung von Veränderungsprozessen. Deren Realisierung hängt von der Kulturumgebung, der reflektierten Störung und der Bereitschaft ab, sich für eine Veränderung einzusetzen. Wahl (1991) zeigt auf, dass zwischen dem theoretischen Wissen und dem gezeigten Verhalten eine grosse Kluft bestehen kann (vgl. Krauthausen, 1998, S. 48). Eine praxisnahe Weiterbildung, die z.B. Selbsterfahrungen mit aktiv-entdeckendem Lernen ermöglicht und in Inter- und Supervisionsangeboten eine Fortsetzung findet, begünstigt didaktische Veränderungsprozesse.

4.2.2 Erweiterung didaktischer Handlungskompetenzen

Beweggründe für die Erweiterung didaktischer Handlungskompetenzen sind in der Dynamik der beschriebenen Komponenten von Shaw et al. (1991) zu suchen. Wittmann (1999) und

Krauthausen (1998) sehen in einer konstruktivistisch orientierten Aus- und Weiterbildung Möglichkeiten für die Auslösung nachhaltig greifender Lernprozesse (vgl. Dick, 1996, S. 94).

> Wenn Ausbildungsangebote tatsächlich und dauerhaft in wünschenswerte geistige *Gewohnheiten* zukünftiger Lehrerinnen münden sollen, dann muss das Lernen (...) vorrangig aus konkretem Tun und entsprechender Reflexion darüber bestehen. (...) [Dies umfasst] im Wesentlichen drei Dinge: Eigenaktivität im Sinne des selbständigen *Mathematiktreibens*, Eigenaktivität im weiter reichenden Sinne als Übernahme von *Selbstverantwortung* für den eigenen Lernprozess und nicht zuletzt die Einsicht, dass diese Eigenaktivität nicht lediglich als ‚Zugabe‘ für einige wenige ‚Besserqualifizierte‘ zu verstehen ist. (Krauthausen, 1998, S. 84)

Krauthausen fordert von der Aus- und Weiterbildung, dass sie Selbsterfahrungen mit aktiv-entdeckenden Lernformen ermöglichen soll. Er führt die „grosse Kluft zwischen der mangelnden Eigenerfahrung der Lehrerinnen mit aktiv-entdeckendem Lernen und dem Anspruch an einen eben solchen Unterrichtsstil“ (ebd.) auf die eingewurzelten Unterrichtsbilder mit traditionellen Lehr- und Lernformen zurück (vgl. Wittmann, 1999, S. 7).

5 Drei empirische Forschungsfenster

Die empirische Untersuchung beinhaltet drei eigenständige Analyseblöcke, die durch spezifische Fragestellungen und Hypothesen miteinander verknüpft sind. Inhaltlich interessieren ...

Die empirische Untersuchung beinhaltet drei eigenständige Analyseblöcke, die durch spezifische Fragestellungen und Hypothesen miteinander verknüpft sind. Inhaltlich interessieren ...

A das *didaktische Einstellungskonzept* von Unterstufen-Lehrerinnen zum Lehren und Lernen mit Textaufgaben,

B die konkrete *Realisierung* von Mathematik-Lektionen mit ersten Primarklassen, insbesondere die verbalen Äusserungen während der individuellen Lernbegleitung und

C die *mathematische Kompetenzerweiterung* von Erstklässlern.

Im Zentrum des Forschungsinteresses steht das didaktische Handeln von Erstklass-Lehrerinnen während des Mathematik-Unterrichts (B)[90], ausgewertet vor dem Hintergrund ihrer

[90] Die alphabetische Klassifizierung der Forschungsfenster dient der Kennzeichnung der Hypothesen. Materialien und Zusatzinformationen zu den Untersuchungsteilen sind im Anhang analog von A bis C gegliedert.

Einstellungskonzepte (A). Die dritte Analyseeinheit (C) basiert auf Schülerdaten aus zweimalig durchgeführten Mathematiktests. Sie trägt vorrangig instrumentellen Charakter, dient als Kontrolluntersuchung und gibt Anlass zu ergänzenden Fragestellungen.

5.1 Vorüberlegungen und Übersicht

5.1.1 Kern der empirischen Untersuchung

Mit dem Zahlenbuch gelangte eine direkte konstruktivistische Botschaft an die Unterrichtspraxis. Folgende Charakteristika fassen den didaktischen Kern des Lehrmittels zusammen:

- Wissen wird vom Lernenden aktiv konstruiert und nicht passiv aufgenommen. *Aktiv-entdeckendes Lernen* und *produktives Üben* zielen darauf ab, dass die Schüler Einsichten in operative Strukturen gewinnen. Dieser Anspruch erscheint im Zahlenbuch als plakative Formel: „Nicht Leitung und Rezeptivität, sondern Organisation und Aktivität ist es, was das Lehrverfahren der Zukunft kennzeichnet" (Hengartner & Wieland, 1995, S. 3).

- Singuläre Wissenskonstruktionen zielen auf Passung oder Viabilität, bis sie schliesslich vereinbarten Regeln Stand halten. Das gegenseitige Darstellen, Erklären und Argumentieren ermöglicht den Schülern, beschrittene Wege nachzuvollziehen. Die didaktische Konsequenz heisst *dialogisches Lernen* (Ruf & Gallin, 1999a, 1999b), es betrifft die individuelle Wegsuche und den sozialen Austausch.

- Fehler oder Fehlwege sind im Lernprozess des Schülers wichtige Erfahrungen, die er selber machen muss, damit er viable Wege findet. Beim Auf- und Umbau operativen Verstehens ist er darauf angewiesen, an Schwierigkeiten zu stossen, Fehler zu begehen und „negatives" Wissen[91] zu reflektieren, also über das nachzudenken, was er nicht tun soll (Oser, Hascher & Spychiger, 1999). „Die Fehleranalyse wird damit zur Lerndiagnose und das Offenlegen von Denkwegen zum Ausgangspunkt der Reflexion des eigenen geistigen Funktionierens" (Reusser, 1999b, S. 203).

- Kognition dient der Organisation der Erfahrungswelt des Lernenden, oder wie es Aebli

[91] Oser, Hascher und Spychiger (1999) legen mit der Theorie des „negativen" Wissens dar, „wie sich Wissen darüber konstituiert, was nicht zu einer Sache gehört (Abgrenzungswissen) oder nicht getan werden darf (Fehlerwissen)" (S. 17). „Negativ" wird nicht in einem moralisch-wertenden (unerwünschten) Sinn verstanden, sondern als logisches und ergänzendes Gegenstück zu einem „positiven" Wissen.

(1980, 1994) mit zwei Buchtiteln ausdrückt: *Denken, das Ordnen des Tuns*. Der konstruktivistische Mathematik-Unterricht geht von der erlebten Alltagswelt der Kinder aus und gibt ihnen Gelegenheit, darin Beziehungen herzustellen und Denkstrukturen aufzubauen.

- Wesentliche Aufgaben der Lehrerin beinhalten den Aufbau einer Lernkultur, die Gestaltung substanzieller Lernumgebungen und die Begleitung des Schülerlernens.
- Die Konstruktivität des Lernens kann in verschieden strukturierten Lernumgebungen zur Entfaltung kommen. Damit den Kindern darin ein produktives Lernen gelingt, benötigen sie unterschiedlich enge Anweisungen bzw. mehr oder weniger verbindliche Zielvorgaben.
- Damit Schüler *ihr eigenes* Wissensnetz erweitern können (vgl. Steiner, 1996), soll die Lernbegleitung an beschrittene Denk- und Lösungswege anknüpfen und neue Impulse, Fragen oder Aufträge auf Lernerfahrungen beziehen.

Untersuchungsteil A bringt in Erfahrung, inwiefern sich die Lehrerinnen in skizzierter Richtung orientieren. Die Fragen beziehen sich auf Zusammenhänge zwischen Einstellungskonzepten, Alter der Lehrerinnen, dem Lehrmittelwechsel und Kursbesuchen: „Entspricht das Einstellungskonzept der Lehrpersonen einer konstruktivistischen oder einer behavioristischen Orientierung?“ – „Lässt sich der Lehrmittelwechsel zum Zahlenbuch mit dem Einstellungskonzept oder dem Alter der Lehrerinnen begründen?“ – „Zeigen Lehrerinnen, die konstruktivistisch orientierte Kurse besuchen, ein eigenes Einstellungsprofil?“ – „Löst die Arbeit mit dem Zahlenbuch eine Veränderung der didaktischen Orientierung aus?“

Forschungsfenster B beleuchtet das didaktische Handeln der Lehrerinnen während Mathematik-Lektionen mit Erstklässlern. Sie betreffen die Lektionsgestaltung, die wahrgenommene Lehrerinnenrolle und die Qualität und Quantität von Lehrer-Schüler-Interaktionen. Schwergewichtig interessieren die verbalen Äusserungen, welche die Lehrerinnen während Stillarbeitsphasen[92] an ihre Schüler richten. Ich stelle die Frage, wie sie unterstützen, begleiten oder helfen, wenn die Schüler vor ihren Aufgaben sitzen. Die Auswertung gewinnt an Essenz, wenn wir die Daten nach dem Kriterium der *Einstellungskonzepte* und dem hauptsächlich eingesetzten *Lehrmittel* vergleichen. Aus heilpädagogischer Perspektive interessiert, inwiefern die Lernbegleitung mathematisch schwächerer und stärkerer Schüler vergleichbar ist.

---

[92] Während der Stillarbeitsphase lösen die Schüler einzeln oder in Kleingruppen Aufgaben.

Untersuchungseinheit C richtet das Augenmerk auf die Leistungsfortschritte. 30 erste Klassen führten in der ersten Schulwoche einen Vor- und Ende Schuljahr einen Nachtest durch.

5.1.2 Auswahl der Lehrpersonen und Klassen

Die *Untersuchung zum Einstellungskonzept (A)* umfasst 98 Unterstufen-Lehrkräfte, die im März und Juli 1998 bei mir Weiterbildungskurse besuchten[93] (u.a. Einführungen ins Zahlenbuch) und vorwiegend im Kanton Thurgau unterrichteten. Aus dieser Stichprobe konnte ich diejenigen 30 Lehrpersonen, welche im Schuljahr 1998/99 eine erste Klasse übernahmen, zur Durchführung des *Schüler-Vortests (C)* gewinnen[94]. 23 Lehrerinnen setzten in ihrem Unterricht hauptsächlich das Zahlenbuch ein (Treatmentgruppe) und 7 das kantonale Lehrmittel (Kontrollgruppe). Alle 30 Klassen standen auch für den Nachtest Ende Schuljahr zur Verfügung. 19 dieser Erstklass-Lehrerinnen erklärten sich bereit, an der *Videostudie (B)* teilzunehmen (12 arbeiteten mit dem Zahlenbuch, 7 mit dem Thurgauer Lehrmittel).

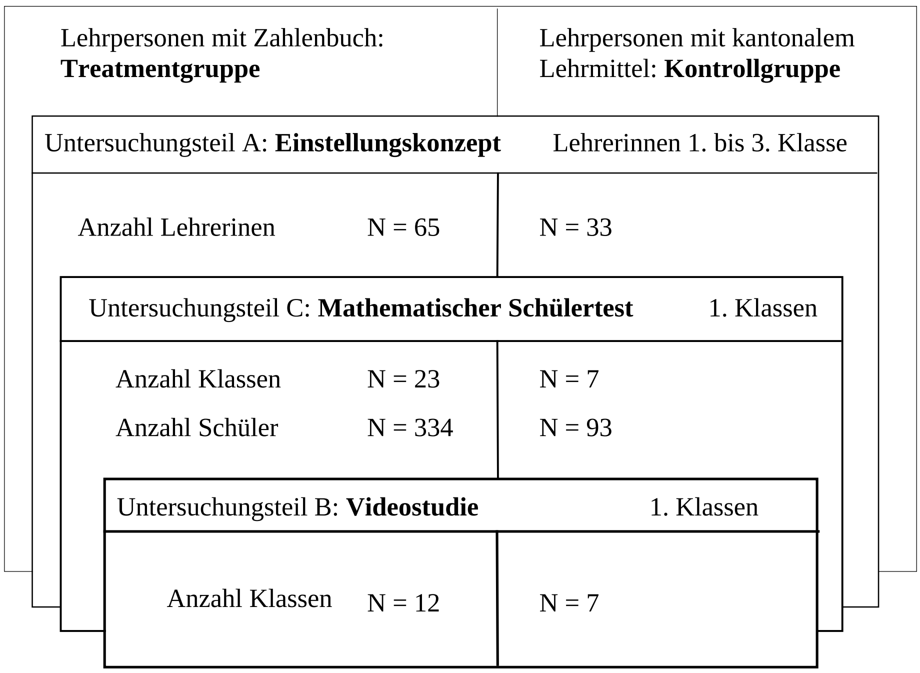


Abbildung 22: Stichproben der drei Untersuchungseinheiten, unterteilt in Treatment- und Kontrollgruppe

93 Zusätzlich gelangten einige wenige Exemplare via „zufällige Kontakte“ an Lehrerinnen.

94 Der Vortest fand während der ersten Schulwoche statt.

Abbildung 22 zeigt den Verlauf der Stichprobenziehung. Die Lehrpersonen (und deren Schüler) aus Untersuchungsteil C bilden eine Teilmenge der Stichprobe aus Einheit A und die Stichprobe aus B geht aus derjenigen von C hervor.

5.1.3 Forschungsprozess als Analyse-Interventions-Einheit

Die Auswahl der Stichproben deutet es an: Die Untersuchungseinheiten sind in einem Forschungsprozess entstanden. Nach der ersten Erhebung des Einstellungskonzeptes führten 30 Erstklass-Lehrerinnen mit ihrer Klasse den Vortest durch. Die ausgewerteten Schülertests und die Belief-Bögen bildeten drei Monate später die Gesprächsbasis für ein Problem zentriertes Interview. Im Zentrum standen Fragen nach methodisch-didaktischen Konsequenzen aus den Resultaten der Schülertests und Argumente für eher behavioristisch beurteilte Belief-Items.

Die während den Interviews erhobenen „weicheren" qualitativen Daten zur didaktischen Einstellung ergänzen die „härteren" statistischen Auswertungen (vgl. Kap. 5.2.6). Eine weitere qualitative Datenquelle nutzte ich während der Videostudie. Ein Fragebogen zur gefilmten Lektion und zum Gebrauch des Lehrmittels ergab zusätzliche Informationen über den didaktischen Kontext, in denen die erhobenen Schulstunden stehen (vgl. Kap. 5.3.7).

Die drei Forschungsfenster verstehen sich als bewusst inszenierte Analyse-Interventions-Einheiten. Die Erhebungen tragen Analysezweck und beabsichtigten, die Lehrerinnen mit ihrer Alltagsdidaktik zu konfrontieren. Dort, wo vergleichbare Bedingungen notwendig waren, stellte ich sie untersuchungstechnisch sicher: Die Interviews konnte ich mit allen 30 Lehrpersonen durchführen, die Videolektion und Fragebogen-Erhebung fand zeitgleich mit der zweiten Belief-Untersuchung statt und sollte die Ergebnisse nicht verzerren. Eine Ausnahme bildet eine Weiterbildung, die ich den Umsteigerinnen als Begleitkurs anbot, aber allen 30 Lehrpersonen offen stand. Zwei Lehrerinnen, die weiterhin mit dem TG[95]-Lehrmittel arbeiteten, besuchten ihn ebenfalls. Das Angebot zielte auf eine vertiefende Auseinandersetzung mit der Übungskonzeption des Zahlenbuchs. Es standen Selbsterfahrungen und Unterrichtsexperimente mit Übungsformaten[96] im Zentrum (vgl. Krauthausen, 1998). Die Wirkung des Kurses

---

[95] TG ist die Abkürzung für den Kanton Thurgau.

[96] Übungsformat bezeichnet eine Übungsstruktur, die inhaltlich variiert werden kann. Beim Zahlenmauern werden beispielsweise Problemstellungen und Zahlenwerte verändert, bei gleich bleibender Übungsstruktur.

wird in der Auswertung kontrolliert (vgl. Kap. 5.2.5; A5).

5.1.4 Forschungsplan

Die Umsteigerinnen mit ihren Klassen sind in den Untersuchungsteilen A und C „natürlich angefallene Stichproben“ mit spezifischen Besonderheiten (Bortz & Döring, 1995, S. 53). Zwischen den zu untersuchenden Gruppen können ungleich verteilte Unterschiede oder Störvariablen wirken, da die Auswahl der Lehrpersonen und Klassen nicht nach dem Zufallsprinzip erfolgte. Es bedarf eines quasi-experimentellen Untersuchungsplans mit eigenen Kontrolltechniken (ebd., S. 491), damit die Aussagekraft der Untersuchung nicht durch mangelnde innere und äussere Gültigkeit[97] belastet wird. Ab Messzeitpunkt t2 erfolgt in der Treatmentgruppe eine Intervention durch das Zahlenbuch, die Kontrollgruppe arbeitet weiterhin mit dem Thurgauer Lehrmittel (vgl. Abb. 23).

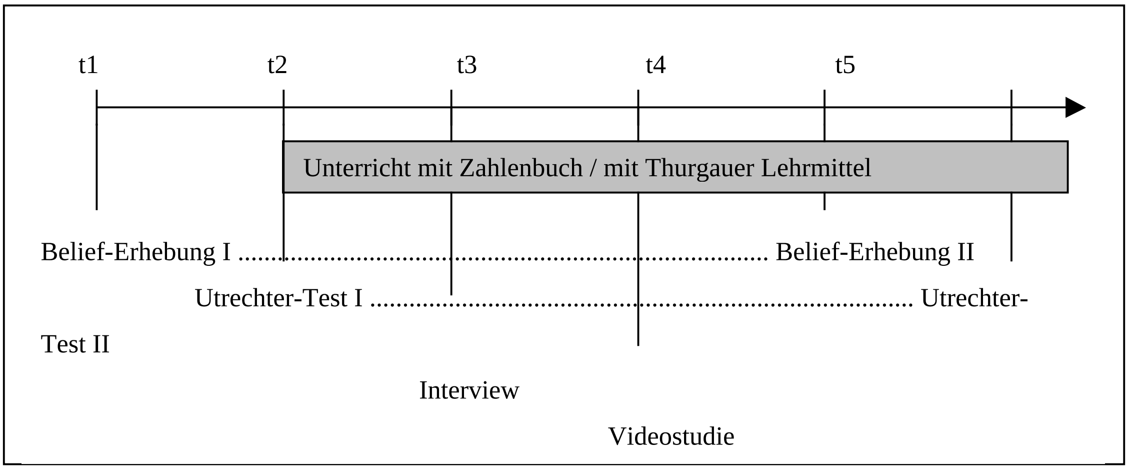


Abbildung 23: Forschungsplan

Bei den natürlich angefallenen Stichproben spielt ein Selektionseffekt: Von den anfänglich 98 Unterstufen-Lehrerinnen sagten alle 30 Erstklass-Lehrerinnen zu, die Leistungstests durchzuführen. Es erklärten sich aber „nur“ 19 Lehrerinnen bereit, für die Videostudie eine Lektion zu gestalten (alle 7 aus der Kontrollgruppe und 12 der 23 Umsteigerinnen).

[97] Die innere Gültigkeit bezeichnet, wie eindeutig ein Untersuchungsergebnis bezüglich einer geprüften Hypothese interpretierbar ist. Je mehr alternative Erklärungen auf Grund unkontrollierter Störvariablen möglich sind, desto tiefer ist die innere Gültigkeit (vgl. Bortz & Döring, 1995, S. 471). Die äussere Gültigkeit bezeichnet die Generalisierbarkeit eines Untersuchungsergebnisses auf andere Stichproben, Situationen und/oder Zeitpunkte (vgl. Bortz & Döring, 1995, S. 472).

5.2 Erhebung des Einstellungskonzepts

5.2.1 Theoretische Ausgangsbasis

Die Gestaltung des Unterrichts und die Begleitung individueller Lernprozesse hängen wesentlich von der Grundeinstellung der Lehrerin ab (vgl. Kap. 4). Durch das Forschungsfenster A werden didaktische Einstellungen von Lehrpersonen zwischen dem konstruktivistischen und dem behavioristischen Pol eingeordnet und mit modernen mathematik-didaktischen Leitlinien verglichen. Der funktionale Wert des Untersuchungsteils besteht aus drei Komponenten:

- Aus der Frage, inwiefern die konstruktivistische Orientierung der Mathematik-Didaktik einer gleich gesinnten Suchrichtung in der Praxis entspricht.
- Die Untersuchung prüft einstellungs- und altersbezogene Begründungen für einen Lehrmittelwechsel und geht dem Einfluss des Zahlenbuchs auf die Veränderung der didaktischen Einstellung nach.
- In den Forschungsfenstern B und C stützen sich einzelne Hypothesen auf die Einstellungsdaten. Sie vergleichen die unterschiedlichen Einstellungskonzepte mit den didaktischen Handlungsperformanzen der Lehrerinnen (vgl. Kap. 4.1.3 und 5.3.6) und den Leistungsfortschritten der Schüler (vgl. Kap. 5.4.6).

5.2.2 Erhebungsinstrument und Durchführung

Die Messung der Einstellungskonzepte erfolgte durch das Instrument *Einstellungen zum Mathematikunterricht* (Staub & Stern, 1998; vgl. Kap. 4.1.2 und Anhang A), das die Bewertung von 48 Glaubenssätzen auf einer fünfteiligen Rating-Skala[98] herausfordert. Item 26 lautet z.B.: *Schüler lernen Mathematik am besten, indem sie den Erklärungen der Lehrerin oder des Lehrers folgen*. Die Einschätzung der Items wird zwischen den Polen *Orientierung an einem konstruktivistischen Belief-System* und *Orientierung an einem rezeptiven bzw. behavioristischen*[99] *Belief-System* nummerisch positioniert. Aus der Gesamtheit aller beurteilten Items ergibt sich ein Mittelwert, der zwischen 1 (konstruktivistische Orientierung) und 5 (behavioristische Orientierung) liegt. Bei positiv gepolten Items entspricht A – also *sehr einverstanden* – dem Wert

---

[98] Die Stufen der Einschätzskala umfassen *A = sehr einverstanden, B = eher einverstanden, C = unentschieden, D = eher nicht einverstanden, E = überhaupt nicht einverstanden*.

[99] In Zusammenhang mit dem Messinstrument wechseln die Bezeichnungen rezeptiv und behavioristisch wahlweise. Für den theoretischen Hintergrund dieser beiden Begriffe verweise ich auf Kapitel 2.1.1.

1, dem andern Ende der Skala kommt der Wert 5 zu. Wird die Aussage im negativ gepolten Item 26 beispielsweise mit *E* – also mit *überhaupt nicht einverstanden* – beurteilt, dreht die Skala und der Einschätzung kommt der Wert 1 für eine konstruktivistische Orientierung zu. Die beiden Erhebungen erfolgten im Abstand von 15 Monaten, damit der mögliche Lehrmitteleinfluss auf Einstellungsveränderungen prüfbar wird.

In der Testinstruktion brachte ich eine Ergänzung zu derjenigen von Staub und Stern (1998) an. Sie beinhaltet, den Begriff *Textaufgaben* im Sinne *offener mathematischer Aufgaben*, *mündlicher Rechengeschichten* oder *Bildaufgaben* zu übersetzen, wenn die Beurteilung der Items dadurch leichter fällt. Die Einschätzung der Items sollte nicht durch lesetechnische Schwierigkeiten von Erstklässlern verzerrt werden. Der äusseren Gültigkeit des Messinstrumentes (Bortz & Döring, 1995, S. 472) gehe ich mit Hypothese A3 nach, Fragen der inneren Gültigkeit besprechen Staub und Stern (1998).

5.2.3 Stichprobe

Zum Zeitpunkt t1 betrug die Rücklaufquote der 105 versandten Bögen 100% (Retournierung während Einführungskursen zum Zahlenbuch). Die Daten der Lehrpersonen aus pädagogisch-therapeutischen und heilpädagogischen Berufen wurden ausgeschlossen, damit die Stichprobe bezüglich Ausbildung und Berufsfeld vereinheitlicht vorliegt. Das Altersspektrum der verbleibenden 98 Lehrpersonen reichte von 21 bis 56 Jahren. In der Stichprobe spiegelt sich der hohe Frauenanteil auf der Elementarstufe: 90 sind weiblichen, 8 männlichen Geschlechts. Die Rücklaufquote bei der zweiten Erhebung fiel mit 85% etwas tiefer aus: Von den 105 verschickten Tests kamen 81 vollständig beantwortet zurück.

5.2.4 Hypothesen zum Untersuchungsteil A

Der Wechsel auf ein neues Lehrmittel kann unterschiedlich motiviert sein und muss nicht mit dessen didaktischer Philosophie korrespondieren. Ich nehme dennoch an, dass sich der Umstieg aufs Zahlenbuch durch ein konstruktivistisches Einstellungskonzept begründen lässt:

Hypothese A1

Die Umsteigerinnen orientieren sich vor dem Lehrmittelwechsel konstruktivistischer als Lehrpersonen, die weiterhin mit dem kantonalen Lehrmittel arbeiten.

Eine zweite Frage betrifft den Zusammenhang zwischen dem Alter der Lehrerinnen und ihrem Einstellungskonzept. Ich nehme bei den jüngeren Lehrkräften eine konstruktivistischere Einstellung an, da sie während der eigenen Schul- und Studienzeit eher schülerorientierte Lernformen kennen lernten als ältere. Die zu unterschiedlichen Zeitpunkten gewonnenen Unterrichtsbilder (Meyer, 1987b, S. 27-41) dürften sich im Einstellungskonzept niederschlagen:

Hypothese A2

Die didaktische Einstellung jüngerer Lehrpersonen unterscheidet sich zum Messzeitpunkt t1 von älteren durch eine stärkere konstruktivistische Orientierung.

Falls sich die Hypothesen A1 und A2 bewähren, müssten die Umsteigerinnen durchschnittlich jünger sein als die Lehrerinnen der Kontrollgruppe.

In den schriftlichen Kursevaluationen[100] beantworteten die Lehrpersonen die Frage, ob sie in den letzten beiden Jahren Kurse besuchten, die bezüglich Lehren und Lernen in eine ähnliche Richtung weisen[101] wie der didaktische Kommentar des Zahlenbuchs:

Hypothese A3

Lehrpersonen, die vor dem Zeitpunkt t1 *konstruktivistisch orientierte* Weiterbildungskurse besuchten, sind konstruktivistischer orientiert als solche ohne entsprechenden Besuch.

Die nächsten beiden Hypothesen gehen der Veränderung der Belief-Systeme zwischen den Messzeitpunkten t1 und t5 nach. Die Intervention besteht bei den Umsteigerinnen aus der unterrichtlichen Arbeit mit dem Zahlenbuch, während die Kontrollgruppe weiterhin mit dem kantonalen Lehrmittel arbeitet. Die Lehrerinnen wählten das neue Lehrmittel selber aus[102], es bestanden keine fremdinstanzlichen Vorschriften. Der selbstinitiierte Lehrmittelwechsel lässt vermuten, dass eine allfällige Veränderung des Einstellungskonzepts bei den Umsteigerinnen in Richtung Konstruktivismus zeigt:

---

[100] Die meisten Lehrpersonen besuchten bei mir einen Weiterbildungskurs (vgl. Kap. 5.1.3). Einzelne Lehrerinnen befragte ich mündlich.

[101] Zu den konstruktivistisch eingeschätzten Kursen gehörten z.B. solche zum Spracherfahrungsansatz *Lesen durch Schreiben* oder von Ruf und Gallin, *Schlüsselerlebnisse in Sprache und Mathematik* (vgl. Kap. 2.3.1).

[102] Die Selbstbestimmung trifft für die Umsteigerinnen weitgehend zu, für die Kontrollgruppe weniger. Der höhere Preis des Zahlenbuches schränkte einzelne Lehrerinnen ein, es anzuschaffen. Zudem hat die Schuldirektion des Kantons Thurgau den unterrichtlichen Gebrauch an einen obligatorischen Einführungskurs gebunden.

Hypothese A4

Umsteigerinnen verändern ihr Einstellungskonzept in konstruktivistischer Richtung.

Eine Bestätigung der Hypothese gäbe Aufschluss über die didaktische Suchrichtung der Umsteigerinnen. Falls keine Unterschiede zwischen den beiden Messzeitpunkten nachweisbar sind, könnte dies für die innere Gültigkeit des Messinstrumentes oder die Stabilität der Einstellungskonzepte sprechen:

Hypothese A5

Die Umsteigerinnen und die Lehrkräfte der Kontrollgruppe verändern ihre didaktische Einstellung zwischen den Messzeitpunkten t1 und t5 unterschiedlich. Die Veränderung verläuft bei der ersten Gruppe stärker in konstruktivistischer Richtung als bei der zweiten.

Wenn das Lehrmittel als Treatment gilt, so ist für die Kontrollgruppe keine Veränderungsprognose zu stellen, da sie keinen Wechsel vornahm und ihr Treatment unverändert blieb.

5.2.5 Statistische Hypothesenprüfung

Die Hypothesenprüfungen erfolgen mit zwei verschiedenen Stichprobengrössen: mit den 30 Erstklass-Lehrerinnen als Teilstichprobe und der Gesamtstichprobe von 98 Unterstufen-Lehrpersonen[103]. Die doppelte Auswertung ist notwendig, weil die Ergebnisse der kleinen Stichprobe in die Studien B und C einfliessen.

A1; t1 Ist die konstruktivistische Orientierung bei Umsteigerinnen ausgeprägter?[104]

Die unabhängige Variable besteht aus dem Lehrmittel, mit der dichotomen[105] Ausprägung *Zahlenbuch* und *traditionelles Lehrmittel*. Die abhängige Variable beinhaltet die gemessenen Werte des Einstellungskonzeptes zum Zeitpunkt t1. Bei den Umsteigerinnen mit ersten Klas-

[103] Bzw. mit 81 bei der zweiten Erhebung (vgl. Kap. 5.2.3).

[104] Die Nummerierung A1 bis A5 entspricht derjenigen der Hypothesen. Die Abkürzungen t1 und t5 geben an, zu welchem Messzeitpunkt die Datenerhebung erfolgte (t1 = März 1998, t5 = Mai 1999). Die Überschriften der Hypothesenprüfungen fassen die Hypothesen in Frageform zusammen.

[105] Eine Variable ist dichotom, wenn sie zwei Ausprägungen aufweist. Das Lehrmittel ist eine natürliche dichotome Variable. In Hypothese A2 ist die Dichotomie künstlich, weil der Mediansplit das Alter der Lehrpersonen in zwei Gruppen teilt (vgl. Bortz & Döring, 1995, S. 613).

sen liegt der Mittelwert bei 1.96 (*SD* = 0.37, *n* = 23) und bei der Kontrollgruppe bei 2.29 (*SD* = 0.34, *n* = 7). Die Erstklass-Lehrerinnen, welche auf das Zahlenbuch umstiegen, orientierten sich zum Zeitpunkt t1 signifikant konstruktivistischer als ihre Kolleginnen, welche weiterhin mit dem traditionellen Lehrmittel unterrichteten [*t* (28) = -2.07, *p* = .048 < .05[106]].

Bei Einbezug aller Unterstufen-Lehrerinnen besteht zwischen den Mittelwerten der Treatmentgruppe mit 2.05 (*SD* = 0.40, *n* = 65) und der Kontrollgruppe mit 2.15 (*SD* = 0.37, *n* = 33) kein signifikanter Unterschied [*t* (96) = -1.28, *p* = .20 > .05].

A2; t1 Sind jüngere Lehrerinnen konstruktivistischer orientiert als ältere?

Das Alter der Lehrpersonen wird künstlich dichotomisiert. Die Einteilung erfolgt über den *Mediansplit*, also durch Bildung zwei gleich grosser Gruppen nach dem Kriterium *Alter*. Die 15 jüngeren Erstklass-Lehrerinnen haben zum Zeitpunkt t1 ein Alter zwischen 23 und 36 Jahren (*M* = 29.5), die älteren zählen zwischen 37 und 53 Jahre (*M* = 45). Die Mittelwerte der Einstellungskonzepte liegen mit 2.08 (*SD* = 0.46) und 2.00 (*SD* = 0.31) nahe zusammen, wobei die Jüngeren entgegen der hypothetischen Annahme eine leicht ausgeprägtere behavioristische Orientierung zeigen. Der t-Test für unabhängige Stichproben weist keinen Unterschied zwischen den beiden Gruppen nach [*t* (28) = .60, *p* = .56 > .05], die Ausprägung der Einstellungskonzeptes ist bei den Erstklass-Lehrerinnen also nicht altersabhängig.

Auch die Mittelwerte der Gesamtstichprobe unterscheiden sich mit 2.09 (*SD* = 0.35) und 2.07 (*SD* = 0.43) kaum [*t* (96) = .24, *p* = .81 > .05], die Hypothese hat sich somit nicht bewährt.

Das Alter der Umsteigerinnen beträgt zum Zeitpunkt t1 durchschnittlich 34.8 Jahre (*SD* = 10.1, *n* = 65) und dasjenige der Kontrollgruppe 36.0 (*SD* = 10.8, *n* = 33). Die Nebenfrage, ob der Lehrmittelwechsel altersabhängig sei, kann verneint werden (*U* = 1 012.5, *p* = .65 > .05). Der verteilungsfreie U-Test von Mann-Withney kommt zur Anwendung, weil die jüngeren Lehrkräfte in beiden Gruppen übervertreten sind.

[106] Das a priori Alpha-Niveau aller Hypothesentests wird auf *p* = .05 festgelegt. Darüber liegende Werte weisen nach, dass auf Grund der Daten keine Unterschiede, Veränderungen oder Zusammenhänge (Interaktionen, Korrelationen) festgestellt werden.

A3; t1 Besuchten konstruktivistisch orientierte Lehrerinnen entsprechende Weiterbildungskurse?

Die unabhängige Variable liegt durch Besuch oder Nichtbesuch eines konstruktivistisch orientierten Weiterbildungskurses dichotom vor. Unter den Erstklass-Lehrerinnen besuchten 18 einen solchen und 12 keinen. Der Mittelwert des gemessenen Einstellungskonzeptes liegt bei den Kursbesucherinnen bei 1.97 (SD = 0.40) und derjenige der Lehrerinnen ohne Kursbesuch bei 2.14 (SD = 0.35). Auf der Basis des t-Testes für unabhängige Stichproben lassen sich zwischen den beiden Gruppen der Erstklass-Lehrerinnen keine signifikanten Unterschiede im Einstellungskonzept nachweisen [t (28) = 1.16, p = .25 > .05].

In der Gesamtstichprobe wird das Resultat allerdings nicht bestätigt. Der durchschnittliche Wert des Einstellungskonzeptes der 54 Kursbesucherinnen liegt bei 1.99 (SD = 0.40), derjenige der 44 Lehrerinnen ohne Besuch bei 2.20 (SD = 0.35). Die Prüfung weist zwischen den beiden Gruppen einen signifikanten Unterschied nach [t (96) = -2.68, p = .01 < .05]. Die Lehrkräfte der Unterstufe, welche vor dem Zeitpunkt t1 konstruktivistisch orientierte Weiterbildungskurse besuchten, orientieren sich an einem konstruktivistischeren Einstellungskonzept als Lehrpersonen ohne solche Kursbesuche.

A4; t1/t5 Wird das Einstellungskonzept der Umsteigerinnen konstruktivistischer?

Der Mittelwert des Einstellungskonzeptes der Erstklass-Lehrerinnen, welche auf das Zahlenbuch wechselten, liegt zum Zeitpunkt t1 bei 1.96 (SD = 0.37) und zum Zeitpunkt t5 bei 1.93 (SD = 0.34). Der t-Test für abhängige Stichproben weist zwischen der ersten und der zweiten Erhebung keine signifikanten Unterschiede nach [t (22) = -.52, p =.61 > .05]. Das Ergebnis deutet zusammen mit der Korrelation zwischen den Einstellungswerten beider Messzeitpunkte auf ein stabiles Einstellungskonzept bei den Umsteigerinnen der kleinen Stichprobe hin (r = .58, p = .00 < .05).

Bei Einbezug der Umsteigerinnen der Gesamtstichprobe wird das Ergebnis bestätigt [t (53) = -1.17, p = .25 > .05]. Der Mittelwert des Einstellungskonzeptes zum Zeitpunkt t1 liegt mit 2.05 (SD = 0.41) nahe bei demjenigen zum Zeitpunkt t5 mit 2.00 (SD = 0.40). Auch die Umsteigerinnen der Gesamtstichprobe zeigen ein stabiles Einstellungskonzept (r = .64, p = .00 < .05).

A5 t1 / t5: Verändern Umsteigerinnen ihre didaktische Einstellung stärker in eine konstruktivistische Richtung als Lehrpersonen der Kontrollgruppe?

Die Prüfung der Veränderungshypothese erfolgt durch eine MANOVA mit Messwiederholung, da die Interaktion zwischen dem Gruppenfaktor (durch Lehrmittel bestimmt) und dem Messwiederholungsfaktor (t1 und t5) interessiert. In die Hypothesenprüfung ist ausschliesslich die Gesamtstichprobe einbezogen, da die Anzahl der Erstklass-Lehrerinnen dafür zu klein wäre. Zudem könnten die verschiedenen Interventionen bei den Erstklass-Lehrerinnen den Effekt des Lehrmittels als Gruppenfaktor stören.

Die Prüfung weist eine schwache Interaktion zwischen den Lehrmitteln nach [F (79) = 2.59, p = .11 > .05]. Die Veränderung des Einstellungskonzeptes zwischen den beiden Messzeitpunkten hängt somit kaum vom hauptsächlich eingesetzten Lehrmittel ab.

Prüfung untersuchungsbedingter Interventionseffekte

Die Interventionen bei den Erstklass-Lehrerinnen stören das Ergebnis des ausbleibenden Treatmenteffektes nicht: Bei den Umsteigerinnen beträgt der Anteil der in Interventionen einbezogenen Erstklass-Lehrerinnen 43%, in derjenigen der Kontrollgruppe 26%. Ich vermute, dass die Interventionen die Veränderung der didaktischen Einstellung allenfalls in konstruktivistischer Richtung beeinflussen würde.

Zur Prüfung der interventionsbedingten Störvariablen vergleiche ich die Veränderung des Einstellungskonzeptes der 30 Erstklass-Lehrerinnen (bei denen mit Schülertests, Begleitkurs, Interview, Videoaufnahme und Fragebogen zusätzliche Interventionen zu den Belief-Erhebungen erfolgten) mit derjenigen der übrigen 51 Unterstufen-Lehrerinnen. Die MANOVA mit Messwiederholung weist keine Interaktion zwischen dem Gruppenfaktor und den Messzeitpunkten nach. Die Gesamtheit der Interventionen in der kleinen Stichprobe beeinflusste die Veränderung des Einstellungskonzeptes nicht [F (79) = 0.41, p = .52 > .05].

Kontrollprüfung

Es erfolgt eine nochmalige Prüfung der Hypothese A1, diesmal mit den Daten aus der zweiten Erhebung (t5). Die Frage lautet: „Unterscheiden sich die beiden Gruppen der Erstklass-Lehrerinnen auch bei der zweiten Erhebung bezüglich didaktischer Orientierung?“ – Die Treatmentgruppe der Erstklass-Lehrerinnen erreicht einen Mittelwert von 1.93 (SD = 0.34) und die Lehrerinnen der Kontrollgruppe einen solchen von 2.39 (*SD* = 0.66). Die Prüfung mittels t-Test für unabhängige Stichproben weist einen signifikanten Unterschied des Einstellungskonzeptes nach [t (28) = -2.50, p = .02 < .05]. Die Umsteigerinnen unter den Erstklass-Lehrerinnen orientierten sich also auch am Ende des Schuljahres konstruktivistischer als die Lehrpersonen der Kontrollgruppe (zur Erinnerung: Zum Zeitpunkt t1 beträgt die Signifikanz p = .048; vgl. Hypothese A1).

Das Resultat kann bei Einbezug aller Unterstufen-Lehrerinnen – wie bei Hypothese A1 – nicht bestätigt werden: Der Mittelwert der Treatmentgruppe liegt bei 2.00 (*SD* = 0.40, n = 54) und derjenige der Kontrollgruppe bei 2.16 (*SD* = 0.44, n = 27). Zwischen den beiden Gruppen besteht auch am Ende des Schuljahres kein signifikanter Unterschied im Einstellungskonzept (U = 601.0, p = .20 > .05).

5.2.6 Lehrerinnen begründen ihre abgegebenen Urteile

Die ermittelten Zahlenwerte sind abstrakt und lassen formale Aussagen zu Rangpositionen oder Mittelwerten und Tendenzen der Art *x ist konstruktivistischer orientiert als y* zu. Eine quantitative Messung und Auswertung kann nicht erhellen, was die Lehrerinnen zu den einzelnen Items des Messinstrumentes denken. Mit der qualitativen Ergänzung möchte ich erfahren, warum die Lehrerinnen einzelne Glaubenssätze eher in eine behavioristische Richtung beurteilten. Die Zusatzstudie trägt die Funktion, die Einstellungskonzepte der Lehrerinnen mit Argumenten zu belegen und die Sensitivität des Messinstrumentes *Einstellungen im Mathematikunterricht* (Staub & Stern, 1998) zu dokumentieren. Die konkrete Frage lautet: Begründen die Lehrerinnen eher behavioristisch beurteilte Items auch in dieser Richtung oder liegen die Begründungen auf alternativen Dimensionen?

5.2.6.1 Durchführung der Interviews

Die 30 Erstklass-Lehrerinnen wurden in einem problemzentrierten Interview (Lamnek, 1995, S. 74) mit den Items konfrontiert, welche sie zum Zeitpunkt t1 zwei und mehr Einheiten abweichend vom konstruktivistischen Skalenpol beurteilten. In Abbildung 24 sind zwei Beispiele dargestellt: die Einschätzung des Items 13 und des umgepolten Items 7.

Die Beurteilung *überhaupt nicht einverstanden (E)* entspricht bei Aussage 7 dem konstruktivistischen und *sehr einverstanden (A)* dem behavioristischen Pol der Rating-Skala. Lehrpersonen, die das Item mit A bis C beurteilt hatten, nahmen Stellung zu ihrem Urteil. Beim positiv gepolten Item 13 liegt die konstruktivistische Bewertung auf der andern Seite, also bei *sehr einverstanden (A),* und die Beurteilungen von C bis E lösten Gespräche aus.

Die standardisierte Frage lautete jeweils: „*Kannst du mir erklären, warum du diese Aussage so angekreuzt hast?*“ Der Interviewer las das Item vor, nannte die abgegebene Beurteilung und wies die Lehrerinnen darauf hin, dass sie ihre schriftlich fixierte Meinung revidieren dürfen.

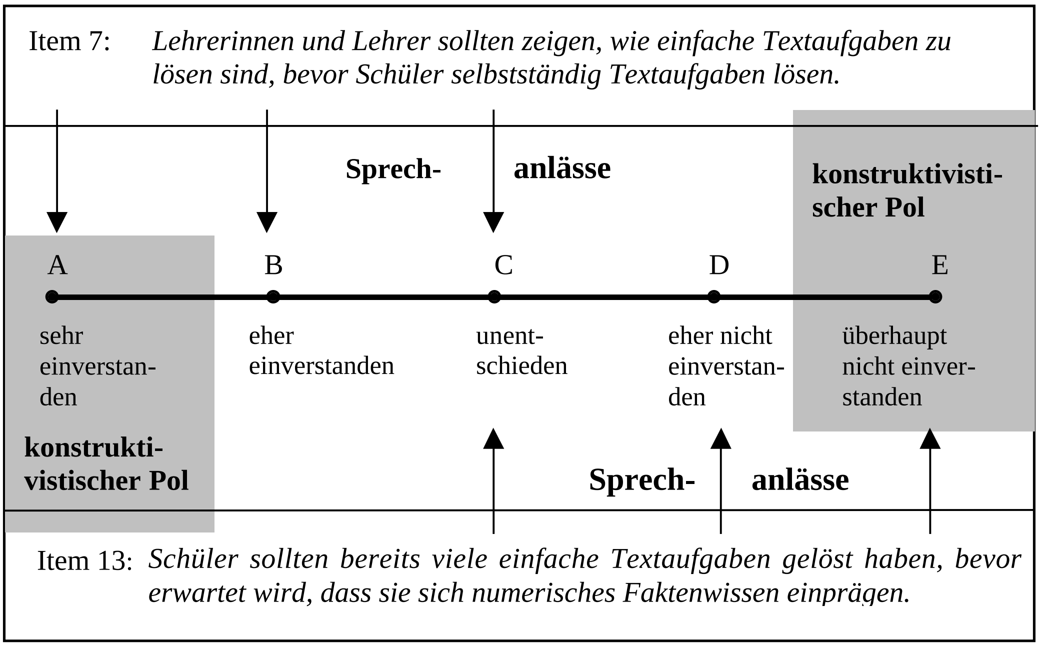


Abbildung 24: Beurteilungen von didaktischen Glaubenssätzen, die während dem Interview zu Sprechanlässe führten, am Beispiel zweier verschieden gepolter Items.

Die Aufzeichnung der ca. 30 Minuten dauernden Interviews erfolgte mit einem Diktafon. An dieser Stelle ziehe ich lediglich den inhaltlich relevanten Interview-Ausschnitt heran. Die Auswertung einer weiteren Interview-Passage (zu didaktischen Konsequenzen aus den Resultaten der Schülertests) beschreibt Kapitel 5.4.8.

Die Durchführung und Auswertung der Interviews wird der intersubjektiven Nachvollziehbarkeit und Objektivität durch eine theoriegeleitete Vorgehensweise gerecht.

5.2.6.2 Auswertungsmethode

Die Transkriptionen erfolgten durch eine Übersetzung vom Dialekt in eine leserliche schriftdeutsche Sprache (vgl. Mayring, 1997, S. 71).

> Um mehr Lesbarkeit zu erreichen, muss man sich (...) stärker vom gesprochenen Wort wegentfernen. Die Übertragung in normales Schriftdeutsch ist dabei die weitestgehende Protokolltechnik. Der Dialekt wird bereinigt, Satzbaufehler werden behoben, der Stil wird geglättet. Dies kommt dann in Frage, wenn die inhaltlich-thematische Ebene im Vordergrund steht. (Mayring, 1996, S. 70)

In einem weiteren Arbeitsschritt folgte eine erste Paraphrasierung nach den von Mayring (1997, S. 62) beschriebenen Z1-Regeln. Durch Streichung nicht inhaltstragender Textstellen oder Wiederholungen und der Übersetzung auf eine grammatikalische Kurzform liessen sich die gröberen inhaltlichen Ballaste abwerfen. Nach dieser Datenreduktion lagen einheitlich geordnete und auf den substanziellen Kern reduzierte Interview-Ausschnitte vor.

Die Textstellen wurden mittels Makrooperatoren einer zweiten Paraphrasierung unterzogen, d.h. durch Vereinheitlichung des Abstraktionsniveaus (Z2) und Reduktion durch Selektion (Streichen bedeutungsgleicher Paraphrasen; Z3). Es folgte eine letzte Zusammenfassung durch Konstruktion und Integration (Z4-Regeln): Paraphrasen mit ähnlichem Inhalt fanden Zusammenschluss in einer neu konstruierten Kurzform.

Die als sprachliche Konzentrate vorliegenden Ergebnisse der Interviews fasse ich nun auf induktivem Weg zu Kategorien zusammen.

5.2.6.3 Ergebnisse

In Tabelle 8 sind die Items aufgelistet, die während den Interviews zu Gesprächen führten. Daraus geht hervor, dass ...

- die Lehrerinnen 14 Items geschlossen konstruktivistisch einschätzten, d.h. sie wichen vom entsprechenden Pol höchstens einen Skalenwert ab.
- bei 28 Items eine bis 7 Lehrerinnen in behavioristischer Richtung ankreuzten, so dass die Beurteilung eine Begründung verlangte.
- bei 6 Items 8 bis 26 Lehrerinnen gebeten wurden, ihr Urteil zu erklären.

Tabelle 8: Zusammenstellung der Items, welche die Erstklass-Lehrerinnen auffallend behavioristisch beurteilten

Anzahl behavioristische Argumentationen[a]	Item-Nummer[b]
geschlossen konstruktivistisch	2, 20, 21, 23, 27, 28, 32, 36, 37, 40, 41, 43, 47, 48[c]
1 bis 7	12, 26, 30, 33, 39, 44, 46, 4, 6, 9, 35, 1, 10, 14, 17, 19, 24, 25, 31, 45, 11, 22, 29, 42, 15, 3, 7, 13[c]
8 bis 26	16, 18, 38, 5, 34, 8

Anmerkungen: [a] Jede Abweichung von 2 und mehr Einheiten vom konstruktivistischen Pol der Rating-Skala führte zu einem Gespräch. [b] Die Items sind nach aufsteigender Häufigkeit der Besprechungen geordnet. [c] Die Item-Aussagen können dem Messinstrument in Anhang A entnommen werden**.**

Die folgende Auswertung bezieht sich auf diejenigen sechs Items, welche am häufigsten zu einem Sprechanlass führten. *Alle* inhaltlich eigenständigen Argumente sind als kursiv gekennzeichnete Paraphrasen – dem Textfluss angepasst – in die Begründungskategorien integriert. Ähnliche Argumente spiegeln sich in den Häufigkeitsangaben und stellen die quantitative Bedeutung einer Antwortkategorie sicher. Da mehrere Antworten möglich waren, entsprechen die Häufigkeiten nicht der angegebenen Anzahl Lehrpersonen (*n*). Die Lehrerinnen begründeten ihre behavioristisch orientierten Item-Urteile mit sechs Argumentationstypen[107]:

Tabelle 9: Begründungskategorien der Item-Beurteilungen

• mangelndes Verstehen der Aussage	• Sprachprobleme (Fremdsprachigkeit)
• subjektive Interpretationen des Items	• Aspekte zum aktiv-entdeckenden Lernen
• das Argument *schwächerer Rechner*	• behavioristische Orientierung

8. *Die Beachtung von Schlüsselwörtern (z.B. „mehr“) ist für die Schüler eine grosse Hilfe, um Textaufgaben zu lösen.* (n = 26)[108]

Schlüsselwörter sind im Sinne von Reizwörtern gemeint, die beim Schüler eine konditionierte Reaktion in Form eines Rechenprozederes auslösen. Die Beurteilung *sehr einverstanden* wird einem behavioristischen und *überhaupt nicht einverstanden* einem konstruktivistischen Ein-

[107] Nicht klassifizierte Paraphrasen erscheinen jeweils am Schluss als Sammlung vereinzelter Aussagen.

[108] Neben der Item-Nummer und -Aussage gibt der Klammerinhalt jeweils die Anzahl der Gespräche an.

stellungskonzept zugeordnet.

- Lehrpersonen geben als Grund für ihre Einschätzung an, die *Aussage nicht verstanden* oder *‚Schlüsselwörter' nicht verstanden* zu haben.
- 15 Argumente beinhalten eine *subjektive Interpretation* des Begriffes *Schlüsselwörter*. Die Lehrerinnen deuten diese *im Sinne eines operativen Verstehens*, *eines Begriffsaufbaus*, *einer erarbeiteten Vorstellung*, *als sprachlichen oder bildlichen Ausdruck eines mathematischen Kerns*. Die Interpretations-Argumente versuchen das Item zu rechtfertigen und weisen dadurch eher auf die rezeptive Seite *sehr einverstanden (A)*. Inhaltlich sind den Argumenten aber kaum solche Motive zu entnehmen.
- 6-mal lautet die Begründung, *diese Aussage gelte für schwächere Schüler und Schülerinnen, nicht jedoch für die stärkeren*.
- 2 Lehrpersonen erklären, das Urteil sei wegen *fremdsprachigen Kindern entsprechend anders ausgefallen* bzw. die *Schlüsselwörter seien nicht im Aktivwortschatz.*
- 6 Aussagen lassen sich unter dem Aspekt *aktiv-entdeckenden Lernens* zusammenfassen. Ein Ankerbeispiel aus dem Interview-Transkript von Lehrerin L7[109] – welche *unentschieden* ankreuzte – veranschaulicht die Antwortkategorie:

  > Im Thurgauer Lehrmittel hat irgendwo gestanden, dass man sich diese Wörter miteinander genauer anschauen müsse oder so. (...) Und ich probierte das halt eben einmal aus und musste dann halt einfach sagen: Also für mich hat es nicht viel gebracht. Am Anfang, so als Junglehrerin gibst du doch einfach einmal ein Blatt hin und schaust einmal was passiert. Und je mehr dass [du die Erfahrung gemacht hast], ja dann hast du die eben schon einmal gemacht und dann hast du es gewusst, au, dort sind sie gestrauchelt und das konnten sie nicht und dann hast du eben das Gefühl, du könntest das irgendwie umgehen. Dabei müssen sie diese Fehler selber machen. Oder es gibt auch solche, die mich auch schon erstaunt haben, da musste ich also sagen, das musst du gar nicht aus dem Weg räumen, die können das also selber. (L7;369-378)

  Das Zitat von L7 führt die Liste zum aktiv-entdeckenden Lernen mit dem Argument an, es sei *ein Irrtum, Klippen vom Berg abzubauen.* Zwei weitere Äusserungen runden das Bild dieser Kategorie ab: *Schüler sollen Textaufgaben selbstständig lösen* und *die Lehrperson*

[109] Die Kennzeichnung der Lehrpersonen zieht sich als anonyme Identifizierung durch die ganze Arbeit.

soll keine Rezepte geben, sondern Schüler selber entdecken lassen. Auch hier fällt auf, dass die Begründung des behavioristischen Urteils mit konstruktivistisch interpretierbaren Argumenten erfolgt.

- 5 Aussagen sind *behavioristisch ausgerichtet*: *Schüler verstehen geübte Schlüsselwörter* und *die Lehrperson übt häufig Schlüsselwörter* (allerdings ist unklar, was mit *Üben* gemeint ist). Eindeutiger behavioristisch orientiert ist die Aussage, die *Lehrerin weise die Schüler explizit auf Schlüsselwörter hin* und *bringe wiederholt gleiche Schlüsselwörter.*
- Einige Lehrerinnen modifizierten die Beurteilung des Items nach Klärung des Inhaltes.

Die Argumente können nicht als Verteidigung einer behavioristischen Orientierung ausgelegt werden, sie weisen ebenso in die konstruktivistische Richtung. Ich schlage ein Überdenken der Aussage 8 vor, da beinahe ein Viertel der Lehrerinnen den Inhalt nicht verstanden hat.

34.	*Lehrerinnen und Lehrer sollten Schülern, die Schwierigkeiten mit dem Lösen einer Textaufgabe haben, zeigen, wie die Aufgabe zu lösen ist.*	(n = 17)

Das Item wird mit *überhaupt nicht einverstanden* konstruktivistisch beurteilt, da die Schüler an Schwierigkeiten stossen und durch aktives Suchen selber passende Wege finden sollen.

- Eine Lehrperson gibt an, die *Aussage nicht verstanden* zu haben.
- 7 Lehrerinnen erklären, was sie unter *zeigen* verstehen: *Zeigen heisst nicht, ein Rezept geben* und *ist kein Frage-Antwort-Spiel,* sondern *eher im Sinne von allgemeine Hinweise geben* gemeint. Die Vorschläge beginnen mit *Schüler und Lehrer zeigen einander Möglichkeiten auf, ebenso Schüler untereinander* und *die Lehrperson zeigt es nicht sofort, sondern erst wenn Schüler scheitern* und *keine neuen Wege mehr suchen.* Eine Lehrerin begründet die mit *eher einverstanden* beurteilte Aussage in entgegengesetzter Richtung. Sie argumentiert, dass *Schwierigkeiten oder das Verständnis bei den Schülern nachgefragt werden müssen* und schliesst mit der Bemerkung ab, dass *Tipps oder Rezepte geben nutzlos* sei.
- 8 Argumente beziehen sich auf *schwächere Rechner*. Sie sagen aus, *die Lehrerin müsse den Schwächeren zeigen, wie es geht.* Mit andern Worten: Sie soll *ihnen eine Hilfsstruktur geben* bzw. sie *auf eine Spur weisen. Schwache Schüler brauchen ein Schema, können* also *nicht selber entdecken.* Sie *müssen lediglich Rezepte verstehen und durchführen.*

- 5 Aussagen gehören in die Kategorie *Sprachverständnis* oder *Fremdsprachigkeit*. Die Begründungen lauten: *Nur ohne Sprache ist das eigene Lösen möglich* oder *Schüler verstehen Textaufgaben aus sprachlichen Gründen nicht. Zeigen* wird auch subjektiv interpretiert: *Fremdsprachigen Schülern muss eine Hilfe für das Sprachverständnis angeboten werden.*

- 5 Argumente sind auf *aktiv-entdeckendes Lernen bezogen*. Sie beinhalten: *Die Schüler* können *ihren Weg mit einer Anleitung selber entdecken* bzw. *sie müssen das Aufgabenverständnis selber erarbeiten*. *Nicht nur gute Schüler* können *selber probieren und studieren.*

- 6 Argumente weisen entsprechend der Beurteilung auf dem Testblatt in eine *behavioristische Richtung*. Die Stellungnahmen beinhalten: *Wenn es nicht geht, zeigt es der Lehrer. Viele Lösungsmöglichkeiten verwirren die Schüler, deshalb üben wir nur einen Lösungsweg.* Ebenfalls in diese Argumentationslinie fällt die Aussage, dass *die Lehrerin die Rechnung diktiert und zeigt wie sie geht, die Schüler schreiben diese auf und lösen anschliessend analoge Aufgaben.* Eine Lehrerin formuliert noch deutlicher, dass *die Schüler auch ohne Verstehen reproduzieren können.* Schliesslich fällt die Bemerkung, *die Lehrerin müsse lediglich gute Rezepte geben, welche die Schüler befolgen.*

- 3 Begründungen ordne ich keiner Kategorie zu: *Vorgelesenes verstehen die Schüler besser als selber Gelesenes*, *das Lösungsprozedere ist sekundär* und *Fehler sind nicht schlimm.*

---

5. *Lehrerinnen und Lehrer sollten für das Lösen von Textaufgaben detaillierte Vorgehensweisen vermitteln.* (n = 9)

Die Ablehnung dieser Aussage entspricht einer konstruktivistischen Position, die Zustimmung einer behavioristischen. Die Lehrerinnen begründeten, warum sie die Vermittlung detaillierter Vorgehensweisen eher bejahen:

- Es werden keine *Verständnisschwierigkeiten* oder *Interpretations-Argumente* angeführt.

- 3 Aussagen beziehen sich auf das *Argument „schwächere Rechner“*: *Schwache Schüler brauchen Hilfe, sie müssen Wegweiser erhalten* und *schwache Schüler sind überfordert.*

- Eine Begründung liegt seitens *fremdsprachiger Kinder* vor: *Fremdsprachige Kinder können sich an etwas halten,* wenn sie detaillierte Vorgehensweisen vermittelt bekommen.

- 6 Argumente zählen zum *aktiv-entdeckenden Lernen*: *Den Kindern sollen möglichst wenig Einschränkungen geben werden,* denn *nicht nur starke Schüler können selber probieren* und *eigene Denkwege gehen. Die Lehrerin soll die Lösungswege des Schülers nachfragen.*
- 2 Aussagen sind *behavioristisch orientiert*: *Die Lehrerin gibt Tipps* und *ein verbindliches Rezept, wie Textaufgaben zu lösen sind.*

  Das letzte Argument kommt im Transkriptausschnitt deutlicher zum Ausdruck:

  > Wenn wir mit den Textaufgaben anfangen, dann erzähle ich jeweils zuerst Geschichten, Rechnungsgeschichten sage ich denen. (...) Und dort zeige ich ihnen: Wie geht man das jetzt an? – Also, *Rezept*: 1. Lesen. 2. Man übersetzt es auf Schweizerdeutsch, weil sonst kommt die Hälfte ja nicht draus, also das muss man machen. 3. Beim (...) Lehrmittel steht nicht einmal die Frage, meistens. 4. Man überlege sich, was man überhaupt herausfinden möchte. Also: Man schreibt die Frage auf. Ein schön rotes *F*, Doppelpunkt, dann schreiben wir die Frage auf. Mit dem Fragezeichen und so. Gut. Jetzt, was muss man rechnen? Nachher rechnet man es, schreibt man *R*, nachher rechnet man es. Und jetzt, am Schluss gibt es noch einen Antwortsatz, da machen wir ein *A*, und nachher schreiben wir einen Antwortsatz und <u>so</u> muss man bei <u>mir</u> Textaufgaben lösen. Bis Ende dritter Klasse. Und ich hatte vorher vierte, fünfte und sechste Klassen. Ich machte es immer so, weil ich finde, ich muss ihnen einfach einmal sagen, wie man das macht. Weil sonst sind die so, die lesen und dann sagen sie: „Ich komme nicht mehr draus.“ Und dann sage ich: „Hast du denn das gemacht, was ich gesagt habe? Hast du es auf Schweizerdeutsch versucht? Hast du dir zu überlegen versucht, was überhaupt die Frage ist, oder?“ Darum finde ich, das zeige ich exemplarisch vor, wie man das macht. (L19, 400-412)[110]

- Die Aussagen von 3 Lehrpersonen liegen ausserhalb der Kategorien: 2 Lehrerinnen modifizierten ihr Urteil in Richtung konstruktivistischem Pol, also Richtung *überhaupt nicht einverstanden*. Sie begründen, bei der schriftlichen Bearbeitung des Erhebungsbogens *vielleicht zu wenig achtsam* gewesen zu sein. Eine Lehrperson bringt das lesetechnische Argument: *Die Lehrperson muss es den Schülern zeigen, weil sie in der ersten Klasse noch nicht lesen können. Später wird es nur noch den Leseschwachen gezeigt* (vgl. Kap. 5.2.2).

---

[110] Die zitierte Lehrperson L19 fällt mit ihrem Einstellungskonzept auf: Sie erreichte zu beiden Messzeitpunkten den ausgeprägtesten Wert in behavioristischer Richtung.

38. *Für Schüler ist es besser, verschiedene Arten von Textaufgaben nicht gemischt, sondern nacheinander zu behandeln.* (n = 8)

Die Begründungen der Einschätzung von Item 38 kategorisiere ich gemeinsam mit denjenigen von Item 18, da eine inhaltliche Ähnlichkeit zwischen den Aussagen besteht. Derselbe Inhalt wird bei Nr. 38 aus Schülersicht und bei Nr. 18 aus der Perspektive des Lehrers dargestellt. Die folgende Zusammenstellung stützt sich also auf 16 Gespräche.

18. *Am besten lehrt man den Schülern das Lösen von Textaufgaben, indem man nicht verschiedene Arten von Textaufgaben zugleich behandelt, sondern sich jeweils auf eine Art beschränkt.* (n = 8)

Die Beschränkung auf einen Aufgabentypen gilt als behavioristische Orientierung und die Ablehnung der Aussage als konstruktivistische. Nach behavioristischer Sicht wird der einzelne Reiz oder Problemtyp an ein automatisiertes Rechenprozedere gekoppelt und das Training dieser Reiz-Reaktionsmuster erfolgt zeitlich nacheinander. Die Konstruktivisten betonen, dass reichhaltige Aufgaben mit vielfältigen Problembezügen zu individuellem Verstehen führen.

- In der Kategorie *Interpretations-Argumente* sind 3 Aussagen: Die Lehrpersonen deuten die Stelle *Textaufgaben nicht gemischt zu behandeln* mit *Aufgabendarstellung nicht zu wechseln.* Eine Lehrerin meint, sie *übe Masseinheiten mit schwächeren Schülern isoliert.*
- Das *Argument der schwächeren Rechner* äussern 7 Lehrpersonen, auch indirekt. Danach gilt das Mischen der Aufgaben *nur für gute Schüler,* denn *nur einige Schüler sind beweglich.* Andere Aussagen beziehen sich direkt auf schwächere Rechner: *Mischen ist für schwache Kinder schlecht, schwächere Schüler wären überfordert* oder *mit Schwächeren müssen die Schwierigkeiten langsam gesteigert werden.*
- Die *Fremdsprachigkeit* führt eine Lehrperson an. Sie begründet *mit den vielen fremdsprachigen Kindern in ihrer Klasse: Mit Mischen wäre die Mehrheit überfordert.*
- In Richtung *aktiv-entdeckendes Lernen* verteidigen 2 Lehrpersonen ihr Urteil, das sie allerdings auf mathematisch stärkere Schüler beziehen: *Nur Einzelschüler können selber einen Weg suchen* und *gute Schüler können zuerst selber probieren.*
- 15 Argumente zeigen *behavioristischen Charakter* mit unterschiedlicher Ausprägung. Einige Lehrerinnen *trennen Aufgabentypen während Einführungsphasen, nachher mischen*

sie oder *üben Ähnliches, bis Sicherheit vorhanden* oder *ein Aufgabentyp verstanden ist.* Eine Lehrerin ist überzeugt, dass sich die *Schüler zuerst an etwas gewöhnen müssen, bevor gemischt werden kann*. Weitere Aussagen, die die getrennte Behandlung betonen: Dies ist wichtig, *damit die Lehrperson bei Problemen Schritt für Schritt vorzeigen kann* oder *damit die Schüler Aufgabenschwierigkeiten getrennt üben können, sonst gibt es ein Durcheinander.* Andere Begründungen beinhalten, dass *das Erfolgserlebnis für die Schüler eher möglich sei, wenn getrennt wird* und dass *die Schwierigkeiten in der Gruppe langsam gesteigert werden müssen, damit alle nachkommen.* Eine Lehrerin drückt etwas stärker aus, *bei Textaufgaben* sei *der Text das störende Element und beim Mischen wäre es schwierig, zum Aufgabenkern zu gelangen.*

- Eine Aussage mit diagnostischer Begründung steht alleine da: *Beim Mischen besteht jeweils die Unsicherheit, was die Schüler schon verstanden haben und das Verstehen ist wichtig für das Lösen der Aufgaben.*

Da *Item 16* Ähnlichkeit mit dem besprochenen *Item 5* aufweist, trägt die Kategorisierung eine Kontrollfunktion.

---

16. *Den meisten Grundschülern muss man zeigen, wie einfache Textaufgaben zu lösen sind.* (n =8)

- Zur *Kategorie subjektiver Interpretationen* gehören 2 Aussagen: *Zeigen heisst, dem Schüler zu helfen, die Frage herauszufinden* oder *das Verständnis zu klären.*
- 4 Begründungen beziehen sich auf das *Schwacher-Rechner-Argument*: *Schwache Schüler müssen ans Lösen von Textaufgaben herangeführt werden* oder *schwachen Schülern muss es mehrmals gezeigt werden.* Eine Aussage betont die positive Verstärkung: *Die Lehrerin soll Hilfen geben, wenn es für schwache Schüler ermutigend ist.*
- 2 Lehrpersonen nennen die *Fremdsprachigkeit*, jedoch mit unterschiedlicher Begründungsrichtung: *Bei Ausländern habe ich das Bestreben, einerseits möglichst wenig zu erklären* und andererseits *brauchen fremdsprachige Kinder Erklärungen, da sie Mühe haben, Texte zu verstehen.*

- 3 Stimmen gehen in Richtung *aktiv-entdeckendes Lernen*. Sie beinhalten, dass *Textaufgaben lösen absolut nichts zu tun hat mit einem Weg vorgeben* und dass *selbständiges Textaufgaben lösen auch möglich sei.* Eine Aussage bezieht sich auf starke Rechner: *Einzelschüler können durchaus selber einen Weg suchen.* Bisher wurde aktiv-entdeckendes Lernen vorwiegend mit mathematisch stärkeren Schülerinnen verbunden oder neutral formuliert. Die Überzeugung, *auch schwache Schüler könnten eigene Lösungswege beschreiten und dabei weiterkommen,* steht hier als Einzelaussage.

- 4 Lehrpersonen begründen ihr Urteil *behavioristisch.* Sie meinen, *vielen Schülern müsse das Vorgehen gezeigt werden, da sie nichts mit den Textaufgaben anzufangen wissen* oder es sei *für die Schüler einfach wertvoll* bzw. sie bräuchten *einfach eine Hilfe oder Anleitung*. Eine Lehrerin unterscheidet: *Bei schriftlichen Textaufgaben erkläre ich das Vorgehen, bei mündlichen Rechengeschichten ist dies weniger notwendig.*

- Nicht kategorisierte Argumente beinhalten: *Textaufgaben sind etwas vom Schwierigsten, die Schüler stürzen sich schnell auf Zahlen* und es ist *schwierig, eine Balance zu finden.* Auch das Argument der Lesetechnik wird angebracht: *Erstklässler haben mit dem Erlesen und dem Leseverständnis noch Schwierigkeiten.*

Fazit

Zwei Argumentationstypen weisen in eine behavioristische Richtung, einer betrifft die schwächeren Rechner, lässt sich aber nicht eindeutig zwischen den beiden Polen der Rating-Skala einfügen. Auch die zweite – die behavioristisch betitelte – Kategorie nimmt Begründungen mit teilweise unklaren Formulierungen auf.

Ich halte fest: Die Lehrerinnen verteidigen oder rechtfertigen weniger eine behavioristische Orientierung, sie begründen ihr Urteil vielfältig, auch konstruktivistisch. Die unterschiedlichen Urteilsmotive weisen auf die grundsätzlich entstehende Schwierigkeit hin, wenn Urteile oder Verhaltensäusserungen aus der Beobachterperspektive isoliert wahrgenommen und einem theoretischen Kontext zugeordnet werden. Das Problem stellt sich auch in der Videostudie, in der ich Äusserungen aus Beziehungsgeschichten und dem Unterrichtskontext herauslöse.

Auf Grund der qualitativen Analyse besteht keine Absicht, Zweifel an der inneren Gültigkeit des Messinstrumentes *Einstellungen im Mathematikunterricht* (vgl. Staub & Stern, 1998) anzubringen. Die Funktion der Erhebung liegt in der Darstellung authentischer Aussagen im Kontext didaktischer Einstellungskonzepte.

5.2.7 Diskussion der Ergebnisse

Ein Lehrmittel ist bedrucktes Papier, das Lehrpersonen je nach didaktischer Einstellung unterschiedlich verstehen, interpretieren und einsetzen. Primär entscheiden *sie* über die Gestaltung des Unterrichts und nicht das Lehrmittel, obschon es bei der Unterrichtsgestaltung unterstützende oder leitende Funktion übernehmen kann. Die Hypothesen des ersten Untersuchungsteils stellten die übergeordnete Frage, ob Praktikerinnen mit Mathematik-Didaktikern eine konstruktivistische Haltung teilen.

Staub und Stern (ebd.) prüften mit dem Messinstrument *Einstellungen im Mathematikunterricht* (vgl. Kap. 4.1.2 und 5.2.2) 27 deutsche Lehrpersonen, die 3. und 4. Grundschulklassen unterrichten. Sie bezeichnen diejenigen 12 Lehrpersonen mit einem ermittelten Testwert unter 2.5 als konstruktivistisch und ordnen den anderen 15 Lehrpersonen – welche über 2.5 liegen – eine rezeptive oder behavioristische Grundhaltung zu. Der durchschnittliche Wert der Gesamtstichprobe zeigt mit 2.6 (SD = 0.42) leicht in die behavioristische Richtung.

Die Thurgauer Unterstufen-Lehrerinnen orientieren sich zum Zeitpunkt t1 konstruktivistischer (M = 2.1; SD = 0.39) als die bundesdeutschen Lehrpersonen. Von den 98 Lehrerinnen liegen nur 16% über dem Wert von 2.5 und 84% darunter, zeigen also eine konstruktivistische Ausrichtung. Die Interpretation dieses Vergleichs folgt der Tatsache, dass die deutsche Untersuchung 3. und 4. Klassen unterrichtende Lehrpersonen und die vorliegende Studie Lehrerinnen aus 1. bis 3. Primarklassen einbezog. Angesprochen ist das Geschlecht der Lehrpersonen und die unterrichtete Klassenstufe: „Inwiefern ist die *frauendominierte* Stufe in meiner Untersuchung dafür verantwortlich, dass die didaktische Einstellung konstruktivistischer ausgerichtet ist?“ – Bezüglich der Schulstufe lauten die Fragen: „Ist das Einstellungskonzept bei Lehrpersonen auf höheren Schulstufen behavioristischer?“ – „Kann die konstruktivistischere Orientierung der Thurgauer Lehrerinnen damit begründet werden, dass sie tiefere Klassen unterrichten als diejenigen in der beschriebenen Untersuchung?“ – Die Fragen bleiben offen. Ich stelle sie, um länderspezifische Schlussfolgerungen zu entkräften.

Der Vergleich mit der Untersuchung von Staub und Stern (1998) setzt der folgenden Diskussion einen Anker, der die statistisch geprüften Unterschiede *relativ* erscheinen lässt gegenüber der eindeutig konstruktivistischen Einstellung in Treatment- *und* Kontrollgruppe.

Ergebnis A1

Umsteigerinnen, die erste Klassen unterrichten, zeigen sich konstruktivistischer als die Kontrollgruppe. In der Gesamtstichprobe sind die Einstellungskonzepte vergleichbar.

Der Wechsel vom kantonalen Lehrmittel aufs Zahlenbuch findet nur teilweise eine Begründung in den Einstellungskonzepten: Der Nachweis liegt bei den 30 Erstklass-Lehrerinnen vor, hingegen verflacht er bei Einbezug aller 98 Lehrerinnen der Unterstufe.

Als Hauptergebnis sticht die ausgeprägt konstruktivistische Orientierung beider Vergleichsgruppen hervor. Die konstruktivistische Einstellung der Praktikerinnen erscheint in derselben Prägnanz wie sie Fachdidaktiker vertreten, geht aber nicht einher mit einem Wechsel auf das gleichgesinnte Zahlenbuch. Lehrerin L28 unterrichtet mit dem Thurgauer Lehrmittel und erreichte bei der ersten Erhebung einen konstruktivistisch zu interpretierenden Wert (1.7). Sie äusserte sich kurz und bündig: „Mit dem traditionellen Lehrmittel kann ich ebenso einen Unterricht gestalten, wie es die Autoren des Zahlenbuchs vorschlagen." Die Lehrerin dokumentiert, dass ein Lehrmittel als Werkzeug so gehandhabt werden kann, wie es ihr sinnvoll erscheint bzw. wie es ihrem Einstellungskonzept entspricht.

Die Erstklass-Lehrerinnen geben zu verstehen: Die beiden nach Lehrmittel gebildeten Vergleichsgruppen sind nicht trennscharf (vgl. Kap. 5.3.7). Fast die Hälfte der Umsteigerinnen setzt neben dem Zahlenbuch flankierend das kantonale Lehrmittel ein. Umgekehrt orientieren sich 43% der Lehrerinnen, welche hauptsächlich mit dem Thurgauer Lehrmittel unterrichten, auch am Zahlenbuch. Selbst unter diesen ‚erschwerten' Bedingungen besteht zwischen den Umsteigerinnen und den Nicht-Umsteigerinnen der kleinen Stichprobe eine unterschiedliche didaktischen Einstellung. Der Befund illustriert, dass die didaktische Orientierung den Grundsatzentscheid für einen Lehrmittelwechsel begründen *kann*.

Es ist anzunehmen, dass die Unschärfe des gruppenbildenden Kriteriums auch in der Gesamtstichprobe vorliegt. Der nicht nachgewiesene Zusammenhang zwischen der Einstellung und dem Umstieg aufs Zahlenbuch wird dadurch mitbegründet. Weitere Argumente, warum die didaktische Einstellung der Unterstufen-Lehrerinnen keine Erklärung für den Umstieg liefert, könnten im Bereich von schulhaus- oder gemeindebezogenen Team-Entscheidungen liegen. Sobald kollektive Beschlüsse für oder gegen ein Lehrmittel gefasst werden, kommen individuelle Einstellungskonzepte nicht oder nur pauschal zur Geltung. Entscheidungsfaktoren, die für einen Lehrmittelwechsel sprechen, sind auch in der gestalterischen Gefälligkeit, der Wirksamkeit des Werbemanagements oder im Sozialprestige zu suchen. Ein hoher Preis und obligatorische Einführungskurse wirken sich vermutlich hemmend auf einen Wechsel aus.

Ergebnis A2

Die didaktische Einstellung und der Entscheid zum Lehrmittelwechsel sind nicht altersabhängig: Jüngere und ältere Lehrpersonen orientieren sich didaktisch vergleichbar und wechseln gut gemischt vom kantonalen Lehrmittel aufs Zahlenbuch.

Das Einstellungskonzept jüngerer Lehrpersonen ist vergleichbar mit demjenigen älterer. Die konstruktivistische Orientierung darf also nicht als „junge Mode“ abgetan werden, denn sie zeigt sich altersgemischt als genereller Zeitgeist. Es stellt sich die Frage, ob die ausgesprochen konstruktivistischen Einstellungskonzepte ein stufenspezifisches Charakteristikum darstellen. Die Ergebnisse lassen offen, inwiefern Schulsystem bedingt näher rückende Selektionsentscheide mit behavioristischeren Einstellungskonzepten einhergehen. Ebenso ungeklärt bleibt die Geschlechterfrage, da in der Stichprobe vorwiegend Frauen einbezogen sind.

Auch der Umstieg vom kantonalen Lehrmittel auf das Zahlenbuch lässt sich nicht altersmässig begründen. Erfahrene[111] Lehrpersonen tun diesen Schritt ebenso wie jüngere mit weniger Unterrichtserfahrung. Erfahrene Lehrerinnen stellen sich dem Aufwand für die Einarbeitung in ein neues Lehrmittel ebenso wie jüngere.

Ergebnis A3

Die konstruktivistischer orientierte Gruppe besuchte eher gleichgesinnte Kurse als die behavioristischer eingestellte.

Die Bestätigung der Hypothese besagt, dass konstruktivistisch eingestellte Lehrerinnen

[111] *Erfahrene Lehrpersonen* suggeriert einen Vergleich mit Dienstjahren an Stelle des in die Hypothesenprüfung einbezogenen Lebensalters. Die synonyme Verwendung ist zulässig, denn es ergibt keinen Unterschied, wenn an Stelle des Lebensalters das Dienstalter in die Berechnung eingesetzt wird.

gleichgesinnte Weiterbildungskurse besuchten und behavioristisch ausgerichtete Lehrerinnen nicht. Das klare Resultat spricht für die äussere Gültigkeit des Messinstrumentes, da die Kriterien *Kursbesuch* und *Einstellungskonzept* faktisch in dieselben zwei Gruppen teilen. Es scheint mir plausibel, dass Lehrerinnen mit einer bestimmten Orientierung eine gleichgesinnte Weiterbildung suchen und auf dem eingeschlagenen Weg Bestätigung finden. Den Kursbesuchen wird keine ursächliche Bedeutung zugeschrieben, sondern eine wechselseitige oder zirkuläre.

55% der Unterstufen-Lehrerinnen besuchten in den beiden Jahren vor dem Erhebungszeitpunkt eine konstruktivistisch orientierte Weiterbildung. Vermutlich liegt der prozentuale Anteil derjenigen Lehrerinnen, welche überhaupt einen Kurs besuchten, nicht wesentlich höher. Zumindest im Bereich Mathematik-Didaktik (für die Unterstufe) schrieb die thurgauisch kantonale Weiterbildung im Jahr 2000 ausschliesslich konstruktivistisch orientierte Angebote aus. Die Kurstitel reichten von *Freiräume im Mathematikunterricht* über *Zahlenforschen*, *Entwicklung zum Zahlbegriff und Dyskalkulie* bis zu Einführungen ins Zahlenbuch[112]. Wenn die 55% der Unterstufen-Lehrerinnen dem ungefähren Anteil entspricht, welcher überhaupt kantonale kursorische Weiterbildungsangebote nutzt, so muss dieser konstruktivistisch orientiert sein und die Fanfare der aktuellen Mathematik-Didaktik blasen. Die Weiterbildung bietet kaum Alternativen in einer anderen Richtung. Ein Lehrer zog die Konsequenz, keine weiteren fachdidaktischen Kurse zu besuchen, da er sich mit seinem Frontalunterricht und den bewusst uniform gehaltenen Lehrzielen und Lerninhalten als rückständiger Lehrer vorkomme, der mit seinen Prinzipien nicht ernst genommen werde. Andere Lehrerinnen berichten begeistert von konstruktivistisch orientierten Kursen. „Aber wenn ich dann in meinem eigenen Unterricht stehe, dann kann ich damit einfach nichts mehr anfangen, dann kommen mir keine Ideen" (L8). – Die Erschliessung konstruktivistisch orientierter Kursinhalte bedarf einer sorgfältig konzipierten Erwachsenenbildung, die den Lehrerinnen mit unterschiedlichen Einstellungen und Kompetenzen Gelegenheit bietet, sich mit konkreten Anliegen und Fragen einzubringen und Selbstverantwortung für den eigenen Lerngewinn zu tragen.

[112] Der Kurs *Freiräume im Mathematikunterricht* wurde von der Projektgruppe Mathematik des Kantons Thurgau angeboten und orientierte sich u.a. am Dossier 49 der Schweizerischen Konferenz der kantonalen Erziehungsdirektoren (EDK): Freiräume, Richtlinien, Treffpunkte. Das von Esther Brunner angebotene *Zahlenforschen* ist ein Plädoyer für einen offenen Mathematikunterricht, der die Kinder als Erforscher der Zahlenwelt ernst nimmt. Das Angebot von mir – *Entwicklung zum Zahlbegriff und Dyskalkulie* – weist auf eine kehrseitige Sichtweise zur defizitär verstandenen Rechenschwäche hin und zeigt konstruktivistisch orientierte und integrative Wege auf.

Ergebnis A4

Die Umsteigerinnen verändern ihr Einstellungskonzept während des Schuljahres nicht.

Die Umsteigerinnen weisen bereits zum ersten Messzeitpunkt sehr konstruktivistische Werte auf. Die anschliessend stabil bleibenden Einstellungskonzepte erstaunen aus statistischen Überlegungen nicht. Extreme Vortestwerte „haben die Tendenz, sich bei einer wiederholten Messung zur Mitte der Merkmalsverteilung hin zu verändern (Regression zur Mitte)“ (Bortz & Döring, 1995, S. 517). Der Regressionseffekt wird am Beispiel von Schülertests anschaulich: Eine Schülerin erreichte im Vortest 12 Punkte von maximal 13. Im Nachtest wird die Verbesserung des Prozentranges für sie schwieriger als für einen Schüler mit einem Vortestergebnis von 2 richtig gelösten Aufgaben.

Drei von elf Erstklass-Lehrerinnen (27%) sagen aus, die Arbeit mit dem Zahlenbuch habe bei ihnen eine Einstellungsveränderung ausgelöst (vgl. Kap. 5.3.7). Vielleicht müsste ich präziser formulieren: Sie gelangten durch Impulse aus dem Zahlenbuch zu positiven Unterrichtserfahrungen und erst dadurch änderten sie ihre Einstellung. Sie erfuhren, dass die Vorschläge in ihrem Unterricht umsetzbar sind und darum überzeugen. Die übrigen acht Lehrerinnen geben an, die Arbeit mit dem Zahlenbuch habe ihre didaktische Einstellung nicht verändert. Die Deutung dieser Antworten kann analog der zirkulären Wirkung zwischen dem Einstellungskonzept und dem Kursbesuch erfolgen (vgl. Diskussion A3). Lehrpersonen mit konstruktivistischen Motiven finden im Umgang mit dem Zahlenbuch eher eine Bestätigung ihrer Haltung, als eine Veranlassung, ihr Einstellungskonzept zu ändern.

Ergebnis A5

Die Veränderung der Einstellungskonzepte erfolgt unabhängig vom eingesetzten Lehrmittel.

Die Veränderung der didaktischen Einstellung hängt von subjektiven Unterrichtserfahrungen ab und nicht von Lehrmitteln. Diese Deutung entspricht der konstruktivistischen Auffassung, die Lehrerinnen würden keine (Lehrmittel-)Realitäten abbilden, sondern aus der eigenen Erfahrung heraus subjektive Sichtweisen entwickeln. Da Lehrmittel keine Direktiven auferlegen können und sich nicht selbst verwirklichen, tragen die didaktischen Konstruktionen der Lehrerinnen die Verantwortung dafür, auf welchem Weg sie welche Unterrichtsinhalte umsetzen und welche Erfahrungen sie damit sammeln. Die Lehrerinnen der Treatmentgruppe zeigen, dass sie sich intensiv[113] mit dem Zahlenbuch auseinander setzen. Andererseits ziehen die meisten auch andere Lehrmittel bei, um eigene Unterrichtsarrangements zu gestalten. Da auch die Lehrerinnen der Kontrollgruppe verschiedene Lehrmittel nutzen (vgl. Tab. 12), ist es nicht erstaunlich, dass die Lehrmittel keine Effekte hervorbringen.

Es dürfte wiederum die Aussage der Lehrerin L28 zutreffen, die sich nicht dazu veranlasst sieht, einen Lehrmittelwechsel vorzunehmen. Sie ist sich gewiss, dass sie *ihren* Unterricht weitgehend unabhängig von eingesetzten Lehrmitteln gestalten und verändern kann. Eine angepasste Version ihrer Aussage müsste hier heissen: Die Lehrerinnen sind sich bewusst, dass sie *mit Hilfe* von Lehrmitteln *ihren* Unterricht gestalten und verändern können.

5.3 Videostudie: Mathematik-Unterricht mit ersten Klassen

5.3.1 Theoretische Ausgangsbasis

Der zweite Untersuchungsteil (B) fokussiert das didaktische Handeln von Lehrerinnen im Mathematik-Unterricht mit ersten Primarklassen. Dazu stelle ich folgende Fragen:

- Inwiefern ist die Orientierung an Einstellungskonzepten im didaktischen Handeln zu erkennen?
- Hängt die Quantität und Qualität der individuellen Lernbegleitung vom Leistungsvermögen der Schüler ab?
- Welchen Einfluss hat das Lehrmittel auf die Differenzierung des Unterrichts?

Die Analyse 19 videografierter Lektionen fasst verschiedene Unterrichtsformen und verbale Äusserungen von Lehrerinnen in Kategorien und unterzieht sie Hypothesenprüfungen. Da didaktische Einstellungskonzepte eher in der Auseinandersetzung mit dem einzelnen Kind zum Ausdruck kommen als an der organisatorischen Oberfläche von Lernarrangements, liegt

[113] In Kapitel 5.3.7 kann aus den Ergebnissen herausgelesen werden, dass über 90% der Lehrerinnen, die mit dem Zahlenbuch arbeiten, regelmässig vor einer Lektion den didaktischen Kommentar zu einer Schülerbuchseite lesen und versuchen, die Vorschläge umzusetzen.

der Schwerpunkt auf der Lehrerinnenhilfe während individuellen Lernbegleitungsphasen[114].

Das Verhältnis zwischen frontalen Unterrichtssequenzen und der individualisierten Lernbegleitung gibt einen Einblick in die groben Lektionsmuster. Die angestellten Vergleiche zwischen den verbalen Lehrerinnen-Äusserungen beziehen sich auf Interaktionen mit schwächeren und stärkeren Rechnern, die Adaptivität der Lernbegleitung und Differenzierungsaspekte.

Eine Fragebogen-Erhebung ergänzt die Analysen, indem sie die Lehrerinnen nach ihrer Lektionsplanung, -durchführung und Zielsetzung und zur Lehrmittelnutzung befragt. Die Ergebnisse erweitern die Momentaufnahmen der Lektionen mit didaktischen Hintergründen.

Ich erwarte von den Untersuchungsergebnissen des Forschungsfensters B relevante Aussagen zur mathematischen Unterrichtspraxis, mit Bezug zu den erhobenen Einstellungskonzepten. Aus heilpädagogischer Perspektive interessiert, wie Lehrerinnen Schülern mit auffälligem[115] Leistungsvermögen und problematischem Lernverhalten begegnen. Die Forschungs- und Praxisrelevanz dieser Fragestellung wird durch die gesamtschweizerisch ent- und bestehenden Integrationskonzepte begründet, die der regelschulintegrierten Unterrichtung von Kindern mit besonderen Förderbedürfnissen nachstreben.

5.3.2 Stichprobe

In die Studie sind 19 Lehrpersonen mit ihren Erstklässlern einbezogen, 12 unterrichten hauptsächlich mit dem Zahlenbuch, 7 mit dem kantonalen Lehrmittel. In der Stichprobe befinden sich lediglich zwei männliche Lehrpersonen, beide gestalten den Unterricht vorwiegend mit dem Zahlenbuch. Die Schülerzahlen der einzelnen Klassen sind sehr unterschiedlich, weil v.a. in kleineren Gemeinden zwei- oder dreizügige (jahrgangsgemischte) Klassen geführt werden. Der Unterricht findet während den gefilmten Lektionen aber ausschliesslich mit den Erstklässlern statt. Lehrerin L14 erteilt nur das Fach Mathematik[116], die übrigen Lehrerinnen unterrichten in ihrer Klasse alle Fächer.

[114] Lernbegleitungsphase bezeichnet die Gesamtdauer, während der die Lehrerin die Schüler an ihren Arbeitsplätzen individuell unterstützt. Vereinzelt findet die Begleitung am Lehrerinnen-Pult statt, wobei der Schüler die Lehrerin aufsucht (vgl. Kap. 5.3.6; B3).

[115] Damit ist das Leistungsvermögen schwacher *und* starker Rechnerinnen gemeint.

[116] L14 übernimmt für eine Lehrerin mit einer grossen mehrzügigen Klasse ein Entlastungspensum.

Die in Tabelle 10 ersichtlichen Klassengrössen beziehen sich auf die Anzahl Schüler, die während der videografierten Lektion anwesend waren. Bei mehrzügigen Klassen betrifft die Anzahl *n* nur die Erstklässler. Bei einzügigen Jahrgangsklassen nahm teilweise nur die Hälfte der Klasse an der Lektion teil (alternierender Unterricht).

Tabelle 10: Schülerzahlen während den Videoaufnahmen

12 Klassen mit Zahlenbuch		**7 Klassen mit kantonalem Lehrmittel**	
Klasse 23[a]	n = 06[b]	Klasse 19	n = 08
Klasse 7	n = 10	Klasse 26	n = 09
Klasse 14	n = 11	Klassen 25, 28	n = 12
Klasse 2	n = 13	Klasse 27	n = 17
Klassen 4, 13, 18	n = 14	Klassen 29, 30	n = 21
Klasse 8, 17	n = 19		
Klasse 16	n = 20		
Klasse 6	n = 23		
Klasse 11	n = 25		
arithmet. Mittel	M = 15.5	arithmet. Mittel	M = 14.3

Anmerkungen: [a] Die Nummerierung der Klassen entspricht derjenigen der Lehrperson, welche die Klasse unterrichtet. [b] Die Schülerzahlen (*n*) entsprechen nicht den effektiven Klassengrössen, sondern den während der Lektion anwesenden Schüler.

Nach der Lektion nannten vier Schüler pro Klasse vor aufzeichnender Kamera ihren Namen. Die Auswahl der bildlich identifizierten Schüler erfolgte auf Grund der Leistungen im mathematischen Vortest[117] (vgl. Kap. 5.4). Jeweils zwei schwächste (aber mit mindestens zwei richtig gelösten Aufgaben) und stärkste Vortestrechner pro Klasse bestimmte ich als Zielschüler, um an sie gerichtete Äusserungen der Lehrerinnen separat codieren zu können (vgl. Hypothesen B2, B4 und B5). Die Begründung der Vorgabe einer Mindestpunktzahl bei den schwächeren Vortestrechnern liegt in der Wahrscheinlichkeit einer experimentellen Mortalität (vgl. Bortz & Döring, 1995, S. 471). Bei sehr schwachen Rechnern bzw. bei Kindern mit äusserst geringen mathematischen Vorkenntnissen besteht die Wahrscheinlichkeit einer Umplatzierung im Verlaufe des Schuljahres.

[117] Die im Vortest durchschnittlich erreichte Punktzahl der schwächeren Gruppe liegt bei 3.7, diejenige der stärkeren bei 10.4 (max. 13). Der mittlere Rangwert der schwächeren beträgt 20, derjenige der stärkeren 55 (U = 7.5, p = .00 < .05). Im Nachtest erreichen die 37 schwächeren Vortestrechner mit durchschnittlich 24 Punkten (max. 34) einen mittleren Rangwert von 25. Die stärkeren 38 Vortestrechner lösten 30 Aufgaben richtig und kommen auf einen mittleren Rangwert von 50. Der U-Test weist auch im Nachtest einen signifikanten Leistungsunterschied zwischen den beiden Gruppen nach (U = 235.5, p = .00 < .05).

5.3.3 Durchführung der Datenerhebung

Der Erhebungszeitraum t4 erstreckt sich von April bis Juni 1999. Aus datenschutz-rechtlichen und administrativen Gründen erfolgten Anfragen an die örtlichen Schulkommissionen und die kantonale Schulaufsicht, welche die Durchführung der Videostudie durchgehend bestätigten. Den Eltern der betroffenen Kinder kam ein Schreiben zu, in welchem über die Studie informiert, der Datenschutz zugesichert und auf die Einsprachemöglichkeit hingewiesen wurde. Die Lehrerinnen erhielten die Instruktion, *eine möglichst typische Lektion, bei freier Themen-, Material- und Lehrmittelwahl zu gestalten.*

Mit einem Leitfaden zur Kameraführung (der sich an denjenigen der TIMSS-R-Videostudie[118] anlehnt) konnte eine untersuchungstechnische Standardisierung der Datenerhebung sichergestellt werden. Zu Beginn der Lektionen positionierte ich die digitale Videokamera (Panasonic NV-DS5EG) an der Fensterfront (2/3 bis zur Wandtafel und 1/3 bis zur Rückwand des Schulzimmers) auf einem Stativ. Während des Unterrichtsverlaufs suchte ich mit der Kamera durchgehend räumliche Nähe zur Lehrperson, da die akustische Aufnahme ausschliesslich mit dem internen Mikrofon erfolgte. Die Flüstergespräche während Lernbegleitungsphasen und die relativ raschen Standortwechsel der Lehrerinnen machten es erforderlich, überwiegend „aus der Hand“ und nicht ab Stativ zu filmen. Dem Widerspruch zwischen der Notwendigkeit einer aktionsnahen Kameraführung und der Einhaltung einer Beobachterdistanz musste ich mit situativen Kompromissen begegnen.

Bei Videoaufnahmen ist das Auftreten des Hawthorne-Effektes wahrscheinlich. Dieser besagt, dass das Bewusstsein, Teilnehmerin einer wissenschaftlichen Untersuchung zu sein, das Verhalten verändert (Bortz & Döring, 1995, S. 472). Lehrerin L28 äusserte sich diesbezüglich: „Ich habe mir während der Lektion immer wieder überlegt, wie ich mich nach Überzeugung von Mathematik-Didaktikern verhalten müsste. Dies war sehr anstrengend.“ Der Effekt kann in der vorliegenden Studie nicht ausgeschlossen werden. Ihm wirkt vielleicht entgegen, dass die Lehrpersonen meinten, der Schwerpunkt der Datenerhebung liege auf Schülerebene.

[118] Die Untersuchungen stehen in Zusammenhang mit einer TIMSS-Nachfolgestudie (Third International Mathematics an Science Study) und sind ins NFP 33, Wirksamkeit der Bildungssysteme integriert.

5.3.4 Datentransformation: Transkription und Codierung

Die Auswertung der Videoaufnahmen erfolgte mit dem Programm *vPrism*® am Computer. Die verbalen Äusserungen der Lehrpersonen wurden aus der (teilweise dialektalen) Unterrichtssprache nach den Regeln der TIMSS-R-Videostudie[119] in Schriftsprache übersetzt. Die Transkription von Schüleräusserungen erfolgte nur, wenn sie in Interaktionen mit der Lehrerin eingebunden waren.

Bei der Codierung legten Zeitmarken, die anfangs und Ende eines transkribierten Textausschnittes gesetzt wurden, den Gültigkeitsbereich einer zugeordneten Kategorie fest. Die gemessene Dauer der einzelnen Codes bildet die Datenbasis für die Prüfung der Hypothesen.

Gesamtschau über den Codier-Plan[120]

Die Lektionen werden in verschiedene Unterrichtsphasen mit den beiden Hauptkategorien *Frontalunterricht* (FU) und dezentriertes Lernen mit individueller *Lernbegleitungsphase* (LBE) eingeteilt. Der Frontalunterricht gliedert sich in die Varianten *fragend-entwickelnder Unterricht, Frontalspiel, Vormachen-Nachmachen, Frontaldemonstration, frontale Organisationsklärung und frontaler Lehrer-Monolog*. Die individuelle Lernbegleitungsphase ist durch Interaktionen der Lehrerin mit einzelnen Schülern oder Kleingruppen während Stillarbeitsphasen festgelegt. Unterrichtsphasische Nebenkategorien beinhalten: *aussermathematischer Lektionseinstieg* (z.B. Lied singen), *Lehrerin geht eigener Arbeit nach, Lehrerin ist während Partner- oder Gruppenarbeiten in der Rolle der Lernpartnerin* und *Organisationsphasen* (einrichten oder aufräumen). Die genannten Kategorien (Makrocodes) erfassen ganze Unterrichtssequenzen, also Sprechzeiten *und* Sprechpausen. Die folgenden *einfachen* Codes halten nur die Dauer einer sprachlichen Äusserung fest.

Die an einzelne Schüler gerichteten Botschaften[121] der Lehrerin (während individuellen Lernbegleitungsphasen oder während frontalen Unterrichtsformen) werden den Codes LB1-3 und LB5 (*disziplinarische, organisatorische, aufgabentechnische und positiv verstärkende Äusse-*

[119] Unveröffentlichtes Transkriptionsmanual, Pädagogisches Institut der Universität Zürich, 1999.

[120] Die präzisen Definitionen der einzelnen Codes sind im originalen Plan enthalten (vgl. Anhang B).

[121] Äusserungen an einzelne Schüler bezeichne ich unabhängig von der Organisationsform als Lernbegleitung. Im Gegensatz dazu betrifft der Makrocode Lernbegleitungsphase ausschliesslich die dezentrierte Unterrichtsform, während der die Schüler an ihren Arbeiten sitzen und von der Lehrerin eine individuelle Unterstützung bekommen.

rungen der Lehrperson) zugeordnet. Sie betreffen Sprechinhalte ohne direkten Bezug zu einem mathematischen Inhalt. Damit die Aussagen die Kriterien der Codes LB4, 6 und 7 erfüllen, müssen sie sich auf einen mathematischen Kern beziehen.

Die beiden Kategorien *Eingehen auf den Denk- oder Lernweg des Schülers* (LB4) und *den Schüler aus seinem Denk- und Lernweg reissen, dieser folgt dem Gedankengang der Lehrperson* (LB6) beziehen sich direkt auf mathematische Inhalte. Die beiden im Zentrum der Analyse stehenden Codes grenzen eine konstruktivistisch orientierte von einer behavioristisch-belehrenden Lernbegleitung ab. Die Kategorie KLB6 ist ein an die Klasse gerichtetes Pendant zu LB6 und beinhaltet belehrende Worte, die an den Klassenverband gerichtet sind. Code LB7 wird gesetzt, wenn die Lehrerin einem einzelnen Schüler die *Instruktion wiederholt, individuell formuliert oder durch eine neue ergänzt.*

Ein weiterer Analyseaspekt bezieht sich auf Instruktionen, die in der Regel einer Lernbegleitungsphase vorausgehen. Die Codes IN0 bis IN3[122] kennzeichnen Anweisungen, die eine *natürliche Differenzierung offen legen*, wobei IN0 und IN1 qualitative Varianten und die beiden andern Kategorien IN2 und IN3 quantitative Möglichkeiten der natürlichen Differenzierung etikettieren. Die Bezeichnung *qualitativ* gilt für instruierte Aufgaben, die mit unterschiedlich komplexen Operationen zu individuellen Zielen führen oder auf verschiedenen Abstraktionsstufen (z.B. mit Handlungsmaterialien) vollzogen werden können. Codes mit *quantitativer* Charakteristik treffen zu, wenn Schüler die Anzahl Aufgaben oder den Zahlenraum, in dem sie operieren, auswählen dürfen. Die Instruktionstypen IN4 und IN5 beinhalten enge Aufgabenstellungen und innere Differenzierungen, ausgehend von der Lehrperson (vgl. Kap. 2.2.4).

Die beiden Schülerkategorien *starke* und *schwache* Rechner werden ergänzend durch +/- markiert. Äusserungen der Lehrerinnen an die vier identifizierten Zielschüler pro Klasse (Codes LB1 bis LB9) sind mit demselben Zusatz versehen. Die zur Verfügung stehende Dauer, während der die Lehrpersonen mit Zielschülern interagieren, hängt vermutlich von der Klassengrösse ab. Daher prüfe ich die an Zielschüler gerichtete Sprechdauer nicht absolut, sondern als

[122] Die Codes zur natürlichen Differenzierung werden auch vergeben, wenn die individuellen Möglichkeiten nicht explizit aus der Instruktion hervorgehen. Falls in einer Klasse z.B. eine Lernkultur aufgebaut ist, in der die Schüler selbstverständlich mit unterschiedlichen Anschauungs- oder Handlungsmaterialien operieren oder die Aufgaben auf verschiedenen Abstraktionsstufen lösen, kann eine Instruktion nachträglich die Codes IN0 bis IN3 belegen.

Verhältnis zwischen der eingesetzten Zeit für stärkere und schwächere Rechner.

Reliabilität der Codierung

Die Kategorisierung der vorliegenden Daten bedarf der Einhaltung der Gütekriterien Reliabilität (Genauigkeit) und Objektivität (intersubjektive Nachvollziehbarkeit). Zu diesem Zweck erfolgte eine Kontrollcodierung durch eine *Interraterin*, deren Kategorienbildungen zu mindestens 70% mit derjenigen des Untersuchungsleiters übereinstimmen sollte (Bortz & Döring, 1995, S. 254). Der Doppelcodierung ging ein Training voraus, damit die Interraterin die definierten Codes verinnerlichen, mit Ankerbeispielen belegen und einen vergleichbaren Massstab anwenden kann. Die Darstellung der Interrater-Übereinstimmung ist eine Absicherung gegenüber willkürlicher oder subjektiver Kategorisierung.

Bei der Reliabilitätsprüfung bestimmten wir den einzelnen Satz als grösste Analyseeinheit. D.h. es wurde mindestens jeder einzelne Satz mit einem neuen Code belegt, selbst wenn dieser über eine Passage von mehreren Sätzen identisch blieb. Die Absprache erfolgte, weil die einzelnen Codierereignisse nicht definiert wurden. Als kleinste Einheit legten wir das einzelne Wort fest. Wenn z.B. die Lehrerin in einer Interaktion lediglich *ja* sagt, wird ein Rückbezug zum Inhalt des Bejahten hergestellt. Gilt das *Ja* z.B. der Frage, ob ein Schüler die ganze Rechnung schreiben müsse, so wird das *Ja* mit dem Code *Aufgabenkulisse (LB3)* versehen.

Die Korrelation zwischen den Einschätzungen der Kontrollcodiererin und mir beträgt Kappa K = . 71. Damit beruht die Datenbasis der folgenden Hypothesenprüfungen auf einer genügend gesicherten Grundlage.

5.3.5 Hypothesen zum Untersuchungsteil B

Die Hypothesen beziehen sich auf die Videoanalyse. Die Darstellung der Aussagen, welche aus dem Fragebogen hervorgehen, erfolgt in Kapitel 5.3.7. Tabelle 11 informiert über die Code-Abkürzungen, welche in den empirischen Arbeitshypothesen vorkommen.

Tabelle 11: Code-Abkürzungen der empirischen Arbeitshypothesen

Code	Erklärung
FU	Frontale Unterrichtsphasen
LBE	Individuelle Lernbegleitungsphase während Einzel- oder Kleingruppenarbeiten
LB1 bis LB7	Interaktionen der Lehrerin mit einzelnen Schülern
LB1 bis LB7+/-	wie LB1 bis LB7, betrifft aber starke (+) bzw. schwache (-) Rechner[123]
LB4	Lehrperson geht auf den Lernweg des Schülers ein
LB4+/-	wie LB4, betrifft aber starke (+) bzw. schwache (-) Zielschüler
LB6	Lehrperson geht nicht auf den Lernweg des Schülers ein, versucht ihn zu belehren
LB6+/-	wie LB6, betrifft aber starken (+) bzw. schwachen (-) Rechner
IN0 bis IN3	Instruktionen an die ganze Klasse mit natürlichen Differenzierungsmöglichkeiten
IN0 und IN1	Instruktionen an die Klasse mit natürlichen Differenzierungsmöglichkeiten qualitativer Art, d.h. Spielraum der Operationen bezüglich Komplexität, Schwierigkeit und Variabilität des Repräsentationsniveaus
IN2 und IN3	Instruktionen an die Klasse mit natürlichen Differenzierungsmöglichkeiten quantitativer Art , d.h. Variabilität in der Anzahl Aufgaben und des Zahlenraums
IN4	Instruktion der Lehrerin an die Klasse mit enthaltener innerer Differenzierung
IN5	Instruktion an die Klasse mit enger Aufgabenstellung
t	Zeit

Die Hypothesen B1 und B2 charakterisieren die Lektionen mit einigen Vergleichsdaten:

Hypothese B1

Während den Lektionen überwiegt die Dauer der dezentrierten Lernbegleitung gegenüber frontalen Unterrichtsphasen.

Als empirische Arbeitshypothese formuliert:
t (LBE) > t (FU)

Das Verhältnis zwischen Frontalunterricht und dezentrierter Lernbegleitung liefert einer bildungspolitischen Diskussion Argumente: Wenn im Unterricht ein individualisiertes Lernen dominiert, sind Rahmenbedingungen für eine befriedigende Lernbegleitung bereit zu stellen.

[123] Mit der Bezeichnung starke/schwache Rechner ist jeweils die Vortest-Leistung des Schülers zum Zeitpunkt t2 gemeint.

Während den Interviews meinten einige Lehrerinnen, leistungsschwächere Rechner bräuchten eine besonders intensive Unterstützung (vgl. Kap. 5.2.6.3). Hypothese B2 differenziert die Lernbegleitungsphase durch den Vergleich der Zeitanteile, welche die Lehrerinnen für die beiden Schülergruppen einsetzen:

Hypothese B2

Während Lernbegleitungsphasen setzen die Lehrpersonen für mathematisch schwächere Schüler mehr Zeit ein als für stärkere.

Als empirische Arbeitshypothese formuliert:
$\sum$ t (LB1- bis LB7-) > $\sum$ t (LB1+ bis LB7+)

In Hypothese B3 sind die Kategorien LB4 und LB6 einbezogen. LB4 beinhaltet die verbalen Äusserungen der Lehrerinnen, mit welchen sie auf Ergebnisse oder beschrittene Denk- und Lösungswege eingehen. Der rote Faden der Interaktion orientiert sich an den Wissenskonstruktionen des Schülers. Die Lehrerin befragt den Schüler nach seinem beschrittenen Weg und hängt der Darstellung neue Fragen und Impulse an. Charakteristisch für die Variable LB4 ist die Begleitung zur Selbstkorrektur.

Die Variable LB6 beinhaltet Äusserungen der Lehrperson, bei denen ihre eigenen Gedanken und Konzepte um die „richtigen" Lösungswege und Resultate im Vordergrund stehen. Fragen oder Bemerkungen nehmen keinen Bezug zum produzierten Ergebnis oder Lösungsweg des Schülers. Isolierte Einzelrezepte oder kleinschrittige, nacheinander folgende Einzelanweisungen kennzeichnen, dass der Schüler angewiesene Teilschritte ausführt und der eigentliche Operationsvollzug durch die Lehrperson erfolgt. Korrekturen erfolgen als Fremdkorrekturen.

Hypothese B3

Bei den Lehrerinnen überwiegt eine auf den Lernweg des Schülers eingehende Lernbegleitung gegenüber einer belehrenden, den Schüler aus seinem Lern- und Denkweg herausreissenden.

Als empirische Arbeitshypothese formuliert:
t (LB4) > t (LB6)

Schüler sind unterschiedlich fähig, selbstständig und zielorientiert nach Lösungswegen zu suchen. Diese Kompetenz sprechen die Lehrerinnen eher den leistungsstärkeren Rechnern zu (vgl. Kap. 5.2.6.3). Ob Qualitätsunterschiede zwischen der Lernbegleitung dieser beiden

Schülergruppen festzustellen sind, überprüfe ich mit den Hypothese B4 und B5:

Hypothese B4

Die Qualität der Lernbegleitung hängt vom Leistungsvermögen der Schüler ab: Die schwächeren Rechner erhalten eher belehrende und rezepthafte Anweisungen als stärkere.

Als empirische Arbeitshypothese formuliert:
t (LB6-) > t (LB6+)

Hypothese B5

Die Lehrerinnen treten weniger auf die Lernwege der schwächeren Rechner ein als auf diejenigen der stärkeren.

Als empirische Arbeitshypothese formuliert:
t (LB4-) < t (LB4+)

Mit den Hypothesen B6 und B7 kontrolliere ich, inwiefern die Einstellungskonzepte mit der Qualität der Lernbegleitung (LB4 und LB6) übereinstimmen:

Hypothese B6

Je konstruktivistischer sich die Lehrerinnen zum Zeitpunkt t5 orientieren, desto eher gehen sie auf den Lern- und Denkweg der Schüler ein.

Als empirische Arbeitshypothese formuliert:
Belief-System-Wert[124] korreliert gegensinnig mit t (LB4)

Der Vergleich zwischen den Einstellungskonzepten und der Qualität der Lernbegleitung erfolgt in Hypothese B7 mit der Variablen *belehrende Lernbegleitung* (LB6):

Hypothese B7

Je konstruktivistischer sich die Lehrerinnen zum Zeitpunkt t5 orientieren, desto weniger belehren sie und „reissen" Schüler aus ihren Denkwegen.

Als empirische Arbeitshypothese formuliert:
Belief-System-Wert korreliert gleichsinnig mit t (LB6)

In den nächsten beiden Hypothesen besteht die zweistufige unabhängige Variable aus der Treatment- und der Kontrollgruppe. LB4 und LB6 bilden weiterhin die abhängigen Variablen.

---

[124] Die Werte der Einstellungskonzepte können zwischen 1 und 5 liegen. 1 bedeutet, dass ein völlig konstruktivistisches Konzept vorliegt, 5 entspricht einer rezeptiven Orientierung (vgl. Kap. 5.2.2).

Hypothese B8

Die Umsteigerinnen gehen eher auf die Lern- und Denkwege der Schüler ein als die Lehrerinnen der Kontrollgruppe.

Als empirische Arbeitshypothese formuliert:
Bei Treatmentgruppe; t (LB4) > als bei Kontrollgruppe; t (LB4)

Bei Annahme der Hypothese B8 (und B9) bestünde zwischen den nach Lehrmittel gebildeten Untersuchungsgruppen ein Qualitätsunterschied in der Lernbegleitung. Ein allfälliger Effekt darf aber nicht dem Lehrmitteleinfluss zugeschrieben werden, da die beiden Gruppen auch unterschiedliche Einstellungskonzepte aufweisen (vgl. Hypothesenprüfung A1 und A5).

Hypothese B9

Die Umsteigerinnen belehren die Schüler während der Lernbegleitung weniger (lang) bzw. reissen sie seltener aus dem eigenen Lern- oder Denkweg heraus.

Als empirische Arbeitshypothese formuliert:
Bei Treatmentgruppe; t (LB6) < als bei Kontrollgruppe; t (LB6)

Zwischen Treatment- und Kontrollgruppe nehme ich einen weiteren Lehrmittel bezogenen Unterschied an. Da das Zahlenbuch die natürliche Differenzierung hervorhebt, dürfte diese im Unterricht der Umsteigerinnen dominieren:

Hypothese B10

Die Instruktionen der Umsteigerinnen öffnen den Schülern eher natürliche Differenzierungsmöglichkeiten als diejenigen der Kontrollgruppe.

Als empirische Arbeitshypothese formuliert:
Treatmentgruppe; t (IN1+IN2+IN3) > als Kontrollgruppe; t (IN1+IN2+IN3)

Hypothese B11 bezieht sich auf Aussagen derjenigen Lehrerinnen, die während des Interviews über inhaltliche Varianten der natürlichen Differenzierung sprechen (vgl. Kap. 5.4.8):

Hypothese B11

Die natürliche Differenzierung beschränkt sich in den Treatmentklassen vorwiegend auf quantitative Aspekte wie die Variabilität der Anzahl Aufgaben oder des Zahlenraums.

Als empirische Arbeitshypothese formuliert:
Bei Treamentgruppe gilt; t (IN 2 + IN3) > t (IN0 + IN1)

Die Instruktionen werden in B12 und B13 mit den Einstellungskonzepten verglichen:

Hypothese B12

Konstruktivistisch orientierte Lehrpersonen bieten eher einen natürlich differenzierten Unterricht an als behavioristisch orientierte.

Als empirische Arbeitshypothese formuliert:
Bei $L_{konstr.}$; t (IN0 + IN1 + IN2 + IN3) > als $L_{behav.}$; t (IN0 + IN1 + IN2 +IN3)

Hypothese B13

Bei behavioristisch orientierten Lehrpersonen sind innere Differenzierungen und enge Aufgabenstellungen dominanter als bei konstruktivistisch orientierten.

Als empirische Arbeitshypothese formuliert:
Bei $L_{behav.}$; t (IN4 + IN5) > als $L_{konstr.}$; t (IN4 + IN5)

5.3.6 Statistische Hypothesenprüfung

Die Dauer der aufgezeichneten Lektionen variiert zwischen 42 und 59 Minuten. Sie wurde durch Umrechnung auf einen Standard von 45 Minuten vereinheitlicht.

Die Hypothesenprüfungen sind mit Beispielen illustriert, die v.a. aus den Lektionen von Lehrerin L19 (mit ausgeprägt behavioristischem Einstellungskonzept) und L28 (mit ausgeprägt konstruktivistischer Orientierung) stammen. Beide arbeiten mit dem Thurgauer Lehrmittel[125].

B1 Überwiegen Lernbegleitungsphasen gegenüber Frontalsequenzen?

In der Lektion von Lehrerin L17 kommt keine Frontalsituation vor, weil die Schüler an individuellen Wochenplänen[126] arbeiten (vgl. Abb. 25). Gegenteilig fallen die Lektionen von L19 und L23 auf: Sie bestehen vorwiegend aus frontalen Übungen, welche die Schüler während kurzen Stillarbeitsphasen reproduzieren.

Die mittlere Dauer der Lernbegleitungsphasen beträgt pro Lektion 23.0 Minuten (*SD* = 10.1) und diejenige frontaler Unterrichtssequenzen 15.5 (*SD* = 11.7). In 11 von 19 Lektionen über-

[125] Daten oder Einzelaussagen der beiden Lehrerinnen sind in alle drei Untersuchungsteile eingeflochten. Sie ergeben zusammen zwei Bilder von pädagogischen Einzelfällen.

[126] Die Arbeit mit Wochenplänen ist eine erweiterte Lernform (ELF). Die Schüler erhalten darin individuelle Aufträge oder ein Angebot von Themen, welche sie während einem festgelegten Zeitbudget in beliebiger Reihenfolge und mit unterschiedlichen Schwerpunkten bearbeiten (vgl. Gasser, 1999).

wiegt die individuelle Lernbegleitung gegenüber dem Frontalunterricht[127]. Der zeitliche Unterschied zwischen den beiden Unterrichtsformen beträgt mit 7.5 Minuten einen Sechstel einer Lektion. Dennoch erweist sich die Differenz laut t-Test für abhängige Stichproben nicht als signifikant [t (18) = -1.56, p = .13 > .05]. Fazit: Das dezentrierte Lernen mit individueller Begleitung ist gegenüber dem Frontalunterricht ein ebenbürtiges didaktisches Setting.

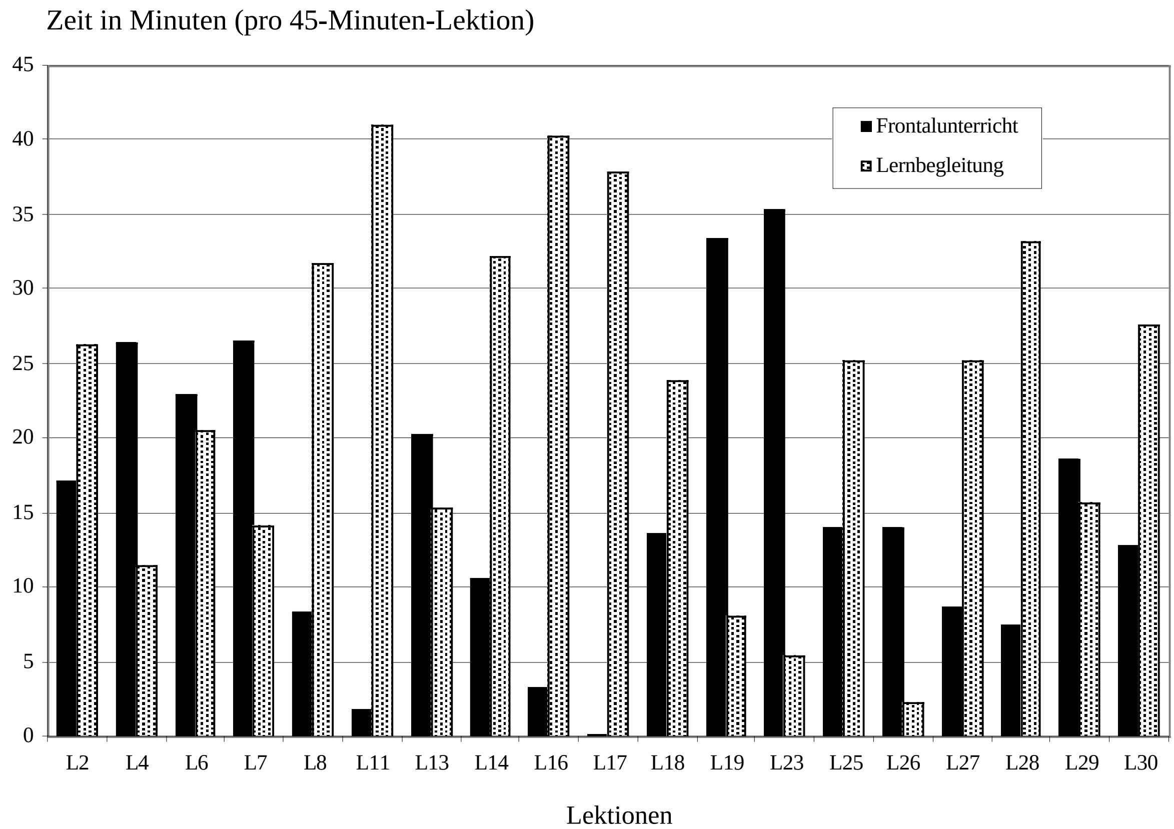


Abbildung 25: Vergleich zwischen individualisierten Lernbegleitungsphasen und lehrerzentriertem Frontalunterricht

Der lehrmittelbezogene Vergleich ergibt folgendes Bild: Die durchschnittliche Gesamtdauer der Lernbegleitung beträgt in den Treatmentklassen 25.0 Minuten pro Lektion (SD = 11.9) und in den Kontrollklassen 19.6 (SD = 11.3). Der t-Test für unabhängige Stichproben weist keinen signifikanten Unterschied zwischen diesen Zeiten nach [t (17) = .98, p = .34 > .05]. Der Frontalunterricht dauert in beiden Gruppen durchschnittlich 15.5 Minuten.

---

[127] Frontalunterricht setzt sich aus den Varianten fragend-entwickelnder Unterricht, Vormachen-Nachmachen, Demonstration, Organisationsklärung, Lehrermonolog und Frontalspiel zusammen.

B2 Begleiten die Lehrerinnen schwächere Rechner länger als stärkere?

Die Bestimmung von je zwei mathematisch stärkeren und zwei schwächeren Zielschülern pro Klasse hat Stichprobencharakter und äussert sich in der Datenbasis mit relativ kleinen Zeitwerten[128]. Die einfachen Codes in Hypothesen B2 bis B13 beziehen sich auf alle Unterrichtsphasen der Lektion, ausser es werde auf eine Einschränkung (wie der folgenden) hingewiesen.

Während Stillarbeitsphasen der Schülerinnen beträgt die Begleitungsdauer[129] des einzelnen schwächeren Rechners durchschnittlich 0.84 Minuten (SD = 0.73, n = 37), diejenige des stärkeren 0.71 (SD = 0.51, n = 38). Nach Prüfung der Rangwerte (nach Wilcoxon) erhalten die beiden Gruppen eine zeitlich vergleichbare Unterstützung (Z = -.60, p = .55 > .05).

Lehrerin L28 begleitet die schwächeren und die stärkeren beiden Zielschüler mit durchschnittlich 2.6 bzw. 2.0 Minuten am längsten. Die Gesamtdauer ihrer Lernbegleitungsphasen (LBE) beträgt etwas mehr als 33 Minuten (vgl. Abb. 25). Während den Lektionen anderer Lehrerinnen (L11, L16 und L17) dominiert die Gesamtzeit der Lernbegleitungsphasen zwar stärker, die Zielschüler profitieren davon aber nicht in entsprechendem Ausmass.

B3 Überwiegt die konstruktivistische Lernbegleitung gegenüber der belehrenden?

Die durchschnittliche Dauer der konstruktivistischen Lernbegleitung beträgt pro Lektion 0.50 Minuten (SD = 0.84), diejenige der belehrenden 1.25 (SD = 1.23). Der Wilcoxon-Test bestätigt, dass die belehrende gegenüber der konstruktivistischen Lernbegleitung signifikant überwiegt (Z = -2.81, p = .01 < .05). Nur in 3 von 19 Lektionen dauert die konstruktivistische Begleitung länger als die belehrende (vgl. Abb. 26).

Während der Lektion von L28 erfahren die Schüler während einer Sprechzeit von 1.9 Minuten eine Lehrerin, die ihren Lernstand oder ihre gesammelten Erfahrungen ernst nimmt, sie in eine neue Richtung weist oder den eingeschlagenen Weg unterstützt. Einzig L16 nimmt die Rolle

[128] Der Hypothese B2 (und folgenden) liegen einfache Codes zu Grunde, die mit den Makrocodes in Hypothese B1 nicht vergleichbar sind. Im Gegensatz zu den Makrocodes, welche sich über eine Unterrichtssequenz in Realzeit erstrecken (inklusive Sprechpausen), erfassen die einfachen Codes nur die effektive Sprechdauer.

[129] Präziser müsste es heissen *die durchschnittliche Sprechzeit der Lehrperson mit schwächeren Rechnern während individuellen Arbeitsphasen.* Aus Gründen der Leserlichkeit verzichte ich auf den Umweg über die Sprechzeit. Zweite Anmerkung: Es wurden nur Sprechzeiten, die inhaltlich mit dem Unterrichtsthema und dessen Organisation zu tun haben, einbezogen. Die Codierung LB8 ist aus der Datenbasis ausgeschlossen.

der konstruktivistischen Lernbegleiterin (mit 3.5 Minuten) länger wahr, allerdings ist in ihrer Lektion die gesamte Lernbegleitungsphase (mit 40 Minuten) wesentlich dominanter (vgl. Abb. 25). Da Lehrerin L16 – im Unterschied zu L28 – selten den Schülerinnen an ihren Arbeitsplätzen nachgeht, stehen sie häufig vor ihrem Pult Schlange, bis sie an der Reihe sind und ihre Anliegen anbringen können. Somit fallen bei L16 die längeren Sprechpausen weg, die beim Laufen von Schüler zu Schülerin entstehen. Die Interaktionen folgen entsprechend kürzer aufeinander und die potenzielle Zeitdauer für eine konstruktivistische Lernbegleitung erhöht sich.

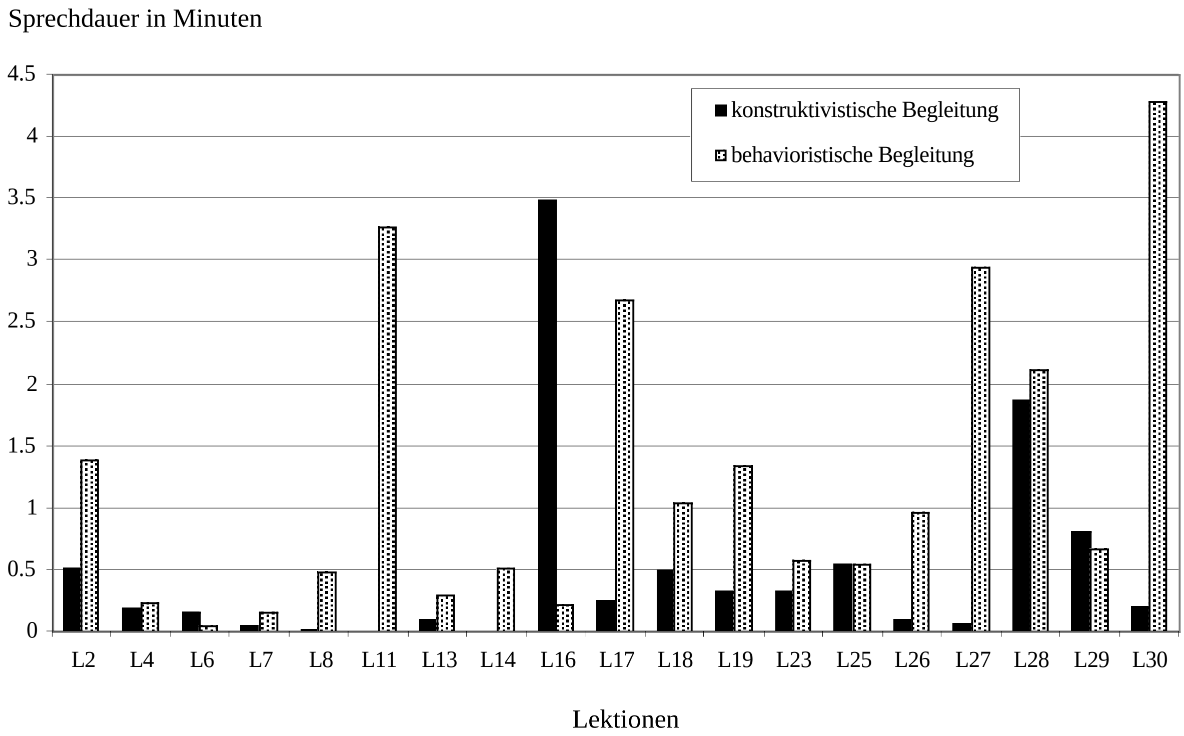


Abbildung 26: Dauer der konstruktivistischen und behavioristischen Lernbegleitung pro Lektion

L30 dominiert die Kategorie belehrende Lernbegleitung mit 4.3 Minuten. L28 setzt mit 2.1 Minuten nur knapp die Hälfte der Zeit dafür ein, den Schülern Tipps, Ratschläge und Rezepte abzugeben. Aber auch in ihrer Bilanz überwiegt die belehrende Begleitung.

B4 Werden schwächere Rechner eher belehrt als stärkere?

Die schwächeren Rechner erfahren während durchschnittlich 0.12 Minuten (SD = 0.18, n = 37) belehrende Worte, die stärkeren während 0.04 (SD = 0.06, n = 38). Nach Prüfung der Rangpositionen (Wilcoxon) werden die Schwächeren signifikant länger belehrt als die Stärkeren (Z = -2.29, p = .02 < .05). In lediglich 3 Lektionen liegt das Verhältnis umgekehrt vor, in 5 Klassen findet keine Belehrung statt und in 11 Klassen erfahren schwächere Rechner eher eine Belehrung als stärkere.

Unter den Daten der schwächeren Rechner erscheint L28 mit einem Extremwert von 1.45 Minuten. Die lange Zeitdauer kommt massgeblich durch rezepthafte Anweisungen während Interaktionen mit *einer* sehr schwachen Rechnerin zu Stande.

L28 fällt auch bei den stärkeren Rechnern mit der längsten Belehrungsdauer von 0.34 Minuten pro Schüler auf. Unmittelbar hinter ihr ist mit 0.25 Minuten Lehrerin L19 rangiert, deren addierte Lernbegleitungsphasen allerdings nur 8 Minuten betragen (vgl. Abb. 25).

B5 Hängt die konstruktivistische Lernbegleitung vom Leistungsvermögen der Schüler ab?

Die Begründungen der Item-Urteile lassen annehmen (vgl. Kap. 5.2.6.3), dass die stärkeren Zielschüler gegenüber den schwächeren eine konstruktivistischere Begleitung erfahren. Die Lehrerinnen begleiten die stärkeren Rechner doppelt so lange in einem konstruktivistischen Sinn wie die schwächeren (M = 0.04 und 0.02 Minuten). 7 Klassen bestätigen die Relation, in 4 Klassen ist sie umgekehrt und in 8 Klassen findet keine konstruktivistische Begleitung statt. Der Wilcoxon-Test weist nur einen schwachen Zusammenhang zwischen einer konstruktivistischen Begleitung und dem Leistungsvermögen der Schüler nach (Z = -1.60, p = .11 > .05).

Lehrerin L28 erreicht bei der konstruktivistischen Begleitung der starken *und* der schwachen Zielschüler hohe Extremwerte von 0.30 bzw. 0.17 Minuten. Bei den stärkeren Rechnern fällt auch Lehrerin L19 mit einer überdurchschnittlich konstruktivistischen Unterstützung auf.

B6 Ist die Dauer der konstruktivistischen Lernbegleitung länger, wenn die Lehrerin konstruktivistischer eingestellt ist?

Die Werte der 19 Einstellungskonzepte stammen aus der Messung zum Zeitpunkt t5. Als Datenbasis für die konstruktivistische Lernbegleitung dienen die addierten Zeitwerte der Codes LB4+, LB4- und LB4. Ihre Dauer beträgt pro Lektion durchschnittlich 0.50 Minuten (SD =

0.84, n = 19; vgl. B3). Nach Spearmans Rho ergibt sich eine gegensinnig[130] zur Hypothese verlaufende Beziehung, es wird aber keine signifikante Korrelation festgestellt (r = -.09, p = .29 > .05). Die Konstruktivität der didaktischen Orientierung steht somit nicht in Wechselbeziehung zur Zeitdauer einer konstruktivistischen Lernbegleitung.

L28 weist den zweittiefsten Belief-Wert auf (in konstruktivistischer Richtung) und unterstützt ihre Schülerinnen mit beinahe 2 Minuten am zweitlängsten mit dieser Haltung (vgl. B3). Eine vergleichbare Korrelation zwischen dem Einstellungskonzept und der didaktischen Handlung liegt bei keiner anderen Lehrerin vor.

B7 Ist die Dauer der belehrenden Lernbegleitung kürzer, wenn die Lehrerin konstruktivistischer eingestellt ist?

Die Datenbasis besteht aus den Werten der didaktischen Einstellung (Zeitpunkt t5) und den addierten Zeitwerten mit belehrenden Äusserungen, welche an Einzelschüler und an die ganze Klasse gerichtet sind. Die durchschnittliche Belehrungsdauer beträgt 1.5 Minuten (SD = 1.2, n = 19). Dieser Mittelwert liegt etwas höher als derjenige in Hypothesenprüfung B3, weil hier auch die kollektive Belehrung einbezogen ist. B3 stützt sich lediglich auf Zeitwerte von an Einzelschüler gerichtete Äusserungen, weil die Variable LB4 kein kollektives Pendant hat.

Die Korrelation nach Spearmans Rho weist in Richtung der formulierten Hypothese, zeigt aber keine signifikante Wechselwirkung (r = .13, p = .30 > .05). Aus Hypothesenprüfung B6 und B7 lässt sich also dasselbe Fazit ziehen: Die Einstellungskonzepte korrelieren nicht mit entsprechenden didaktischen Handlungen.

Lehrerin L30 belehrt ihre Schülerinnen mit 4.37 Minuten am längsten (vgl. B3). Auch die Lektion von L19 erscheint mit 2.27 Minuten unter den fünf längsten Belehrungszeiten (vgl. Blockzitat in Kap. 5.2.6.3). Eine etwas höhere Belehrungsdauer von 2.68 Minuten liegt in der Wochenplan-Lektion von L17 – ohne Frontalunterrichtsphasen – vor (vgl. Abb. 25).

[130] Dem konstruktivistischen Pol entspricht der Wert 1, dem behavioristischen der Wert 5. Die Arbeitshypothese B6 formuliert: Je tiefer der Wert des Einstellungskonzeptes, desto länger die Dauer einer konstruktivistisch orientierten Lernbegleitung. Gegensinnig heisst hier: Bei konstruktivistischerem Einstellungskonzept wird eher eine kürzere Zeitdauer für die konstruktivistische Lernbegleitung festgestellt.

B8 Begleiten die Umsteigerinnen ihre Schüler konstruktivistischer als die Kontrollgruppe?

Die 23 Umsteigerinnen orientieren sich zu den Zeitpunkten t1 und t5 konstruktivistischer als die 7 Lehrpersonen der Kontrollgruppe (vgl. A1 und A5). Die Annahme einer konstruktivistischen Lernbegleitung der 12 Umsteigerinnen[131] ist also nahe liegend und gleichzeitig fraglich, da der Zusammenhang zwischen dem Einstellungskonzept und der didaktischen Handlung nicht nachgewiesen ist (vgl. B6 und B7).

Die Umsteigerinnen bieten mit der durchschnittlichen Dauer von 0.46 Minuten (SD = 0.97, n = 12) eine kürzere konstruktivistische Lernbegleitung an als die 7 Lehrpersonen der Kontrollgruppe (0.56 Minuten; SD = 0.63). Statistisch gesehen erfolgt die konstruktivistische Begleitung in beiden Gruppen in einem vergleichbaren zeitlichen Rahmen (U = 26.0, p = .20 > .05).

Unter den Umsteigerinnen bietet Lehrerin L16 mit 3.49 Minuten während der längsten Zeitspanne eine konstruktivistische Lernbegleitung an (vgl. B3). In der Kontrollgruppe weist die Lektion von L28 mit 1.87 Minuten die längste Dauer auf.

B9 Belehren die Umsteigerinnen ihre Schüler weniger als die Kontrollgruppe?

Die Datenbasis besteht (wie bei B7) aus belehrenden Äusserungen an einzelne Schüler *und* an die ganze Klasse. Die durchschnittliche Dauer, während der die Umsteigerinnen belehren, beträgt 1.16 (SD = 0.95, n = 12) Minuten. Diejenige der Kontrollgruppe ist mit 2.11 Minuten (SD = 1.28, n = 7) beinahe doppelt so lang. Die Prüfung mit dem U-Test nach Mann-Whithney weist nur einen tendenziellen Unterschied zwischen den Zeiten beider Gruppen aus (U = 22.0, p = .10 > .05). Die Tendenz tritt etwas deutlicher hervor, wenn ausschliesslich die belehrenden Worte an einzelne Schüler in die Datenbasis einbezogen werden (U = 19.0, p = .06 > .05).

In der Kontrollgruppe führt Lehrerin L30 die Liste mit den längsten Belehrungszeiten an (4.37 Minuten). Die Lektion von L19 erscheint mit der drittlängsten Zeit (2.27 Minuten).

[131] Bezogen auf die Stichprobe der Videostudie (12 Umsteigerinnen und 7 Lehrpersonen mit kantonalem Lehrmittel) ergibt sich bezüglich des Einstellungskonzeptes eine gleichsinnige Tendenz, wonach die Umsteigerinnen konstruktivistischer orientiert sind als die Lehrerinnen der Kontrollgruppe [t (17) = -1.96, p = .07 > .05].

B10 Instruieren Lehrerinnen der Treatmentgruppe stärker in Richtung natürlicher Differenzierung als diejenigen der Kontrollgruppe?

Die Datengrundlage besteht aus dem Zusammenzug aller Instruktionen, die eine Form der natürlichen Differenzierung beinhalten (IN0 bis IN3). In der Treatmentgruppe dauern die Instruktionen im Schnitt 0.39 Minuten (SD = 0.43, n = 12), in der Kontrollgruppe 1.02 (SD = 0.56, n = 7). Die Relation der Mittelwerte verhält sich also umgekehrt zu derjenigen in der formulierten Hypothese. Die Prüfung mit dem t-Test für unabhängige Stichproben weist einen signifikanten Unterschied nach, d.h. Instruktionen mit nahe gelegter natürlicher Differenzierung überwiegen in der Kontrollgruppe [t (17) = -2.73, p = .01 < .05]. Mit diesem Resultat stelle ich mit Hypothese B11 die Nebenfrage, welche natürlichen Differenzierungsformen während den Lektionen der Kontrollgruppe vorherrschen.

In der Treatmentgruppe wird die längste Instruktionsdauer mit offen gelegter natürlicher Differenzierung bei Lehrerin L2[132] gemessen (1.56 Minuten). Seitens der Kontrollgruppe liegt L30 mit 1.72 Minuten an erster und L28 mit 1.06 Minuten an dritter Stelle.

B11 Überwiegen in den Instruktionen der Treatmentklassen die quantitativen Formen der natürlichen Differenzierung?

Die Instruktionen der Umsteigerinnen, die ein qualitatives Differenzierungsspektrum öffnen, dauern durchschnittlich 0.32 Minuten (SD = 0.45, n = 12). Die Zeitspanne mit quantitativen Varianten ist mit 0.07 Minuten deutlich kürzer (SD = 0.14). In 8 Lektionen überwiegen Instruktionen mit qualitativen Möglichkeiten, in 2 Lektionen sind die Angebote ausschliesslich quantitativer Art und aus 2 Lektionen gehen keine Instruktionen mit natürlicher Differenzierung hervor. Die Rangprüfung (Wilcoxon) weist nach, dass in den Treatmentklassen die qualitativen Formen gegenüber quantitativen tendenziell überwiegen (Z = -1.68, p = .09 > .05).

Prüfung der Nebenfrage aus B10

Während den Lektionen der Kontrollgruppe beträgt die Instruktionsdauer mit qualitativem Spielraum durchschnittlich 0.64 Minuten (SD = 0.57) und diejenige mit quantitativem 0.38 (SD = 0.32). In 4 Klassen überwiegen quantitative Formen der natürlichen Differenzierung

[132] Die Klasse von L2 erwähne ich bei der Beschreibung der Stichprobe (vgl. Kap. 5.3.2), weil die Schüler den Schulstoff der ersten Klasse auf zwei Schuljahre verteilt angehen.

und in 3 Klassen qualitative. Der Wilcoxon-Test lässt das Verhältnis zwischen den beiden Formen in der Kontrollgruppe als ausgewogen bezeichnen ($Z = -.85$, $p = .40 > .05$). Der Vergleich mit den Lektionen der Umsteigerinnen relativiert das Ergebnis aus Hypothese B10: Die dominierende natürliche Differenzierung während den Lektionen der Kontrollgruppe kommt massgeblich durch quantitative Formen zu Stande. In der Treatmentgruppe sind die qualitativen Anteile der natürlichen Differenzierung dominanter.

B12 Bieten konstruktivistisch orientierte Lehrpersonen eher einen natürlich differenzierten Unterricht an als behavioristisch orientierte?

Die 19 Einstellungskonzept-Werte[133] der Lehrerinnen werden mit der Splithalfmethode künstlich dichotomisiert. Die Daten der natürlichen Differenzierung bestehen aus einem Zusammenzug aller erfassten Varianten. Die Instruktionsdauer mit natürlichem Differenzierungscharakter unterscheidet sich bei Lehrpersonen mit konstruktivistischer und behavioristischer Orientierung kaum (M = 0.61 und 0.63 Minuten). Sie lässt keinen Zusammenhang zum Einstellungskonzept erkennen [t (17) = -.04, $p = .97 > .05$].

B13 Überwiegen innere Differenzierungen und enge Aufgabenstellungen stärker bei Lehrerinnen mit rezeptiver als bei solchen mit konstruktivistischer Orientierung?

Die Prüfung des Zusammenhangs zwischen engen Aufgabenstellungen und behavioristischem Einstellungskonzept erfolgt durch die künstlich gebildeten Vergleichsgruppen aus B12. Bei engen Aufgabenstellungen hat der Schüler keinen Spielraum, seinen individuellen Möglichkeiten entsprechend an die Sache zu gehen. Die konstruktivistisch orientierte Gruppe stellt eng formulierte Aufgaben während durchschnittlich 1.87 Minuten (SD = 1.50), die behavioristisch orientierte während 1.59 (SD = 1.70). Die Mittelwerte verhalten sich entgegengesetzt zur formulierten Hypothese und der t-Test für unabhängige Stichproben weist zwischen den Vergleichsgruppen bezüglich engen Aufgabenstellungen keinen signifikanten Unterschied nach [t (17) = 0.38, $p = .71 > .05$]. Der Umfang enger Aufgabenstellungen lässt sich somit nicht durch das Einstellungskonzept begründen.

[133] Die Werte stammen aus der Erhebung zum Zeitpunkt t5.

Ergebnisse einer Fragebogen-Erhebung bringen zusätzliche Informationen zur gefilmten Lektion und zur Nutzung des Lehrmittels. Sie erweitern die dargestellte Faktenbasis mit didaktischen Hintergründen.

5.3.7 Lehrerinnen geben Zusatzinformationen

Im Anschluss an die Videolektionen erhielten die Lehrerinnen einen Fragebogen, der aus vier Teilen besteht: Die Fragen unter ...

A beziehen sich auf die Lektion selber, auf die Vorbereitung, die gesetzten Ziele und die Einordnung der Lektion in den Lernprozess der Schülerinnen.

B nehmen sich der Unterrichtseinheit an: „Fügt sich diese Lektion in eine Folge von Lektionen ein oder steht sie als Einzellektion?“

C laufen in einer Frage nach Repräsentativität der Lektion zusammen: „Als wie typisch sehen die Lehrerinnen die Lektion im Vergleich zum alltäglichen Mathematikunterricht?“

D richten sich an die Nutzung des Lehrmittels: „In welcher Art wird es eingesetzt und welchen Stellenwert nimmt der begleitende didaktische Kommentar ein?“

Tabelle 12: Antworten von 18 Erstklass-Lehrerinnen zur videografierten Lektion und zum Gebrauch des Lehrmittels[134]

A	**Warum wähltest du *dieses* Thema oder *diese* Aufgabenstellungen?**	
-	Weil die Seite an die Reihe kam	33%
-	Das Sachthema war der Auslöser	22%
-	Ich ging von einem mathematischen Thema aus	67%
	... und wurde im Zahlenbuch oder Handbuch produktiver Rechenübungen fündig [a]	28%
	... und entwickelte dazu selber Ideen und Aufgaben	50%
-	Wegen der Reichhaltigkeit, damit eine natürliche Differenzierung möglich war	39%
-	Die Unterrichts- und/oder Sozialform war ausschlaggebend,	89%
	... allerdings ging die Wahl des mathematischen Inhalts voraus	72%
	... sie wurde aber selber kreiert und nicht einem Lehrmittel entnommen	39%
	Woran orientiertest du dich bei der Vorbereitung der Lektion?	

[134] Insgesamt füllten 18 Lehrpersonen den Fragebogen vollständig aus. Die Abkürzung ZB bezeichnet, dass die prozentuale Angabe der Antworten für diejenigen 11 Lehrpersonen gilt, welche hauptsächlich mit dem Zahlenbuch arbeiten. TG steht als Kürzel vor den Antworten der 7 Lehrerinnen der Kontrollgruppe. Bei allen Fragen waren Mehrfachantworten möglich.

- Ich las den didaktischen Kommentar des Lehrmittels ... 39%
- ... und versuchte den Vorschlag umzusetzen 22%
- Ich las den didaktischen Kommentar nicht 33%
- Ich wollte allen Schülern dieselben verbindlichen Aufgaben vorgeben 39%
- Ich plante Aufgaben mit quantitativen Differenzierungsmöglichkeiten [b] 83%
- Qualitative Differenzierungsmöglichkeiten standen im Vordergrund 67%
- Als Differenzierung sah ich vor, dass die Schüler einander helfen 28%
- Ich machte mir Gedanken über natürliche Differenzierungsmöglichkeiten 78%

Wie lange dauerte die Vorbereitung der Lektion?

- Zwischen 15 und 25 Minuten 67%
- Zwischen 30 und 40 Minuten 39%
- Zwischen 45 und 60 Minuten 28%
- Für diese Lektion bereitete ich zwischen 10 und 30 Minuten länger vor als üblich 11%

Welche Ziele hast du für die Lektion gesetzt?

- Mindestens zwei der Ziele Einführung, Durcharbeiten/Vertiefen und Automatisieren 39%
- Problemlösen und/oder Begründen, Argumentieren 44%
- Voneinander lernen 39%
- Ich setzte bewusst dasselbe Lektionsziel für alle (pauschal) 44%
- Ich formulierte für Einzelne oder Gruppen differenzierte und individualisierte Ziele 50%

B Wo ist die Lektion im Lernprozess und als Unterrichtseinheit einzuordnen?

- Gleichsam in Einführung, Einsicht gewinnen (Durcharbeiten) und Automatisieren 28%
  in zwei dieser Zielsetzungen 56%
  entweder in Einführung oder Einsicht gewinnen 39%
- Eingebettet in eine zusammenhängende Unterrichtseinheit 100%
- Es war die 1. Lektion in einer Unterrichtseinheit zwischen 3 und 14 Lektionen 39%
- Die Lektion war inmitten dieser Unterrichtseinheit 61%

C Wie typisch war die gehaltene Lektion im Vergleich zu übrigen Stunden?

- Es gab keinen Hinderungsgrund bezüglich der Realisierung des Geplanten 78%
- Einzelne Hinderungsgründe: Fremdsprachigkeit, Zeitmangel, Klassengrösse, Kamera 06%
- Die Lektion war typisch, kommt oft oder sehr oft in dieser Art vor 94%
- Die Lektion war nicht unbedingt typisch, kommt nur manchmal so vor 06%
- Es herrschte eine normale Disziplin der Schüler 83%
- Die Disziplin war schlechter als sonst 17%
- Der Schwierigkeitsgrad entsprach demjenigen des übrigen Mathematikunterrichts 83%

- Der Stoff war schwieriger / leichter als sonst			11% / 6%

D Wie gebrauchst du das Lehrmittel?

- Ich nehme Seite für Seite an die Reihe		67%
- Ich halte mich nicht an die Reihenfolge des Lehrmittels		39%
- ZB: Ich las mindestens 70% des didaktischen Kommentars	in der Einführung	91%
	zum Blitzrechnen	91%
	zur Denkschule	100%
	zum Ziffernschreibkurs	64%
- TG: Ich las mindestens 70% des allgemeinen didaktischen Teils		57%
- ZB: Vor einer Lektion lese ich jeweils den Kommentar zur Schülerbuchseite		100%
	... und versuche den Vorschlag umzusetzen	91%
- TG: Vor einer Lektion lese ich jeweils den Kommentar zur Schülerbuchseite		57%
	... und versuche den Vorschlag umzusetzen	57%
- ZB: Meine didaktische Einstellung hat sich seit dem Umstieg verändert		27%

Wie zufrieden bist du mit folgenden Aspekten des Lehrmittels?

- Mit Übungskonzeption:	völlig überzeugt	ZB	55%
		TG	00%
	teilweise überzeugt	ZB	46%
		TG	43%
	überhaupt nicht überzeugt	ZB	09%
		TG	29%
- Mit Angebot zur Differenzierung:	dürfte besser sein	ZB	36%
		TG	57%
	ist gut	ZB	46%
		TG	00%
	genügend für Schwächere	ZB	55%
		TG	43%
	ungenügend für Schwächere	ZB	27%
		TG	29%
- Mit Anschauungs-/Handlungsmaterial:	völlig zufrieden	ZB	91%
		TG	00%
	teilweise zufrieden	ZB	09%
		TG	43%
	überhaupt nicht zufrieden	ZB	00%
		TG	43%

Welche Schüler nutzen die Anschauungs-/Handlungsmaterialien? Welcher Art?			
- Die meisten Schüler nutzen Wendeplättchen und 20er-Feld		ZB	100%
- Die meisten Schüler nutzen Cuisenaire-Stäbe		TG	14%
	... davon regelmässig	ZB	55%
		TG	14%
	... meistens nicht	ZB	36%
		TG	29%
- Vorwiegend schwächere Rechnerinnen nutzen die Materialien		ZB	56%
		TG	36%
- Der Gebrauch der Materialien ist für die Schüler obligatorisch		ZB	82%
		TG	14%
- Die Schüler nutzen die Materialien als Zählkulisse		ZB	73%
		TG	43% [c]
- Die Schüler zählen mit Fingern, trotz Anwesenheit des Materials		ZB	46%
		TG	57% [c]
- Die Schüler sträuben sich, das Material zu gebrauchen		ZB	55%
		TG	29%
Ziehst du weitere Lehr- und Unterrichtsmittel bei? Welche? Wozu?			
- Ja, ich ziehe häufig andere Lehrmittel bei		ZB	09%
		TG	43%
- Ja, ich ziehe manchmal andere Lehrmittel bei		ZB	82%
		TG	29%
- Zusätzlich wird das Thurgauer Lehrmittel eingesetzt		ZB	46%
- Zusätzlich wird das Zahlenbuch eingesetzt		TG	43%
- Diverse andere Lehrmittel sind Ergänzung		ZB	82%
		TG	43%
- Die zusätzlichen Lehrmittel dienen dem	Automatisieren	ZB	82%
		TG	71%
	Durcharbeiten	ZB	46%
		TG	43%
	Einführen eines Themas	ZB	09%
		TG	43%
	Bereitstellen von „Zusatzfutter“	ZB	82%
		TG	57%

Anmerkungen: [a] In den Antworten kommt zum Ausdruck, dass auch Lehrpersonen der Kontrollgruppe das Zahlenbuch bzw. das Handbuch produktiver Rechenübungen (Wittmann & Müller, 1994) beiziehen und die Umsteigerinnen weiterhin das Thurgauer Rechenbuch nutzen. [b] Quantitative und qualitative Differenzierungsmöglichkeiten betreffen jeweils beide Varianten, welche im Codier-Plan beschrieben sind (vgl. Anhang B). [c] Drei Lehrerinnen der Kontrollgruppe setzen das 20er-Feld ein.

Die Diskussion einzelner Ergebnisse aus dem Fragebogen erfolgt in Kapitel 5.2.7, andere finden Eingang in die Diskussion über die Resultate der Hypothesenprüfungen.

5.3.8 Diskussion der Ergebnisse

Ergebnis B1

Die Lehrerinnen bieten den Schülern während der halben Lektion eine individuelle Lernbegleitung an. Frontale Unterrichtsformen[135] dominieren nicht.

Die Unterstützung individueller Lernprozesse ist der frontalen Vermittlung zeitlich ebenbürtig. In 11 von 19 Lektionen überwiegt die Gesamtzeit der Lernbegleitung mit durchschnittlich 23 gegenüber dem Frontalunterricht mit 15.5 Minuten. Im Vergleich: Während der Frontalunterricht an der gymnasialen Sekundarstufe I in Nordrhein-Westfalen mit 77% dominiert (Hage et al., 1985, zit. in Meyer, 1987b, S. 60), tritt er im Mathematik-Unterricht erster Primarklassen mit einem Zeitanteil von 34% hinter dezentrierte Lernformen (51%) zurück.

Das selbstständige Arbeiten während Stillarbeitsphasen verlangt von den Schülern hohe Lernkompetenzen. Wird dessen Dauer von 23 Minuten auf die durchschnittlich 15 anwesenden Schüler verteilt (vgl. Tab. 10), bleibt dem Einzelnen eine Betreuungszeit von 1.5 Minuten. Die übrigen 21.5 Minuten sitzt er alleine vor seinen Aufgaben und einem Reizangebot, das auch zu Aktivitäten ausserhalb mathematischer Themen einlädt. Es erstaunt nicht, dass in einzelnen Lektionen die akustischen Bedingungen ein konzentriertes Lernen erheblich belasten. L14 erschwert den Schülern z.B. die Zielorientierung mit einem marktähnlichen Treiben und mit Plüschtieren, die als Aufgaben-Maskottchen eher ablenken als unterstützen.

Die Äusserungen der Lehrerinnen, mit denen sie auf Lernprozesse einwirken, reichen von disziplinarischen Verhaltensregelungen über die Beantwortung organisatorischer Fragen, bis hin zur eigentlichen Begleitung mathematischer Lernprozesse. Die Auszählung der Lektion von

[135] Frontalunterricht beinhaltet neben der überwiegend praktizierten fragend-entwickelnden Form auch die frontale Demonstration, das Frontalspiel, frontales Vormachen-Nachmachen, den frontalen Lehrermonolog und die frontale Organisationsregelung.

L14 ergibt, dass sie während der Lernbegleitungszeit von 15 Minuten 53 Interaktionen mit Schülern eingeht, in denen sie disziplinarische, organisatorische und aufgabentechnische Regelungen durchgibt. Bei L16 vergeuden die Schüler ihre Lernzeit mit unproduktivem Warten vor dem Pult der Lehrerin (vgl. Kap. 5.3.6; B3).

Im organisatorischen Mantel des dezentrierten Lernens hat einiges Platz. Effiziente erweiterte Lernformen sind anspruchsvoll und bedürfen der längerfristigen Einbettung in eine Lernkultur, damit die Schüler bereitgestellte Freiräume zielgerichtet nutzen können. Kleine Klassen, substanzielle Lernumgebungen, organisatorisches Geschick der Lehrerin, zusätzliche heilpädagogische Begleitung im Klassenzimmer und die Verfügbarkeit von Gruppenräumen sind wichtige Sockel, auf denen die Gestaltung des dezentrierten Lernens aufbauen und an Lerneffizienz gewinnen kann.

Während der Lernbegleitung gehen die Lehrerinnen in bester Absicht auf individuelle Lernwege, Fragen oder Verhaltensauffälligkeiten ein und versuchen, geeignete Impulse zu geben. Dem gegenüber schreibt der fragend-entwickelnde Frontalunterricht einen verbindlichen Lernpfad vor: Die Schüler *müssen* sich darauf einlassen, ihre Aufmerksamkeit auf den gemeinsamen Unterrichtsgegenstand, dessen Erarbeitungsverlauf und -tempo zu richten. Das von allen Verlangte ist für das Denken des Einzelnen eventuell (noch) nicht erreichbar oder nicht mehr attraktiv, da es sich weder auf dem Niveau der aktuellen Leistung noch in der Zone der nächsten Entwicklung befindet (Vygotsky, 1974). Individualisierende Möglichkeiten sind der Lehrerin im fragend-entwickelnden Frontalunterricht u.a. gegeben, indem sie die Schüler unterschiedlich häufig aufruft oder mit der Aufgabenschwierigkeit variiert. Sobald sie vertiefter auf Antworten des einzelnen Schülers eingeht, verlässt sie die positiven Möglichkeiten des Frontalunterrichts, welche in der simultanen Erreichbarkeit einer grossen Anzahl Schüler und beim mündlichen Kleingruppen-Unterricht im häufigen „Drankommen“ liegen[136]. Bei Aufgabeninstruktionen mit begleitenden Vorübungen, organisatorischen Abmachungen oder Schülerpräsentationen bietet der Frontalunterricht ökonomische Vorteile und kreative Gestaltungsmöglichkeiten.

[136] Der Frontalunterricht überwiegt in den beiden Klassen (19 und 23) mit den geringsten Schülerzahlen (vgl. Tab. 10 und Abb. 25).

Die Varianten Frontalunterricht und dezentriertes Lernen rhythmisieren den untersuchten Anfangsunterricht in einem ausgewogenen Verhältnis und tragen Kindern mit unterschiedlichem Lernverhalten Rechnung. Es kommen beide Sozial- und Lernformen mit ihren spezifischen Vorzügen zur Geltung und dienen einer produktiven Nutzung. Selbst im Zuge einer konstruktivistisch orientierten Didaktik kann es nicht darum gehen, die frontale Lehrerrolle zu Gunsten eines dezentrierten Lernens aufzugeben (vgl. Weinert, 1996).

Ergebnis B2

Die Lehrerinnen unterstützen schwächere und stärkere Rechner während der Stillarbeit gleich lang.

Das Ergebnis widerspricht der hypothetischen Annahme und der Ansicht einiger Lehrerinnen, schwächere Rechner würden gegenüber stärkeren eine intensivere Unterstützung benötigen (vgl. Kap. 5.2.6.3 und 5.4.8). Aus heilpädagogischer Sicht greift der Einwand, dass Schwächere mit besonderen Förderbedürfnissen zu kurz kommen, wenn Stärkere gleichermassen Zuwendung erfahren. Meine Antwort: Die Auswahl von je zwei Zielschülern pro Klasse mit extrem hohen und tiefen Vortestresultaten[137] bezieht sich nicht auf den Vergleich zwischen schwächeren Rechnern und dem grossen Rest der Klasse, sondern auf Schüler mit eindeutig über- und unterdurchschnittlichem Leistungsvermögen. Dass die Lehrerinnen für die Begleitung der Schüler beider Gruppen gleich viel Zeit einsetzen, deute ich als positives Zeichen für den Umgang mit Heterogenität. Beim selbstständigen Lernen stossen potenziell alle Schüler auf ihrem Lern- und Leistungsniveau auf Probleme, Fragen oder mitteilungsbedürftige Entdeckungen und haben dasselbe Recht auf eine individuelle Zuwendung.

Die Frage nach der Auswahl von „besonders unterstützungsbedürftigen“ Schülern stellt sich auch Schulischen Heilpädagoginnen in integrierten Schulmodellen[138], wenn sie gemeinsam mit der Klassenlehrerin entscheiden, wem sie eine zusätzliche Begleitung anbieten. Die Position vieler integrativer Konzepte ist eindeutig: Differenzierungsangebote kommen Schülern mit besonderen Förderbedürfnissen auf jedem Lern- und Leistungsniveau gleichberechtigt zu.

[137] Die Nachtestresultate der beiden Gruppen unterscheiden sich auch im Nachtest deutlich (vgl. Kap. 5.3.2).

[138] Integrierte Schulmodelle sind in der Schweiz eine schuloganisatorische Möglichkeit, Schülern mit besonderen Förderbedürfnissen durch heilpädagogische Massnahmen im Regelschulunterricht zu entsprechen.

Während den Videolektionen gehen die Schüler unterschiedlich mit Selbstständigkeit erfordernden Lernsituationen um: Das zielorientierte Lernverhalten vieler schwächerer Rechner bricht zusammen, wenn sie an Schwierigkeiten stossen. Die Unterstützung dieser Schüler kommt durch eine eigene *Qualität* der Lernbegleitung zum Ausdruck.

Ergebnisse B3, B4 und B5

Die *belehrende* Lernbegleitung überwiegt gegenüber der konstruktivistischen und zeigt sich bei schwächeren Rechnerinnen ausgeprägter als bei stärkeren. Die *konstruktivistische* Begleitung hängt nicht vom Leistungsvermögen der Schüler ab.

Während der individuellen Schülerbegleitung *könnten* die Lehrerinnen beschrittene Lösungswege erfragen und neue Impulse auf gemachte Erfahrungen beziehen. Eine solche – konstruktivistisch orientierte – Lernbegleitung überwiegt aber nur in 3 Lektionen, 16-mal dominieren belehrende Kontaktnahmen. Diese herrschen gegenüber der konstruktivistischen Begleitung vor und charakterisieren eher die Unterstützung schwächerer als diejenige stärkerer Rechnerinnen. Beide Leistungsgruppen erfahren selten eine konstruktivistische Lernbegleitung.

Die Assoziation eines dezentrierten Unterrichts mit einer konstruktivistischen Lehrerinnenrolle bricht, weil Belehrung und Rezeptvermittlung überwiegen. Zwischen der Qualität der Lernbegleitung und den konstruktivistischen Einstellungskonzepten besteht eine Diskrepanz (vgl. Kap. 5.2.7), hinter der m.E. disziplinarische und unterrichtsorganisatorische Beweggründe sowie mangelnde Handlungskompetenzen liegen.

Die durchschnittliche Begleitungsdauer von 1.5 Minuten pro Schülerin und Lektion verteilt sich meistens auf kurze Sequenzen, die häufig den Charakter von Feuerwehrübungen mit Disziplinarfunktion tragen. Die Interventionen gegenüber abschweifenden Schülern möchten potenzielle Störquellen ausschalten und eine geregelte Lernatmosphäre aufrecht erhalten. Die Lehrerinnen geben knappe und *unterrichtlich* wirksame Impulse, damit sie die Begleitung der ganzen Klasse wahrnehmen und eine gewisse Lernkultur „warm halten“ können.

Die disziplinarisch und unterrichtsökonomisch motivierte Lernbegleitung findet ihre Begründung eher in der alltagsdidaktischen Notwendigkeit als im Einstellungskonzept. In der Videoanalyse sind beide Varianten auf dem Konto der behavioristischen Begleitung verbucht, weil die Kategorien Verhaltens*äusserungen* und keine Handlungs*motive* erfassen.

In der belehrend interpretierten Situation erteilt die Lehrerin Handlungsanweisungen ohne erkennbaren Bezug zur Lernerfahrung des Schülers. Der Denkprozess findet in ihrem Kopf statt, der Schüler führt lediglich die Handlung aus. Beim Dialog von Lehrerin L11 liegt die Rechnung „7 + 8“ und zwei Stangen aus Steckkuben – welche sie selber gesteckt hat – auf dem Schülertisch.

L: Acht und wie viel gibt zehn? Zwei. Und wie viele bleiben von diesen Sieben übrig, wenn du zwei absteckst? (*Die Lehrerin* steckt zwei Kuben von der Siebner- an die Achterstange)

S: Wenn ich zwei von diesen wegnehme, bleiben noch fünf.

L: Mhm. Und jetzt zählst du die Fünf, die Fünf noch dazu. Zehn und fünf?

S: Fünfzehn.

L: Gibt fünfzehn (schreibt es dem Schüler aufs Blatt). Acht und sieben gibt auch fünfzehn. (L11, 21:52:26 - 22:13:15).

Bei solchen Situationen übernimmt die Lehrerin die kognitive Leistung, das vom Schüler aufzubauende Strukturbewusstsein verkommt zur Aktivität nach Rezeptur. Die Lerninhalte beschränken sich auf die Durchführung einer *diktierten* medialen Übersetzung (vgl. Kap. 2.3.2).

Die Ergebnisse können auch fehlende Kompetenzen bezüglich einer konstruktivistisch-dialogischen Lernbegleitung spiegeln. Diese beruht auf einer symmetrischen Beziehung zwischen gleichwertigen Partnern (vgl. Watzlawick, Beavin & Jackson, 1985): Die Lehrerin nimmt die subjektiven Erfahrungen des Lernenden ernst und rückt sie ins Zentrum der Interaktion (vgl. Rogers, 1974). Fragen, Anregungen oder neue Problemstellungen konfrontieren den Schüler mit *seinem* begonnenen Lernweg und geben ihm Ideen, wie er diesen produktiv fortsetzen kann. Das folgende *konstruierte* Beispiel stützt sich auf die oben angeführte Szene von Lehrerin L11. Es veranschaulicht eine konstruktivistische Variante dieser Lernbegleitung.

L: Sieben und acht. Erkläre mir, wie du vorgehst.

S: Ich nehme von den Sieben zwei weg und von den Acht drei.

L: Warum machst du das?

S: Damit ich zwei Fünfer zusammenstecken kann, das gibt ja zehn.

L: Ah, das ist eine interessante Lösung.

S: Und jetzt stecke ich die übrigen zwei und drei Kuben zusammen, das gibt fünf, zusammen sind es fünfzehn. (Konstruierte Variante 1 zum Ausschnitt von L11, 21:52:26 bis 22:13:15)

Im Gegensatz zur authentischen Lernbegleitung von L11 versucht die Lehrerin in diesem Beispiel herauszufinden, welchen Weg der Schüler geht. Ihr öffnet sich die Chance, den operativen Weg des Schülers zu begleiten. Bei Fehlern tritt der konstruktivistische Charakter der Unterstützung noch deutlicher hervor:

L: Sieben und acht. Erkläre mir, wie du vorgehst.

S: Gibt fünf.

L: Wie hast du das herausgefunden?

S: Ich habe das mit den Fingern so ausgerechnet.

L: Zeig mir, wie du das machst.

S: (Zählt acht Finger ab und beginnt beim neunten, sieben weiter zu zählen. Sobald zehn Finger gezählt sind, schliesst er beide Hände und zählt die restlichen fünf des zweiten Summanden. Am Schluss streckt er fünf Finger auf.)

L: Aha, du hast zuerst die acht gezählt und nachher die sieben. Dann ist fünf gleich viel wie sieben zählen und acht zählen?

S: Ja.

L: Kontrolliere das!

S: (Führt ein analoges Zählprozedere aus) Stimmt, gibt auch fünf.

L: Gibt sieben und acht mehr als sieben?

S: Ja sicher.

L: Hast du auch mehr als sieben bekommen?

S: Au nein, fünf ist weniger als sieben. Ah, ich weiss, ich habe die zehn vergessen, gibt fünfzehn. (Konstruierte Variante 2 zum Ausschnitt von L11, 21:52:26 - 22:13:15)

Bei der zweiten Variante geht die Lehrerin ebenfalls auf die Erfahrungen des Schülers ein und gibt weiterführende Impulse. Sie erfährt, wie die Lösungsstrategie des Schülers aussieht, welche Hilfsmittel er verwendet und mit welchen Techniken er zu seinen Ergebnissen gelangt.

Der Befund, dass bei der Lernbegleitung schwächerer Rechner die Belehrung vorherrscht, lässt sich in das begonnene Interpretationsmuster einfügen: Indem die Lehrerinnen schwachen Rechnern rezepthafte Anweisungen für ein Tun mit Materialien geben, nehmen sie ihnen die kognitive Leistung ab. Sie verstehen die Handlung als Aktiv- oder Tätigsein und nicht als operative Handlung, mit der sich *Schüler* mathematisches Wissen aktiv aneignen. Danach müsste der Schüler die mediale Übersetzung selber vornehmen, damit er Einsicht in die mathematisch-operative Struktur erhält (vgl. Kap. 2.3.2).

Zusammenfassung: Ergebnis B4 bestätigt die Belehrung schwächerer Rechner, bezüglich konstruktivistischer Begleitung besteht aber nur ein geringer Unterschied zu den stärkeren (B5). Der Befund lässt sich mit der Feststellung interpretieren, dass die konstruktivistische Lernbegleitung grundsätzlich selten vorkommt (B3). Mögliche Begründungen liegen in der fehlenden Handlungskompetenz der Lehrerinnen und in unterrichtlichen Hürden.

Ergebnisse B6 und B7

Die Qualität der Lernbegleitung ist keine Spiegelung der Einstellungskonzepte.

Zwischen den konstruktivistischen Einstellungskonzepten und den beiden Formen der Lernbegleitung besteht keine Wechselwirkung. Die Interpretation, eine konstruktivistische Unterstützung komme selten vor, weil den Lehrerinnen Handlungskompetenzen fehlen, greift nicht. Denn: Lehrerinnen mit einer konstruktivistischen Orientierung begleiten ihre Schüler weder konstruktivistischer, noch belehren sie weniger. Das Kompetenz-Argument würde stechen, wenn ein konstruktivistisches Einstellungskonzept nur mit geringerer Belehrung, nicht aber mit konstruktivistischer Lernbegleitung einher ginge.

Die Dissonanzen der Hypothesenpaare B4/5 und B6/7 sind über die Operationalisierung der Kategorien begründbar. Die definierten Kriterien beider Begleitungsformen erhellen Spitzen eines didaktischen Verhaltenskontinuums und vermögen nur wenige Äusserungen der einen oder anderen Kategorie zuzuordnen. Es erstaunt deshalb nicht, dass keine Zusammenhänge zwischen den Einstellungskonzepten und den didaktischen Handlungen bestehen. Wenn die Lehrerinnen auf mehreren Unterrichtsebenen Absichten verfolgen, greift die Codierung zu kurz. Sie führt zum Dilemma zwischen den auf der Verhaltensebene herausgelösten Sequenzen und dem Unterrichtskontext, in welchen die Interpretationen gestellt sind. Die mathematik-didaktische Forschung geht dieses Problem mit qualitativen Untersuchungsdesigns an. Mein Mittelweg zwischen quantitativen und qualitativen Forschungsmethoden lässt mich die Grenzen des einen und die Chancen des andern erfahren.

Ergebnisse B8 und B9

Die Dauer der konstruktivistischen Lernbegleitung ist in den Treatment- und Kontrollklassen gleich lang. Die Umsteigerinnen zeigen hingegen die Tendenz, weniger zu belehren als die Lehrerinnen der Kontrollgruppe.

Die Umsteigerinnen treten in der Lernbegleitung nicht konstruktivistischer hervor, vermutlich weil ihnen das didaktische Werkzeug fehlt (vgl. Kompetenz-Argument in Diskussion B4/B5). Das Fazit aus B4 und B5 (die schwächeren Rechnerinnen werden eher belehrt als die stärkeren und die konstruktivistische Lernbegleitung überwiegt bei stärkeren nur geringfügig) „passt" insofern gut zu den Ergebnissen B8/B9. Dass die Umsteigerinnen tendenziell weniger belehren als die Lehrerinnen mit kantonalem Lehrmittel erscheint plausibel, da sie sich konstruktivistischer orientieren.

Das Ergebnis überrascht aber, weil die Hypothesenprüfung B7 ein gegenteiliges Argument bringt: Die Zeitdauer der belehrenden Lernbegleitung ist bei konstruktivistischer eingestellten Lehrerinnen *nicht* kürzer. Es ist nahe liegend, hier den Faktor Lehrmittel ins Spiel zu bringen. Einerseits belehren die (konstruktivistischer eingestellten) Umsteigerinnen tendenziell weniger als die Kontrollgruppe (B9), andererseits lässt sich bei der konstruktivistischer eingestellten Gruppe keine geringere Belehrung nachweisen (B7). Diese Ungereimtheit begründe ich damit, dass die Impulse des Zahlenbuches bei den Übersetzungsversuchen der Umsteigerinnen stärker in kontra-belehrender Richtung wirken als bei Lehrpersonen, die das Lehrmittel nur sporadisch einsetzen. Zudem sind in beiden Gruppen, die nach dem Kriterium Einstellungskonzept gebildet wurden, Lehrpersonen, die schwergewichtig mit dem einen oder andern Lehrmittel arbeiten.

Als gesichert halte ich fest: Didaktische Handlungs*performanzen* korrelieren kaum oder nur partiell mit den Einstellungskonzepten. Bezüglich Belehrung besteht eine tendenzielle Wechselwirkung zum eingesetzten Lehrmittel.

Ergebnisse B10 und B11

Die Instruktionen in den Kontrollklassen orientieren sich stärker an der natürlichen Differenzierung als diejenigen in den Treatmentklassen. Bei den Umsteigerinnen überwiegen die qualitativen gegenüber den quantitativen Differenzierungsformen.

Bei der natürlichen Differenzierung dürfen Schüler angewiesene Aufgaben unterschiedlich angehen und eigene Ziele stecken (vgl. Kap. 2.2.4). Damit sie individuelle Zugangsweisen suchen, müssen die Instruktionen[139] ein breites Spektrum öffnen. Quantitative Formen überlassen es dem Schüler, wie viele Aufgaben er in einer vorgegebenen Zeit löst oder in welchem Zahlenraum er operiert. Qualitative Varianten geben der Auswahl von Anschauungsmaterialien, des Abstraktionsniveaus und des Schwierigkeitsgrades Spielraum. Obwohl das Zahlenbuch die (vom Kind ausgehende) natürliche Differenzierung favorisiert und als Differenzierungsprinzip empfiehlt, orientieren sich die Instruktionen in den Kontrollklassen stärker an der natürlichen Differenzierung als die Anweisungen der Umsteigerinnen (B10).

Das Ergebnis steht damit quer zu den Empfehlungen des Lehrmittels und zum Befund der tendenziell konstruktivistischer orientierten Umsteigerinnen (vgl. Hypothesen A1 und A5), die eher qualitative Formen der natürlichen Differenzierung bevorzugen, während das Verhältnis in den Kontrollklassen ausgewogen ist (B11). Diese Zusatzinformation relativiert die Interpretation von Hypothese B10: Die deutlich betontere natürliche Differenzierung in den Kontrollklassen kommt massgeblich durch quantitative Aspekte zu Stande und lässt sich auch unterrichtsorganisatorisch begründen. Dadurch, dass die Schüler die vorgegebene Zeit mit unterschiedlich vielen Aufgaben füllen, entsteht der Lehrerin der organisatorische Vorteil, dass sie nach abgelaufener Zeit einen gemeinsamen Themenwechsel vornehmen kann und für schnelle Rechner keine Zusatzaufgaben bereitstellen muss.

Wenn die Lehrerin Hausaufgaben oder Zeitnischen in anderen Fächern durch Nacharbeiten von (noch nicht gelösten) Aufgaben füllt, läge allenfalls eine *zeitlich-organisatorische* Differenzierung vor. Die Suche nach Motiven für die Variabilität der Anzahl Aufgaben stösst mit dieser Vermutung an interpretative Grenzen, da Verhaltensäusserungen während Einzellektio-

[139] Der Codier-Plan schreibt vor: Die Möglichkeiten müssen in der explizit formulierten Instruktion enthalten oder an der individuellen Arbeit der Schüler erkennbar sein. Falls im Unterricht eine natürlich differenzierte Lernkultur aufgebaut ist, so braucht die Lehrerin ev. nicht ausdrücklich zu formulieren, dass die Schüler mit verschiedenen Hilfsmitteln arbeiten dürfen.

nen keine lektionsübergreifenden Handlungsmotive aufzudecken vermögen.

Ich verweise auf die inhaltlich aussagekräftigeren Konsequenzen, welche die Lehrerinnen aus den heterogenen Vortestresultaten ziehen (vgl. Kap. 5.4.8). Dortige Anzeichen sprechen dafür, dass die natürliche Differenzierung ein echtes Anliegen ist, nur einzelne Aussagen weisen in Richtung organisatorischer Differenzierung. Die Daten[140] in Kapitel 5.3.7 sprechen eine klare Sprache: Unter der Frage A – warum sich die Lehrerinnen für das gewählte Thema der Lektion entschieden haben – geben 39% an, dass sie das Thema wegen der Reichhaltigkeit und der möglichen natürlichen Differenzierung wählten. 78% machten sich Gedanken, wie die Schüler die Aufgaben natürlich differenziert angehen können, für 67% der Lehrerinnen standen qualitative Differenzierungen im Vordergrund und 83% planten Aufgaben mit quantitativen Differenzierungsmöglichkeiten. Die Angaben spiegeln Einstellungen, Meinungen und Absichten und lassen sich auf der Verhaltensebene der Umsteigerinnen nicht in dieser Ausprägung feststellen. Selbst wenn das Quantitäten-Argument die überwiegendere natürliche Differenzierung der Kontrollklassen relativiert, bleibt unbeantwortet, warum die konstruktivistisch orientierten Umsteigerinnen die natürliche Differenzierung nicht in grösserem Stil realisieren. Sie entgegnen selber mit den Grenzen dieser Differenzierungsform (vgl. Kap. 5.2.6.3): „Vielen Schülerinnen gelingt es nicht, die Steuerung des Lernprozesses zu übernehmen und Freiräume selbstständig zu nutzen."

Ich drehe die Argumentation auf diejenigen Lehrerinnen, die sich für eine natürliche Differenzierung aussprechen (vgl. Kap. 5.4.8), sie aber nicht umsetzen. Die dafür verantwortlichen Gründe können in fehlenden didaktischen Kompetenzen oder diversen ungünstigen Umsetzungsbedingungen liegen.

Die Autoren des Zahlenbuchs favorisieren qualitative Differenzierungsmöglichkeiten, unabhängig vom Lernverhalten und Leistungsniveau der Schüler.

> Die gesamte Lerngruppe erhält ein ganzheitliches Themenangebot, das naturgemäss Aufgaben unterschiedlicher Schwierigkeitsniveaus umfasst. Die einzelnen Kinder wirken *nach ihren Fähigkeiten* bei der Lösung mit. Gerade für schulschwache Kinder ist dies ausserordentlich wich-

---

[140] Die Angaben beziehen sich auf 18 Lehrerinnen (11 in der Treatment- und 7 in der Kontrollgruppe) und verteilen sich gleichmässig auf beide Gruppen. Den Ergebnissen kann entnommen werden: 43% der Lehrerinnen, die mit dem kantonalen Lehrmittel unterrichten, setzen zusätzlich das Zahlenbuch ein. 46% der Umsteigerinnen nutzen auch das kantonale Lehrmittel (vgl. Ergebnisse zu letzter Frage unter D in Kap. 5.3.7).

> tig: Dadurch, dass sie die Freiheit haben, über die benutzten Hilfsmittel, die Rechenwege und die Form der Lösung selbst zu entscheiden, können sie ihre Lernvoraussetzungen selbst optimal einbringen und werden so am besten vorankommen. (Hengartner & Wieland, 1995, S. 12)

Es lassen sich auch Hinweise zu Kindern finden, die eine „besondere Lernbegleitung“ (ebd., S. 14) brauchen, damit sie Freiräume lerneffektiv nutzen können. Die aufgelisteten Fördervorschläge und die gut gemeinten Zugeständnisse, Lernschwierigkeiten würden bei allen Schülerinnen zum Lernprozess gehören und nicht von allen gleich schnell überwunden (ebd. S. 15), genügen den Lehrerinnen nicht, um den Unterricht didaktisch befriedigend natürlich zu differenzieren. Die Grundaussage und das dahinter liegende Menschenbild scheint bei den Lehrerinnen angekommen zu sein, ihre Botschaft können sie aber nur bedingt umsetzen.

Konsequenzen für die Weiterbildung: Sie ist gefordert, sich der praxisorientierten Umsetzung einer natürlichen Differenzierung anzunehmen und im didaktischen Kanon von diagnostischen, organisatorischen und stofflich-mathematischen Möglichkeiten zu durchleuchten.

Ergebnisse B12 und B13

Instruktionen mit natürlich differenzierten Angeboten sind nicht an konstruktivistische Einstellungskonzepte gebunden und enge Aufgabenstellungen hängen nicht mit behavioristischen Einstellungskonzepten zusammen.

Die Befunde belegen ein mehrfach genanntes Fazit aus Untersuchungsteil B: Die Einstellungskonzepte finden in den didaktischen Handlungen keine kohärente Entsprechung. Die Handlungen äussern sich eher in einem Gefüge zwischen differenzierten Absichten, unterrichtspragmatischen Möglichkeiten und didaktischen Kompetenzen.

Die Resultate B12/13 laden zur Vertiefung bereits formulierter Argumente ein und schliessen mit einem präzisierenden Hinweis zur Operationalisierung der Variablen *natürliche Differenzierung* und *enge Aufgabenstellung*.

Konstruktivistische Einstellungskonzepte genügen kaum für die Erklärung natürlich differenzierbarer Instruktionen. Auch das Kompetenz-Argument greift nicht, weil der Zusammenhang zwischen behavioristischen Einstellungskonzepten und engen Aufgabenstellungen fehlt[141]. Ich

[141] Die Diskussion B6/7 führt aus, dass der Zusammenhang zwischen der behavioristischen Orientierung und der didaktischen Handlung fehlt.

fasse das Argument weiter, damit es der Begründung des Ergebnisses B12 Stand hält.

Die Ergänzung lautet in Thesenform: Konstruktivistisch orientierte Lehrerinnen differenzieren den Unterricht natürlich, wenn sie über die notwendigen Kompetenzen verfügen *und* die Lernkompetenzen der Schüler als ausreichend erachten. Neben die didaktischen Handlungskompetenzen gesellen sich auch die eingeschätzten Lernbedingungen. Fehlen den Lehrerinnen die Handlungskompetenzen, lassen sich auftauchende Schwierigkeiten auch mit mangelnden Lernkompetenzen der Schüler erklären. Umgekehrt erfordert die natürliche Differenzierung derart hohe Lernkompetenzen, welche es vorerst aufzubauen gilt.

Es besteht kaum ein Zweifel: Die Lehrerinnen wollen einen natürlich differenzierten Unterricht realisieren (vgl. Kap. 5.3.7). Das erweiterte Kompetenz-Argument ist eine mögliche Erklärung dafür, warum ein Nachweis des Zusammenhangs zwischen einer natürlichen Differenzierung und einem konstruktivistischen Einstellungskonzept ausbleibt.

Auch eng formulierte und dem Schüler keinen Spielraum für eigene Lösungsmöglichkeiten lassende Aufträge sind nicht an eine behavioristische Orientierung gebunden. In ähnlicher Richtung zeigt die Dauer des Frontalunterrichts und der individuellen Lernbegleitung, die in beiden nach Einstellung gebildeten Gruppen vergleichbar ist (vgl. B1).

Abschliessend hinterfrage ich die Operationalisierung der beiden Variablen *enge Aufgabenstellungen* (IN5) und *natürliche Differenzierung* (IN0 bis IN3). Ich mache sie mitverantwortlich für die Ergebnisse in Hypothesen B10 bis B13, welche keinen Zusammenhang zwischen Lehrmittel, Einstellungskonzept und den Instruktionen erkennen lassen. Die Codes wurden während der Sprechdauer vergeben, während der die Lehrerinnen Instruktionen an die Klasse richten. Es ist möglich, dass eine Lehrerin z.B. ausführlich instruiert und die Schüler nur kurze Zeit natürlich differenziert arbeiten. Gemessen und verglichen wurden Instruktionszeiten und nicht die Dauer, während der die Kinder lernen. Die Begründung für die einseitige Operationalisierung liegt bei der Datenerhebung (vgl. Kap. 5.3.3), welche primär das Interaktionsgeschehen zwischen der Lehrerin und den Schülern fokussiert und nicht auf die ganze Klasse und das Unterrichtsgeschehen gerichtet ist.

5.4 Erweiterung der mathematischen Schülerkompetenzen

5.4.1 Funktion der Erhebung

Der Untersuchungsteil C erhellt, ob die Schüler im Unterricht mit dem Zahlenbuch und dem Thurgauer Rechenbuch vergleichbare mathematische Kompetenzen erwerben. Damit wechsle ich auf die Schülerebene und prüfe zwei Kerngeschäfte des elementaren Mathematik-Unterrichts: Die mathematische Modellierung von Sachsituationen und die Fertigkeit, Additionen und Subtraktionen im Zahlenraum bis 20 durchzuführen.

Die lehrmittelbezogenen Vergleichskriterien beinhalten ...

- die erworbenen Kompetenzen im Umgang mit bildlich und formal gestellten Aufgaben,
- die Leistungsentwicklung schwächerer Rechner und
- die begangenen Plusminuseins-Zählfehler.

Ausserhalb des Kriteriums Lehrmittel interessiert die Beziehung zwischen der didaktischen Einstellung der Lehrerinnen und der Leistungsentwicklung der Schüler. In der Ergebnisdiskussion frage ich zurück, inwiefern zwischen den Einstellungskonzepten und dem didaktischen Handeln eine Kohärenz besteht. Schliesslich ziehen die Lehrerinnen aus den Ergebnissen der mathematischen Vortests didaktische Konsequenzen. Sie bereichern damit die Argumente der bewerteten Belief-Items (vgl. Kap. 5.2.6).

5.4.2 Testinstrumente

Die Messung der mathematischen Schülerleistungen erfolgte zweimalig, als Vortest anfangs und als Nachtest Ende erster Klasse. Der *Vortest*[142] wurde in Zusammenhang mit aktiv-entdeckendem Unterricht in den Niederlanden entwickelt (van den Heuvel-Panhuizen, 1995) und erreichte im deutschsprachigen Raum einige Publizität, vor allem durch seinen Einsatz in einer deutschen (Selter, 1993, 1995b) und in einer Schweizer Studie (Hengartner & Röthlisberger, 1994, 1995). Die beiden Schweizer erwähnen (1995, S. 70), dass die Aufgaben 8 bis 13 nicht für den Schulanfang, sondern als Lernzielüberprüfung gegen Ende des ersten Schuljahres gedacht sind. Sie finden im Vortest Aufnahme, damit die Kompetenzunterschiede der Schüler mit heterogenen Leistungsprofilen hervortreten und bei den Lehrerinnen didaktische Konse-

[142] Die 13 bildlichen Aufgabenstellungen des Vor- und Nachtests lassen sich in Anhang C nachschlagen.

quenzen provozieren (vgl. Kap. 5.4.8)[143].

Der *Nachtest* ist mit 14 bildlichen Aufgabenstellungen und 20 formalen Rechnungen zweigeteilt. Im Bildteil erscheinen zwei identische (Kerzen- und Büchsenaufgabe) und die strukturgleiche Flipperaufgabe aus dem Vortest (dasselbe Bild mit anderen Zahlen). Da die Nachtest-Aufgabe 11 als zusätzliche Schwierigkeit eine Addition mit Zehnerübergang[144] verlangt, prüfe ich mit Hypothese C5 lediglich die identischen Aufgaben (Nr. 4, 5) und die Flipperaufgabe 12 des Nachtests.

Im Formalteil liegen vier nummerierte Einheiten mit zweimal sechs und zweimal vier Aufgaben vor. Die ersten beiden Einheiten bestehen aus je sechs willkürlich zusammengestellten Additionen und Subtraktionen im Zahlenraum bis 30 bzw. 27. Die je vier Aufgaben unter Nr. 17 und 18 erinnern an operativ strukturierte Übungen (vgl. Kap. 3.4.2). Je zwei Aufgaben bilden eine Einheit, die erste Rechnung ist bereits gelöst und kann der Partneraufgabe zum Ableiten des Ergebnisses dienen. Unter Aufgabe 17 steht z.B. das Rechenpaar „15 + 3 = 18, 3 + 15 = ?“, bei dem das zweite Ergebnis über das Kommutativgesetz ermittelbar ist.

5.4.3 Testdurchführung und -auswertung

Der Versand des *Vortests* erfolgte über den Postweg. Die Instruktionen beinhalten, dass ...

- möglichst eine Durchführung in Kleingruppen anzustreben ist,
- die Schüler den Test als Einzelarbeit lösen und
- einen Bleistift, Radiergummi und die Testblätter benötigen,
- die Lehrerin die schriftlich formulierten Instruktionen (ev. in Dialekt) wiedergibt und
- keine zusätzlichen Erklärungen, Hilfen oder Materialien[145] anbietet (vgl. Anhang C).

Die Durchführungsdauer war unbeschränkt, sie betrug de facto maximal 45 Minuten.

[143] Die Aufgaben und deren Anforderungen bespricht Kapitel 5.4.7.

[144] Der Zehnerübergang betrifft Additionen, bei denen von der ersten in die zweite Dekade gerechnet wird (z.B. „7 + 5“) bzw. bei Subtraktionen in umgekehrter Richtung (z.B. „12 – 5“).

[145] Obwohl die Testinstruktion keine zusätzlichen Materialien (z.B. als Zählhilfen) vorsieht, zeigte sich während der Videostudie folgendes Bild: In 7 der 12 Treament- und in 3 der 7 Kontrollklassen klebten die Zwanzigerfelder auf den Schülerpulten (bzw. ein zerschnittener Zwanzigerstreifen mit eingeschriebenen Zahlsymbolen). Es ist wahrscheinlich, dass die Schüler diese nutzten.

Mit der Instruktion des *Nachtests* erhielten die Lehrerinnen einen Beobachtungsauftrag, den sie während der Durchführung erfüllten und damit auch eine Kontrollfunktion ausübten. Im Zentrum der Nachtest-Auswertung steht die Ermittlung richtig gelöster Aufgaben und der Anzahl von plusminuseins Abweichungen zu regulären Ergebnissen (vgl. Wagner & Wacker, 1991; Wagner & Kornmann, 1992). Der Pluseins-Zählfehler ist in der Addition z.B. als „5 + 3 = 9“ identifizierbar, der Minuseins-Zählfehler als „5 + 3 = 7“. In der Subtraktion kehrt sich das Phänomen des Pluseins-Zählfehlers insofern, als das Resultat um eins zu klein ist (z.B. „9 – 3 = 5“) und beim Minuseins-Zählfehler um eins zu gross („9 – 3 = 7“; vgl. Kap. 3.2.1).

5.4.4 Stichprobe

Den Vor- und Nachtest führten 30 Lehrpersonen mit ihren Erstklässlern zu den Zeitpunkten t2 und t6 durch (August 1998, erste Schulwoche und Juni 1999). 23 Treatmentklassen (334 Schüler) arbeiteten hauptsächlich mit dem Zahlenbuch, 7 Kontrollklassen (93 Schüler) mit dem Thurgauer Lehrmittel. In der Treatmentgruppe befindet sich eine Einführungsklasse, welche den Lernstoff des ersten Schuljahres auf zwei Jahre verteilt. Die Schüler dieser Klasse bleiben in der Auswertung einbezogen, weil sie Ende Schuljahr ebenfalls vor dem Übertritt in eine zweite Regelklasse standen. Die Klassengrössen differieren zwischen 6 und 25 Schülerinnen, weil die Stichprobe aus ein- zwei- und dreistufigen Klassen besteht (vgl. Tab. 13).

Insgesamt lösten 427 Schüler und Schülerinnen beide Tests. Eine Kontrollklasse mit 8 Schülern wurde aus der Auswertung des Vortests ausgeschlossen, weil sie diesen mit einiger Verspätung durchführte. In der Deutschschweiz erfolgt der Schuleintritt in der Regel im Alter von sieben Jahren.

Tabelle 13: Anzahl und Grössen der Klassen, welche den Vor- und Nachtest lösten

Anzahl Schüler pro Klasse	Klassen mit ZB[a]	Klassen mit TG-RB[b]	Total Klassen
6 bis 9	4	2	6
10 bis 19	12	3	15
20 bis 25	6	3	9
Total Schüler N = 419[c]	N = 23	N = 7	N = 30

Anmerkungen: [a] ZB ist die Abkürzung für das Zahlenbuch. [b] TG-RB bezeichnet das Thurgauer Rechenbuch. [c] 334 Schüler arbeiteten mit dem Zahlenbuch und 93 mit dem Thurgauer Rechenbuch.

5.4.5 Hypothesen zum Untersuchungsteil C

Die Hypothesen zu den Mathematikleistungen vergleichen primär die Lerneffizienz des Unterrichts mit dem einen und dem andern Lehrmittel. Neben der pauschalen Frage nach ebenbürtigen Testleistungen (C1) interessieren ...

- die Kompetenzen im Umgang mit bildlich repräsentierten Aufgaben (C2),
- die begangenen Plusminuseins-Zählfehler (C3),
- die Leistungsentwicklung schwächerer und stärkerer Rechnerinnen (C4) und
- die Beziehung zwischen dem Einstellungskonzept der Lehrpersonen und der Leistungsentwicklung der Schüler (C5).

Hypothese C1 prüft den Zusammenhang zwischen der Erweiterung mathematischer Schülerkompetenzen und dem eingesetzten Lehrmittel. Ich nehme in beiden Schülergruppen vergleichbare Leistungsfortschritte an, weil die quantitative Auswertung mögliche Kompetenzunterschiede vermutlich nicht hervortreten lässt:

Hypothese C1

Die beiden Schülergruppen schneiden im Nachtest vergleichbar ab.

Die Hypothesenprüfung setzt gleiche oder ähnliche Vortestresultate der beiden Gruppen voraus, damit auf Grund des Nachtests Vergleichsaussagen möglich sind. Bezüglich der beiden Teilstichproben gibt es keinen Anlass, Unterschiede in den Vortestleistungen anzunehmen, da die Kinder aus vergleichbaren Gegenden stammen. Falls sozio-demografische Unterschiede zwischen den Klassen vorliegen, dürften sich diese auf beide Gruppen gleichmässig verteilen.

Die Hypothesen C2 und C3 fokussieren den Bild- und Formalteil des Nachtests getrennt:

Hypothese C2

Hauptsächlich mit dem Zahlenbuch arbeitende Schülerinnen zeigen im Bildteil[146] des Nachtests bessere Leistungen als Schülerinnen der Kontrollgruppe.

Die Begründung für den angenommenen Unterschied liegt bei einem Akzent des Zahlenbuchs, der die Schülerinnen mit realen Situationen und bildlichen Darstellungen konfrontiert.

[146] Der Bildteil bezieht sich auf die Aufgaben 1 bis 14.

Hypothese C3

Die Schüler beider Untersuchungsgruppen machen im Formalteil[147] des Nachtests unterschiedlich viele Zählfehler.

Da Erstklässler vorwiegend zählend rechnen, schliesse ich aus den Fehlern auf die Zählkompetenzen. Die Hypothesenprüfung lässt über die Verfügbarkeit alternativer mathematischer Strategien keine Aussagen zu, da hinter richtigen Resultaten sichere Zählstrategien *oder* denkendes Rechnen liegen können.

Hypothese C4 vergleicht, ob der Unterricht mit dem Zahlenbuch stärkeren *und* schwächeren Rechnern gerecht wird:

Hypothese C4

Die schwachen und die starken Vortest-Rechner zeigen in beiden Schülergruppen vergleichbare Nachtestleistungen.

Eine Bewährung der Hypothese liesse aussagen, dass schwächere und stärkere Schüler unabhängig vom eingesetzten Lehrmittel einen Lerngewinn aus dem Unterricht ziehen. Vertieftere Aussagen bedürfen zusätzlicher Informationen, z.B. inwiefern die Lehrerinnen nach der Konzeption des hauptsächlich eingesetzten Lehrmittels arbeiten oder welche Differenzierungsformen im Unterricht überwiegen[148].

Hypothese C5 leite ich aus der Frage ab, ob Unterschiede im Einstellungskonzept der Lehrpersonen auf die Kompetenzerweiterung der Schüler wirken:

Hypothese C5

Bei konstruktivistisch eingestellten Lehrpersonen lernen die Schüler mehr.

Obwohl die Videostudie keine Kohärenz zwischen Einstellungskonzepten und didaktischen Handlungen nachweist, nehme ich bei Schülern von konstruktivistisch orientierten Lehrerinnen grössere Fortschritte an, weil sie verstehensbasiertes Lernen unterstützen (vgl. Kap. 5.3).

[147] Der Formalteil bezieht sich auf die symbolisch gestellten Aufgaben 15 bis 18, insgesamt sind dies 20 Einzelaufgaben.

[148] Die in 5.3.7 und 5.4.8 enthaltenen Zusatzinformationen sind in die Ergebnisdiskussion (Kap. 5.4.9) integriert.

5.4.6 Statistische Hypothesenprüfung

C1 t2: Sind die Nachtestleistungen der beiden Schülergruppen vergleichbar?[149]

Im Vortest lösten die Treatmentschüler durchschnittlich 7.0 Aufgaben richtig (SD = 2.7, n = 334) und die Schüler der Kontrollgruppe 7.3 (SD = 2.9, n = 85). Der U-Test weist keine signifikanten Unterschiede zwischen den Leistungen beider Schülergruppen nach (U = 13 437.5, p = .45 > .05).

Im Nachtest liegt der Mittelwert der Treatmentschüler bei 27.1 richtig gelösten Aufgaben (SD = 4.5, n = 334), derjenige der Kontrollschüler bei 26.1 (SD = 5.9, n = 93). Die Prüfung deutet auf vergleichbare Leistungsfortschritte hin (U = 14 454.5, p = .31 > .05).

C2 t6: Lösen die Treatmentschüler im Nachtest-Bildteil mehr Aufgaben richtig als die Kontrollschüler?

Die 334 Schüler der Treatmentgruppe reüssierten bei durchschnittlich 10.2 Aufgaben (SD = 2.2) und die 93 Schüler der Kontrollgruppe bei 9.5 (SD = 2.8). Obwohl die Mittelwerte nahe zusammen liegen, stellt sich ein signifikanter Unterschied zwischen den beiden Gruppen heraus (U = 13 465.0, p = .048 < .05). Der Grund liegt darin, dass der U-Test die Rangpositionen vergleicht und nicht die erzielten Punktwerte.

Deutlicher fällt das Ergebnis aus, wenn ich aus beiden Gruppen die schwächeren 50% aus dem Vortest mit den Leistungen des Nachtest-Bildteils vergleiche. Der Durchschnitt richtig gelöster Bildaufgaben beträgt bei den Treatmentschülern 9.2 (SD = 2.4, n = 148) und bei der Vergleichsgruppe 7.7 (SD = 2.6, n = 34). Schwächere Rechner, die mit dem Zahlenbuch arbeiten, zeigen beim Lösen bildlich gestellter Aufgaben signifikant grössere Kompetenzen als diejenigen der Kontrollgruppe (U = 1 642.0, p = .00 < .05).

Der Vergleich mit dem Formalteil ergibt: Die schwächeren Treatmentschüler lösen durchschnittlich 15.9 Aufgaben richtig (SD = 3.7), die leistungsmässig vergleichbare Kontrollgruppe 15.3 (SD = 4.5). Dieser Unterschied ist nicht signifikant (U = 2 413.5, p = .71 > .05).

[149] Die Zeitpunkte t2 und t6 betreffen die Testdurchführungen: August 1998 und Juni 1999. Der Vortest besteht aus 13, der Nachtest aus 34 Aufgaben (14 im Bild- und 20 im Formalteil).

C3 t6: Machen die beiden Schülergruppen unterschiedlich viele Zählfehler?

Die 334 Schüler der Treatmentgruppe produzierten durchschnittlich 1.14 Plusminuseins-Zählfehler (*SD* = 1.56) und die 93 Kontrollschüler 0.84 (*SD* = 1.57). Es zeigt sich eine Tendenz mit mehr Zählfehlern in der Treatmentgruppe (U = 13 779.0, p = .07 > .05).

C4 t6: Haben schwache und starke Rechner lehrmittelbezogen gleiche Lernchancen?

Die Stichprobenbildung erfolgt mit der Splithalfmethode nach dem Kriterium der Vortestleistungen. Die schwächeren 50% der Treatmentschüler lösten im Vortest durchschnittlich 4.5 Aufgaben richtig (*SD* = 1.5, n = 148), die Vergleichsschüler 4.4 (*SD* = 1.5, n = 34). Der U-Test weist vergleichbare Vortestleistungen nach (U = 2 441.5, p = .78 > .05).
Im Nachtest lösten die schwächeren Rechner der Treatmentgruppe durchschnittlich 25.1 Aufgaben richtig (*SD* = 5.2) und die Vergleichsschüler 23.0 (*SD* = 6.0). Es ist eine Tendenz erkennbar, nach der die schwächeren Rechner im Unterricht mit Zahlenbuch grössere Leistungsfortschritte erzielten als Vergleichsschüler der Kontrollgruppe (U = 1990.0, p = .06 > .05).

Mit den stärkeren 50% der Vortest-Rechenleistungen erfolgt dasselbe Prozedere. Die Treatmentschüler lösten im Vortest durchschnittlich 9.0 Aufgaben richtig (*SD* = 1.6, n = 186), die Vergleichsschüler 9.2 (*SD* = 1.8, n = 51). Die Prüfung weist auch bei den stärkeren Gruppen vergleichbare Vortestleistungen nach (U = 4 523.0, p = .61 > .05).

Beim Nachtest waren die Treatmentschüler bei durchschnittlich 28.7 Aufgaben erfolgreich und die Kontrollschüler bei 27.9 Aufgaben. In den beiden stärkeren Rechnergruppen sind die Leistungsfortschritte ebenbürtig (U = 4 721.5, p = .96 > .05).

C5 t6: Korreliert eine konstruktivistische Grundeinstellung mit höheren Lerneffekten?

Die Hypothesenprüfung erfolgt (a) mit den zum Zeitpunkt t1 gemessenen Werten des Einstellungskonzeptes und (b) mit dem Durchschnittswert beider Erhebungen (Messzeitpunkte t1 und t5). Die Leistungsfortschritte der Schüler werden an drei Aufgaben (Flipper-, Büchsen- und Kerzenaufgabe) gemessen, die im Vor- und Nachtest identisch oder strukturgleich vorkommen. Da die Anzahl der Aufgaben gering ist und ausschliesslich Bildaufgaben beteiligt sind, wird die Hypothese zusätzlich (c) durch einen standardisierten Vergleich mit den gesamten Testleistungen geprüft. Schliesslich kontrolliere ich (d) den Einfluss Klassengrösse auf die

Wechselwirkung zwischen Einstellungskonzept und Leistungsfortschritt.

a) In die Korrelationsberechnung werden die Differenzwerte der Aufgaben (Anzahl richtig gelöster Aufgaben zum Zeitpunkt t6 minus derjenigen zum Zeitpunkt t2) und die Werte des Einstellungskonzeptes zum Zeitpunkt t1 einbezogen. Nach Pearsens Rho korreliert die konstruktivistische Grundeinstellung nicht mit höheren Lerneffekten (r = .06, p = .37 > .05).

b) Das zweite Prozedere mit dem arithmetischen Mittelwert der beiden Einstellungskonzept-Messungen bestätigt das Resultat: Zwischen dem Einstellungskonzept der Lehrperson und der Kompetenzerweiterung der Schüler ist kein Zusammenhang zu finden (r =.10, p =.61 > .05).

c) Anstelle der identischen Aufgaben bestimmt die Differenz zwischen den Prozentrangwerten des Vor- und Nachtests den Lerneffekt. Auch die Korrelation zwischen Einstellungskonzept und den Differenzen der Prozentränge führt zum selben Ergebnis: (r = .11, p = .57 > .05).

d) Es stellt sich die Frage, inwiefern die Klassengrössen für die nicht vorhandenen Wechselwirkungen verantwortlich sind. Die Antwort ist klar: Auch unter Einbezug der unterschiedlichen Schülerzahlen ist keine Korrelation nachweisbar (r = .02, p = .92 > .05). Die fehlenden Zusammenhänge lassen sich also nicht mit unterschiedlichen Klassengrössen begründen.

5.4.7 Mathematische Kompetenzen der Schulanfänger

Neben den quantitativen Vergleichen sollen auch die konkreten Kompetenzen der Schulanfänger zur Darstellung kommen. Die erbrachten Leistungen im Vortest unterstreichen, dass der mathematische Erstunterricht nicht bei „Stunde Null" (Selter, 1995b) beginnen muss, da viele Schüler bereits bei Schuleintritt über erstaunliche Kompetenzen verfügen.

Untersuchungen von Selter (1993) und Hengartner und Röthlisberger (1994) ergaben, dass sich die Lehrpersonen dessen zu wenig bewusst sind. Sie baten erfahrene Lehrpersonen um Prognosen, wie gross der Anteil einer *fiktiven* ersten Klasse sei, welcher die einzelnen Aufgaben erfolgreich löse. Die Experten-Lehrerinnen trauten den Schulneulingen in beiden Studien deutlich geringere Kompetenzen zu, als diese im Test tatsächlich zeigten. Die 30 Thurgauer Erstklass-Lehrerinnen gaben zum Vortest ebenfalls Prognosen ab, wie viele Schüler ihrer *eigenen* Klasse die einzelnen Aufgaben richtig lösen. Die Ergebnisse[150] unterscheiden sich von

[150] Die beiden genannten Untersuchungen waren nur einer Lehrerin (L28) bekannt.

den Befunden der beiden anderen Untersuchungen (vgl. Abb. 27).

Gesamthaft liegen die Einschätzungen nahe bei den effektiven Schülerleistungen, durchschnittlich waren sie sogar leicht überhöht (3%). Bei 10 Aufgaben erfüllten die Schüler die Vermutungen der Lehrpersonen nicht. Die Prognosen in kleinen Klassen liegen eher näher bei den tatsächlich erzielten Ergebnissen als bei grossen. Als Hauptgrund für diese Tendenz und das Gesamtresultat vermute ich, dass die Thurgauer Lehrerinnen die Hochrechnung mit den eigenen Schülern anstellten[151], was in den beiden anderen Studien nicht möglich war. Ab Aufgabe 6 sind die Unterschiede zwischen den Prognosen und den effektiven Leistungen etwas grösser (ausser bei Aufg. 10). Die Aufgaben 7, 9 und 12 fallen in Richtung Überschätzung auf, andererseits liegt die Erfolgsquote von Aufgabe 13 um 13% höher als deren Prognose.

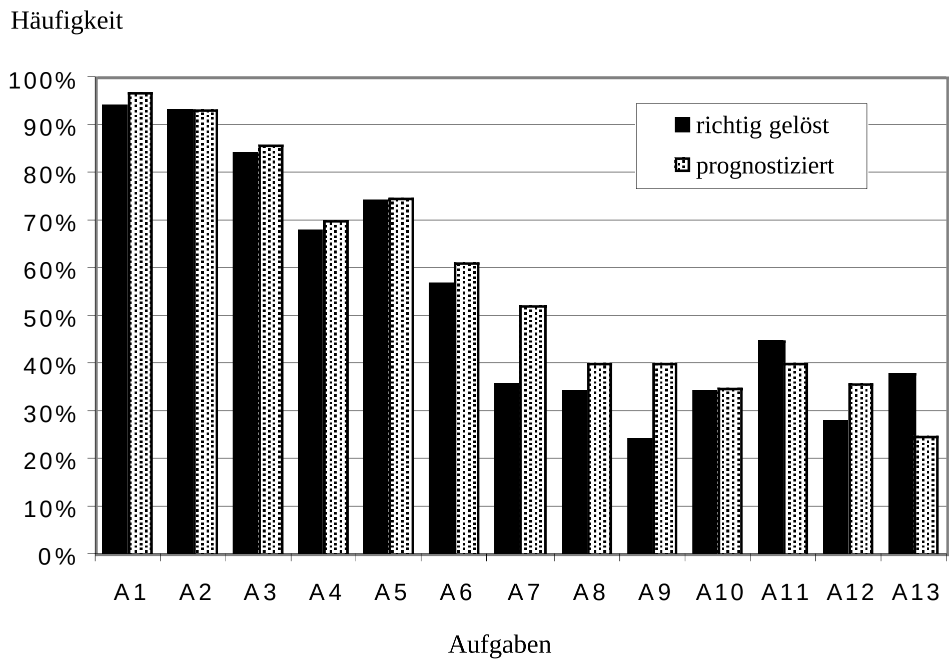


Abbildung 27: Häufigkeiten richtig gelöster Aufgaben und Lehrerinnen-Prognosen im Vortest

Vor diesem Hintergrund interessieren die Anforderungen der einzelnen Aufgaben bzw. die darin gezeigten Schülerkompetenzen. Die Aufgaben erfordern unterschiedliche operative Basiskompetenzen aus dem pränummerischen Bereich (vgl. Ginsburg & Opper, 1998; Stendler-Lavatelli, 1976), auf welche ich hier aber nicht eingehe. Der Vergleich zwischen den mathe-

[151] Im Interview bestätigten 15 von 30 Lehrerinnen, dass sie für die Hochrechnung einzelne Kinder vor das geistige Auge führten.

matisch-nummerischen Anforderungen (vgl. Tab. 14) und den erfolgreich gelösten Aufgaben (vgl. Abb. 27) lassen die Kompetenzen erahnen, welche die Schulanfänger in den Mathematik-Unterricht mitbringen. Aufgabe 8 beinhaltet z.B. die bildliche Sachsituation *Geldbörse mit der Aufschrift 15, daneben liegen ein Buch, Schreibstifte und eine Brille mit je einem Preisschild.* Die Schüler können beliebige und beliebig viele Dinge zum Kaufen auswählen. 34% aller Kinder gelang die Ermittlung eines korrekten Preises und des Restgeldes. Davon wählten 44% zwei oder drei Gegenstände aus.

Die Leistungen der Mädchen und Jungen sind bei Aufgaben 1 bis 5 mit je 85% richtiger Lösungen vergleichbar. Die Jungen bewältigten hingegen die Aufgaben 6 bis 13 mit 44% korrekter Resultate erfolgreicher als die Mädchen (mit 35%).

Tabelle 14: Erforderliche Schülerkompetenzen bei den Aufgaben des Vortests

Verlangte Kompetenzen	**Aufgaben-Nr.**
Grösser/kleiner-Unterscheidung visualisierter Objekte	1
Kenntnis der Zahlsymbole von 1 bis 9	2 bis 12
Kenntnis der Zahlsymbole 10, 15, 18, 20	7 bis 10, 13
Vorwärts zählen bis 5, 6, 7, 18, 12[a]	3, 5, 6, 10, 11
Rückwärts zählen von 8, 10, 15[a]	4, 7, (8 und 9)
Mathematisch-operative Modellierung von Sachsituationen	5 bis 13
Operationsverständnis für Addition und Subtraktion	5 bis 13
Addition und Subtraktion durchführen, ohne angebotene Zählhilfe[b]	6 bis 11, ohne 10
Addition oder Subtraktion mit mehreren Summanden durchführen	8, 11
Bewältigung des Zehnerüberganges	8 bis 11, 13
Verständnis für Halbieren von Mengen und geometrischen Figuren und Zuordnung zu nummerischen (Geld-) Werten	12, 13

Anmerkungen: [a] Die Zahlen entsprechen den zugehörigen Aufgabennummern in derselben Reihenfolge. [b] Die Zählhilfe betrifft das Angebot in der Aufgabe. Die Testinstruktion sieht keine zusätzlichen Begleitmaterialien vor.

54 Kinder (13%) lösten höchstens 3 Aufgaben richtig. Sie müssen im Verlauf des Schuljahres jene Kompetenzen erwerben, über welche die 76 Kinder (18%) mit 11 und mehr richtigen Aufgaben bereits bei Schulbeginn verfügen (vgl. Tab. 15). Die heterogenen Testleistungen bedingen also bereits im Erstunterricht individuell angepasste Lernangebote. Die moderne

Mathematik-Didaktik schlägt dazu Lösungsansätze vor, die in Richtung natürlicher Differenzierung, substanzieller Lernumgebungen und diagnostischer Aufgaben weisen (Hengartner & Röthlisberger, 1994, 1995; Selter, 1993, 1995b; Voigt, 1994, Schipper, 1998).

Tabelle 15: Anzahl richtig gelöster Aufgaben im Vortest: Ergebnisse der Schüler

Anzahl richtig gelöster Aufgaben	Anzahl Schüler	Häufigkeit in %
0	6	1.4
1	6	1.4
2	15	3.6
3	27	6.5
4 bis 10	289	69.0
11	39	9.3
12	21	5.0
13	16	3.8
	N = 419	100

Auch bezogen auf Schülerinnen mit geringen mathematischen Vorkenntnissen liegen differenzierte Studien und diagnostische Konzepte vor (z.B. Grissemann & Weber, 1990; Grissemann, 1996; Kornmann & Schäffler, 1988; Lobeck, 1992; Lorenz, 1983, 1984, 1988, 1990), ihnen stehen aber nur wenige unterrichtstaugliche Ansätze gegenüber (Lorenz & Radatz, 1993, S. 29). Die didaktischen Vorschläge verweisen rasch auf heilpädagogische Förderangebote, da die Bedingungen für deren Umsetzung im Klassenunterricht häufig nicht ausreichen.

5.4.8 Lehrerinnen ziehen didaktische Konsequenzen

Die Lehrerinnen wurden gebeten, aus den Vortestresultaten ihrer Klasse didaktische Konsequenzen zu ziehen. Die standardisierte Interviewfrage lautete: *Welche methodisch-didaktischen Konsequenzen ziehst du aus diesen[152] unterschiedlichen Schülervoraussetzungen?*

Die folgende Darstellung[153] unterteilt die Antworten der Lehrerinnen in vier Kategorien:

- Didaktische Konsequenzen für die schwächeren Rechner
- Didaktische Konsequenzen für die stärkeren Rechner
- Ergänzende Aussagen zur Differenzierung

[152] Ich legte den Lehrerinnen eine Grafik mit dem Leistungsprofil der Klasse vor, an Hand derer zuvor eine Besprechung der Schülerergebnisse stattgefunden hatte.

[153] Die Auswertungsmethode des Interviews ist in Kapitel 5.2.6.2 dargestellt.

- Einführung in den Zahlenraum

In der Auswertung wird jeder Vorschlag mit einem abgrenzbaren, eigenständigen Inhalt wiedergegeben und mit Quellenangabe belegt. Ich verzichte weitgehend auf eine Quantifizierung der Aussagen, welche mit ähnlichem oder gleichem Inhalt auf eine Paraphrase fallen.

Den Antworten steht eine allgemeine Reaktion voran: Ein ratloses Achselzucken und ein Ausdruck von *Das-ist-nichts-Aussergewöhnliches*. Als erste spontane Konsequenz nennen einige Lehrerinnen, *es sei halt schwierig, jedem Schüler gerecht zu werden*. Eine weitere Tendenz ist darin festzustellen, dass die Aufmerksamkeit v.a. den *schwächeren Rechnern* gilt.

Didaktische Konsequenzen für die schwächeren Rechner

Lehrerin L1 schlägt *einen obligatorischen Förderkurs zum Erwerb der Ziffernkenntnis* vor, welcher ausserhalb der regulären Schulzeit angeboten werde. Sie gibt auch *zusätzliche Hausaufgaben mit spielerischen Übungen.* Im Unterricht sieht sie (gemeinsam mit einigen anderen Lehrpersonen) vor, dass die *Kinder mit bescheideneren mathematischen Voraussetzungen weniger Aufgaben lösen* müssten, aber *Einführungen und gewisse Grundübungen wären für alle verbindlich. Eine Zielorientierung und Möglichkeiten, Erfolgserlebnisse zu erfahren*, ist für sie ein Grundprinzip, das jeglichen methodisch-didaktischen Massnahmen vorangestellt werde. Lehrerin L9 erklärt an einem Beispiel die Bedeutung der Hausaufgaben. Sie schildert eine *schwache Schülerin, die zu Hause das Rückwärtszählen üben* müsse, *damit es plötzlich auswendig geht.* Die Paraphrase wird im originalen Wortlaut konkreter:

> Man merkt es immer noch, dass sie im Rechnen unsicher ist. Gerade jetzt beim Rückwärtszählen. Sie mussten jetzt gerade von 20 an rückwärts zählen können bis 0 von 20, also von 20 bis 0, weil wir ja jetzt im zweiten Zehner sind – das [Zahlen-]Buch geht ja so weit – und da hat sie einfach noch Mühe. Und da sagte ich: Du musst halt üben zu Hause, das Mami soll manchmal abhören, vielleicht ein wenig helfen oder dann schaust du mit dem Streifen. Plötzlich kannst du es dann auch auswendig. Und das macht sie dann schon. Sie ist dann doch eine Gewissenhafte, die sich dann Mühe gibt. (L9, 138-145)

Die Lehrerin ergänzt, sie *unterrichte viel frontal* und *bevorzuge die Einzelarbeit gegenüber Gruppenarbeiten, damit sie eine bessere Übersicht über den Stand der Klasse hätte.*

Lehrerin L5 meint, *die natürliche Differenzierung sei natürlich* und *stelle sich sowieso ein, also auch bei den Schwächeren.* Dies werde *sichtbar an den unterschiedlichen schriftlichen Resultaten.* Das Fazit von L7 schliesst ebenfalls alle Schülerinnen ein, da *ein neuer Stoff für keinen Schüler ganz neu* sei, *auch nicht für die Schwächeren.* Lehrerin L11 bringt einen weiteren Aspekt, indem sie die natürliche Differenzierung mit einem unterrichtsorganisatorischen Vorteil für die schwächeren Rechner auslegt: *Dadurch, dass gute Schüler eigene Wege gehen, hat die Lehrperson mehr Zeit für Schwächere.* Zudem sollten *die unterschiedlichen Tempi in der Klasse akzeptiert werden,* d.h. *die Schüler dürfen nicht am Gängelband geführt werden.* Es sei Ziel des Anfangsunterrichts, *dass die Schüler von der Zahlenwelt fasziniert sind.*

Einige Lehrerinnen nennen das soziale Lernen als eine gute Chance für schwächere Rechner. Sie lassen die Schüler deshalb öfters *in Gruppen- oder Partnerarbeiten an die Aufgaben* oder bilden *fixe Lerntandems zwischen den Erst- und Drittklässlern* (L12). Mehrere (z.B. L13 und L18) halten fest, dass Schwächere *eine intensivere Begleitung und mehr Hilfsmittel* bräuchten.

Für L15 und L16 ist *mit dem Reisetagebuch eine gute Möglichkeit gegeben*, Schüler mit verschiedensten Voraussetzungen zu unterrichten. Für L17 ist es sogar *unmöglich, einen gemeinsamen Unterricht durchzuführen, da die Voraussetzungen der Schülerinnen zu unterschiedlich* seien[154]. *Sie regt hingegen den Austausch unter den Schülern aktiv an* und findet, dass die *Schüler durch die grosse Heterogenität voneinander profitieren.*

Lehrerin L19 schlägt mit ihren methodisch-didaktischen Konsequenzen eine eigene Richtung ein. Sie stellt klar, dass *einzelne Schüler die ganze Klasse am Vorwärtskommen bremsen* würden und *definiert den Stand der Klasse an der Seitenzahl im Rechenbuch.* Die Klasse als Ganzes beurteilt sie als *gut*, denn *sie komme rasch voran.* Es ist ihr Grundprinzip, *Neues für alle Schüler verständlich einzuführen* und *keinen Schüler ohne Einführung an etwas Neues zu lassen.* Sie will *den Schülern möglichst die Schwierigkeiten aus dem Weg räumen, damit sie auch üben können, wenn sie die Rechnungen nicht verstehen.* Die Konfrontation mit den Testresultaten löste bei ihr während des Interviews eine Verunsicherung aus:

[154] Die Klasse 17 besteht mehrheitlich aus fremdsprachigen Kindern und schnitt mit der schwächsten Vortestleistung ab. Zur Lektion von L17 wurde in Kapitel 5.3.6 (B1) bemerkt, dass darin keine frontale Unterrichtssequenz stattfand.

I: Was bedeutet das für dich, wenn die Schüler so viel mehr können als du erwartet hast? [L19 unterschätzte die Schülerleistungen teilweise stark]

L: Ja, also ich führe das irgendwie zu einfach ein, sie könnten das wahrscheinlich schwieriger auch verstehen.

I: Ja, ist möglich, ich weiss es nicht.

L: Ja, das könnte es sein, oder äh, ja, ich unterschätze sie einfach.

I: Wenn du eine Konsequenz für dich ziehen könntest, wo du sagst: Doch, das müsste ich einmal ausprobieren. Was könnte das sein?

L: Ja, z.B. einmal etwas Neues einfach hinzugeben und gar nicht einführen. Einfach machen lassen. Das wäre einmal (lacht). (L19; 270-279)

Den gefassten Mut nimmt die Lehrerin relativ schnell wieder zurück. Sie stützt sich auf ihre Erfahrungen mit der Klasse:

L: Aber weisst du, irgendwie kannst du das nicht machen, weisst du, ich kenne ja die Kinder. Und ich weiss, dass der Florian zu weinen beginnt. Also muss ich ja grad schon zuerst einmal wenn ich das Blatt austeile, grad sofort zu ihm hinstehen und ihm sagen: gell, wenn du dann nicht nachkommst, kannst du kommen und mich fragen. Du musst dann nicht zu weinen beginnen. Oder ich habe dann ja vielleicht zwei Kinder, die dann vielleicht so reagieren. Oder? (L19; 285-290)

Die Lehrerinnen L16 und L25 ziehen aus den Testresultaten diagnostische Konsequenzen: *Die Gründe für ein mangelndes Verständnis müssen* [durch eine Fachstelle] *abgeklärt werden.* L27 sieht den Test ebenfalls *als diagnostisches Instrument,* jedoch im Hinblick auf die *Bildung homogener Leistungsgruppen* zwecks innerer Differenzierung.

Für L28 ist die *Differenzierung eine Frage der Kapazität der Lehrerin* und das *Warten auf schwächere Schüler* ist *eine zu akzeptierende Realität*. Die *Gefahr einer leistungsheterogenen Klasse* sieht sie in der *aufkommenden Langeweile stärkerer Schüler*. Dennoch betrachtet sie es als ihre Aufgabe, *alle Schüler dort abzuholen, wo sie stehen*.

Konsequenzen für die stärkeren Rechner

Die genannten didaktischen Konsequenzen werden seltener direkt auf die stärkeren Rechner bezogen. Für mehrere Lehrerinnen ist die qualitative natürliche Differenzierung[155] (Aufgabenschwierigkeit) entweder nicht notwendig oder nicht praktikabel. Die quantitative natürliche Differenzierung (Anzahl Aufgaben oder Variabilität des Zahlenraumes) bildet zusammen mit der Lehrerhilfe die häufigst genannte Differenzierungs-Konsequenz für die Stärkeren. Bei L18 *bekommen die starken Schüler weniger Lehrerhilfe,* obwohl dies *ungerecht sei, da diese sie genauso bräuchten.* L25 findet es deshalb wichtig, *alle Schüler emotional zu unterstützen*.

Für L3 und L8 ist eine qualitative Differenzierung nicht notwendig, da *die guten Schüler auch bei einheitlichen Angeboten nicht unterfordert* seien. Sie verlangen deshalb von *allen Schülern ausschliesslich dieselben Aufgaben.* Lehrerin L1 und L4 sehen es anders. Sie wollen *den stärkeren Schülern möglichst qualitative Differenzierungsmöglichkeiten* im Sinne der *individuellen Vertiefung oder unterschiedlicher Anforderungen* anbieten. Einige Lehrpersonen (z.B. L15 und L16) nennen die vielfältigen Zugangsmöglichkeiten, die das Reisetagebuch bietet. L11 will eine qualitative Differenzierung *realisieren, indem gute Schüler individuell und selbstständig lernen* können. Die Angebote aus dem Zahlenbuch würden ihr dabei helfen, *die Schüler tatsächlich zu fordern, da sie eigene Wege beschreiten müssten.* L13, 16 und 20 lassen die stärkeren Rechnerinnen eigene Zugänge suchen und fordern sie *mit der selbstständigen Erarbeitung der Aufgaben*, teilweise *ohne irgendwelche Instruktionen* (L17). L25 plädiert *für offene Lerngelegenheiten* und betont, dass die *Suche nach eigenen Denk- und Lernwegen die eigentliche Herausforderung* darstelle. Eine andere Form der qualitativen Differenzierung führt L26 mit dem immanenten Üben an (vgl. Kapitel 3.4.2).

Nach Ansicht von L4 *brauchen starke Schüler weniger Hilfe von der Lehrerin*. Diese lässt L7 *einfach ziehen,* obwohl sie die *Tempo-Differenzierung auch als problematisch* ansieht, *denn „schneller" dürfe nicht mit „besser" gleichgesetzt werden.* L8 gibt stärkeren Rechnern *eher grössere Zahlenräume* oder *Kniffelaufgaben, damit sie nicht unterfordert sind.* Ähnlich wie L28 findet sie es wichtig, dass *schnellere Rechner lernen, auf Langsamere zu warten.*

[155] Die Kurzform qualitative und quantitative Differenzierung verwende ich synonym mit qualitativer und quantitativer natürlicher Differenzierung (vgl. Kap. 5.3.4).

L9 *holt das Zusatzmaterial für diese Schüler aus dem Zürcher Lehrmittel.* Sie kritisiert mit L23, dass die *qualitativen Differenzierungsangebote des Zahlenbuchs zu unspezifisch seien.* L12 stellt stärkeren Rechnern nicht nur *eigene Aufgaben, sondern formuliert für sie auch individuelle Ziele.* Für L14 ist es lediglich *wichtig, die Schüler zu beschäftigen.* L28 ist nicht dieser Meinung. Sie gesteht sich aber zu, dass ihre *Ideen für die Begabtenförderung rar* seien.

Ergänzende Aussagen zur Differenzierung

Einige Argumente galten der Differenzierung des Unterrichts und wurden nicht an das Lernverhalten oder Leistungsvermögen bestimmter Schüler geknüpft.

Mit Lehrerin L1 nehme ich die häufigst genannte Aussage vorweg: *Die Differenzierung durch den sozialen Austausch. Nachdem die Schüler singuläre Wege beschritten oder singulär Situationen geklärt* hätten, finde ein sozialer Austausch statt, damit die *Schüler ihre individuellen Konstruktionen gegenseitig darstellen und begründen* können. *Gegenseitiges Verstehen und die Konfrontation von und mit gegensätzlichen Meinungen* sei eine sich selbst regulierende Differenzierung *die sich natürlich* einstelle. Einige Lehrpersonen sehen in ersten Primarschulklassen entwicklungspsychologische, organisatorische oder disziplinarische Grenzen des sozialen Lernens. Sie bevorzugen deshalb eher die Einzelarbeit, streben aber den *Aufbau eines Lernklimas an, damit soziales Lernen möglich werde* (L9).

Weitere Argumente beinhalten, dass *Korrekturen von Lehrern lediglich Lernimpulse auslösen sollten* (L2) oder der *Einsatz von Übungsformaten den Schülern Gelegenheit gebe, individuell in die Tiefe zu dringen* (L6). Für L13 *müssen Schüler nicht Schritt für Schritt geführt werden.* L15 formuliert dies als Devise: *„Probiere und wage etwas!“* Mehrfach betonen die Lehrerinnen, *ihr Unterricht sei nicht lehrerzentriert, im Sinne von vorzeigen und ausführen.*

L3 vertritt die Meinung, zielerreichendes Lernen sei *unnötig, da den Schülern die Ziele und die Zielerreichung nicht bewusst sind.* Damit widerspricht sie der erwähnten Lehrerin L4, die sich klar *am Erfolgserlebnis der Schüler* – und damit an erreichbaren Zielen – *orientiert.*

Einführung in den Zahlenraum

Die Ermittlung der methodisch-didaktischen Konsequenzen schloss mit der Frage nach der Einführung in den Zahlenraum. Das Zahlenbuch verlässt den traditionellen Weg der sukzessiven Erweiterung und schlägt vor, den Zahlenraum bis 20 von Beginn weg für alle Schüler zu öffnen. Das kantonale Lehrmittel orientiert sich am traditionellen Weg.

Aus der Treatmentgruppe folgten 16 der 23 Lehrerinnen (70%) dem Vorschlag des Zahlenbuchs, aber auch in der Kontrollgruppe entschlossen sich 4 der 7 Lehrerinnen (57%) für diesen Weg. Es kommt erneut zum Ausdruck, dass die lehrmittelgebundene Unterteilung in Treatment- und Kontrollgruppe eher einem formalen Kriterium folgt als methodisch-didaktisch abgrenzbaren Vorgehensweisen.

Die folgenden Lehrerinnen arbeiten mit dem Zahlenbuch, sie wollen sich aber nur teilweise an die Empfehlungen der Lehrmittelautoren halten. Lehrerin L7 zieht es vor, *zuerst die Zahlen bis 10 einzuführen* und darin das *Vorwärts- und Rückwärtszählen ausgiebig zu üben.* Erst *anschliessend gibt sie den Raum bis 20 frei* und lässt darin auch *individuelle Strategien zur Bewältigung des Zehnerübergangs* zu. Allerdings *nimmt* sie *schwächere Rechner davon aus*. Mit ihnen wählt sie den Weg der *sukzessiven Erweiterung und übt den klassischen Zehnerübergang mit der Ergänzung bis zehn*. L8 und L16 sammeln ihre ersten Erfahrungen mit der Öffnung des Zwanzigerraums zu Beginn des Schuljahres. Sie erzählen, wie der *Zehnerübergang für sie selber früher ein Problem* gewesen sei und sind *begeistert, wie die Schüler eigentlich bei zehn mühelos weiter zählen*. Sie zeigen sich aber *skeptisch, ob die Methode tatsächlich erfolgreich ist.* L9 kritisiert zusammen mit L14, dass *im Zahlenbuch zu viel und zu lange einfach gezählt* werde, wogegen die *Schüler viel früher rechnen wollten*. Deshalb zieht es L9 vor, *schon zu Beginn des Schuljahres Additionen zu üben, bis sie die Schüler auswendig können*. L22 kritisiert ebenfalls, dass *die Schüler in den ersten sechs bis acht Wochen vorwiegend mit Zählübungen beschäftigt* seien. L14 nennt beim Stichwort Einführung in den Zahlenraum zuerst die Schreibweise der Zahlsymbole. Sie führt diese bis 10 sukzessive ein, weil ihr die korrekt geschriebenen Ziffern wichtig sind. Zur Öffnung des Zahlenraumes bekennt sie, dass sie *noch sehr unsicher* sei und *einen Austausch mit anderen Lehrpersonen suche*. Sie beobachtet aber ihre Schüler, welche offenbar *das Bedürfnis hätten, „einfach drauflos" zu rechnen.*

Lehrerin L28 setzte sich eingehend mit der Konzeption des Zahlenbuches auseinander, arbeitet aber mit dem kantonalen Lehrmittel. Sie *erkundet* mit den Schülern *zunächst den Zahlenraum von 1 bis 10, anschliessend von 1 bis 20,* obwohl sie *von Beginn weg mit allen Zahlen bis 20 Angebote macht* und *den Schülern keine nummerischen Schranken setzt.* Sie *lehnt die* *kleinschrittig sukzessive Zahlenraumerweiterung* des kantonalen Lehrmittels entschieden ab. Zum *Zehnerübergang* meint sie – im Gegensatz zu den meisten Lehrerinnen der Kontrollgruppe – dass dieser *kein spezielles Thema* sei, denn die *Schüler sehen da kein Hindernis*.

Kommentar zu den gezogenen didaktischen Konsequenzen

Die Lehrerinnen denken überwiegend an Kinder mit geringen mathematischen Voraussetzungen, wenn sie ihre didaktischen Konsequenzen aus den Testleistungen ziehen. Die Kategorie *schwächere Rechner* tauchte bereits in der Argumentation zu den abgegebenen Item-Urteilen auf (vgl. Kap. 5.2.6.3) und darf dort als rezeptive Orientierung interpretiert werden. Die hier gezogenen Konsequenzen beziehen sich auf die *eigenen* schwachen Rechner, sie weisen in Richtung natürlicher Differenzierung, individueller Zielerreichung und sozialen Lernens. Die Lektionsanalysen zeigen aber, dass die Lehrerinnen eher die schwächeren als die stärkeren Rechner belehren (vgl. Kap. 5.3.6; B4). Vermutlich ist den Lehrerinnen die Dissonanz zwischen ihrer konstruktivistischen Orientierung und der belehrenden Haltung gegenüber schwächeren Rechnern – zumindest in Form einer Ungereimtheit – bewusst. Sie äussert sich „im Gespräch darüber" in beiden Richtungen, in der konkreten Handlung aber als Belehrung. Zwischen den Aussagen zu Differenzierungsmöglichkeiten für stärkere Rechner und der didaktischen Realisierung besteht eine grössere Übereinstimmung (vgl. Kap. 5.3.6; B4 und B5).

Auch zum Umgang mit heterogenen Lerngruppen werden häufig natürliche Differenzierungsformen genannt, obschon diese während den Lektionen nicht überwiegen (vgl. B10). Ich werte das festgestellte Bestreben als ein echtes Anliegen, das in der konkreten Umsetzung eines längeren Prozesses bedarf, bis es didaktisch eingelöst werden kann.

Einige Umsteigerinnen beurteilen den Beginn des Zahlenbuchs als zu umfangreich aufs Zählen ausgerichtet und überspringen das Angebot teilweise grosszügig. Ich weise auf die Hypothesenprüfung C3 hin, wonach die Treatmentschüler tendenziell mehr Plusminuseins-Zählfehler machen als die Vergleichsschüler mit kantonalem Lehrmittel. Die Angebote des Zahlenbuchs, welche die Schüler mit dem Zählen konfrontieren, scheinen berechtigt. Im Unterricht bedarf es einer weiteren Vertiefung in Richtung Verinnerlichung des Zählens und einer bewussten Auseinandersetzung mit den praktizierten Zählstrategien der Schüler.

5.4.9 Diskussion der Ergebnisse

Ergebnis C1

Die beiden Schülergruppen zeigen im Nachtest vergleichbare Leistungsfortschritte.

Die Schlussfolgerung, es spiele für die mathematische Kompetenzerweiterung eines Erstklässlers keine Rolle, ob er mit dem Zahlenbuch oder dem Thurgauer Lehrmittel arbeite, greift zu kurz, da auch untersuchungsspezifische Bedingungen wirkten:

a) Die Messung der Kompetenzerweiterung erfolgte mit *schriftlichen Gruppentests*. Die ausgewerteten Rechenresultate und deren Interpretationen beziehen sich auf Lösungsprodukte, die tatsächlich gezeigten Kompetenzen während der Lösungsprozesse bleiben verborgen.
b) Die Interpretationen müssen bei der *Unterrichtsgestaltung und deren Lerneffizienz* ansetzen und nicht beim Werkzeug Lehrmittel, da die beiden Gruppen nicht trennscharf sind.
c) Die verglichenen Schülerleistungen beruhen auf ungleichen Lehrbedingungen. Das Zahlenbuch steht im ersten Erprobungsjahr, während die Lehrerinnen der Kontrollgruppe bereits über Unterrichtserfahrungen mit ihrem Lehrmittel verfügen.

ad a) Der auf einem *schriftlichen Gruppentest* basierende Leistungsvergleich lässt nur bescheidene Lösungsweg bezogene Aussagen zu, da hinter richtigen Resultaten unterschiedliche Vorgehensweisen, Verstehensleistungen und operative Kompetenzen stecken (vgl. Diskussion C3). Die vergleichbaren Fortschritte beziehen sich auf die mathematische Modellierung von Sachsituationen und auf Rechenfertigkeiten. Deshalb bleibe ich bei der vorsichtigen Formulierung, dass die beiden Schülergruppen im Nachtest vergleichbar erfolgreich waren. Immerhin ist damit ein Teilziel des Forschungsfensters C erreicht: *Die erworbenen rechnerischen Fertigkeiten sind in beiden Schülergruppen gleich gross.* Da die Erhebung der Lösungsprodukte nur ein schmales mathematik-didaktisches Zielsegment erfasst, bleibt offen, inwiefern sich die Umsetzung beider Angebote unterschiedlich auf das mathematische Verständnis auswirken.

ad b) Die zweite Anmerkung betrifft den Kurzschluss, die Lehrmittelwahl spiele für die Kompetenzerweiterung des Schülers die entscheidende Rolle. Obwohl Lehrmittel bei der *Gestaltung des Mathematik-Unterrichts* eine leitende Funktion übernehmen, zeigen die ersten beiden Untersuchungsteile auf, dass die didaktische Umsetzung stark von der Haltung und vom Geschick der einzelnen Lehrerin geprägt ist. Dies spiegelt sich z.B. darin, dass die Lehrpersonen beider Gruppen u.a. auch das Lehrmittel der Vergleichsgruppe einsetzen (vgl. Kap. 5.3.7). Der folgende Ausschnitt aus dem Interview mit Lehrerin L1 (Treatmentgruppe) veranschaulicht mögliche Kriterien, die zur Auswahl einer Lehrmittelkollektion dienen:

L: Ich habe gerade gestern mit einer Kollegin telefoniert - und ihr gesagt, was ich am Zahlenbuch nicht gut finde. Also, wo ich mit dem Zahlenbuch eher Mühe habe: Es wird gesagt, dass beim Thurgauer Lehrmittel lange Zuordnungen vorgenommen werden. [Zu Beginn des Rechenbuches sind auf einigen Seiten pränummerische 1:1-Korrespondenzen herzustellen]

I: Also es wird noch nicht im Zahlenbereich gearbeitet.

L: Ja. Und *ich* empfinde aber, dass da (zeigt aufs Zahlenbuch) auch sehr lang, länger mit Zuordnungen gearbeitet wird.

I: Mit Zuordnungen?

L: Natürlich sind es schon Zahlenzuordnungen, das schon. Aber so *richtig* rechnen in dem Sinn (blättert im Buch) fängt es erst da hinten an (zeigt Seite 39) und ich habe natürlich viele Sachen vorgezogen mit *Rechnen* und hier mit Zahlen. Also den Zahlenraum bis 20 von Anfang an erschliessen, das finde ich gut. Ich denke, das kannst du auch, wenn du mit dem Thurgauer Lehrmittel arbeitest. Oder?

I: Ja, das schliesst es nicht aus.

L: Aber dann bist du sehr, sehr lange, wenn du einfach nach dem Aufbau gehst, dann bist du sehr, sehr lange einfach am Zahlenraum erweitern bis auf 20 und am Zuordnen. Also Zuordnen schon mit Zahlen und am Anfang mit Gegenständen und so und dann mit Zahlen rechnen tust du erst gegen Weihnachten. Und die Kinder finden dann schon: Wann rechnen wir denn endlich? Oder. – Und *das* kreide ich dem schon ein wenig an. Sie sagen hier, das sei besser als beim Thurgauer Lehrmittel und ich finde, es sei hier auch einfach ein wenig ähnlich auf eine Art, wie soll ich sagen, es sind in dem Sinn Zuordnungen. Und Zahlenraumerweiterung ist auch lange und man kann auch noch nicht voll – wenn du jetzt nach dem (zeigt aufs Zahlenbuch) gehst – voll anfangen zu rechnen. Wobei du kannst das selbstverständlich, ich meine ich baue das ein, oder? Und tue auch diese Sachen, die Zuordnungen ein Stück weit rechnerisch erarbeiten. Aber, wenn du einfach so vorwärts gehst, denke ich, ist es eben ähnlich wie beim Thurgauer Lehrmittel. Und du kannst beim Thurgauer Lehrmittel das genau gleich auch nehmen: Zahlenraum bis 20 erweitern, kannst das Schema mit den Pünktli [Zwanzigerfeld] nehmen, kannst die Kinder, die schwach sind, bis auf 6 rechnen lassen und den andern gibst du andere Sachen, wo sie bis 20 rechnen können. Und das Blitzrechnen kannst du von dem (zeigt auf Blitzrechenkurs) nehmen.

I: Das Jonglieren mit verschiedenen Lehrmitteln geht aber nur, wenn du über ein grundlegendes mathematik-didaktisches Wissen verfügst.

L: Ich denke auch, jetzt z.B. von dem, was ich sehe, die Übungsmöglichkeiten finde ich z.B. zu wenig. Also das Automatisieren, wenn das Verstehen dagewesen ist, denke ich, muss auch noch automatisiert werden.

I: Dafür ist eigentlich das Blitzrechnen gedacht.

L: Ja, aber weisst du, wo du dann auch ein wenig differenzieren kannst. Blitzrechnen machst du ja eigentlich – ausser, gut du kannst ein Grüpplein nehmen und dann ein anderes Grüpplein – aber äh, wenn sie nachher wirklich einfach schriftlich einmal automatisiert rechnen können, das fehlt, das fehlt auch beim Thurgauer Lehrmittel. Da finde ich jetzt das Zürcher Lehrmittel wieder gut. Da hat es dann viele Sachen, die du dann nehmen kannst.

I: Kein Lehrmittel ist für jede Lehrperson zugeschnitten. (...) Es kann ja nicht sein, dass es allen passt. Sonst müsste es so ein Kompromiss sein, dass es wiederum nicht gut wäre.

L: Genau. Ja. Also was *mich* sehr anspricht, einfach, ist das Zürcher Lehrmittel. Sie haben wahrscheinlich viel von dem (zeigt aufs Zahlenbuch) auch geklaut. Weil, sie haben z.B. die Tafel (zeigt auf Einspluseins-Tafel). Ich bin mir am überlegen, ob ich für die dritte Klasse das Zahlenbuch nehme, oder ob ich das Thurgauer Lehrmittel nehme und aber – für *mich*, für mich habe ich ja die, oder (zeigt aufs Zahlenbuch). Und einfach ähm, also die *Ideen*, weil die gefallen mir, die Ideen von dem (zeigt aufs Zahlenbuch), mit dem ich in dem Sinn arbeite, aber einfach vom Preislichen her auch, oder? (L1; 309-359)

Die Lehrerin illustriert mit ihrer Integration und Koordination verschiedener Lehrmittel, dass der Mathematik-Unterricht primär eine Folge der didaktischen Choreografie ist. Darum dehne ich die Interpretation des lehrmittelgebundenen Leistungsvergleichs aufs gesamte didaktische Dreieck aus: Hinsichtlich der gezeigten Testleistungen vermögen die Lehrerinnen mit beiden Lehrmitteln einen vergleichbar lerneffizienten Unterricht zu gestalten.

ad c) Das Zahlenbuch zeigt vielen Umsteigerinnen eine neue mathematik-didaktische Sichtweise. Die Einlösung der damit verbundenen Ansprüche an die Gestaltung bzw. Umgestaltung des Unterrichts fällt im Untersuchungszeitraum mit einer unterrichtlichen Aufbruchphase zusammen. Der Effizienzvergleich basiert damit auf *ungleichen Lehrbedingungen*. Der Unterricht mit dem Zahlenbuch steht mehrheitlich in seinem ersten Erprobungsjahr, währenddem die Lehrerinnen der Kontrollklassen ein vertrautes Lehrmittel einsetzen. Für die Umsteigerinnen beinhaltet die Einarbeitung ins Zahlenbuch Mehraufwand, didaktischen Perspektivenwechsel und die Lernchance, den eigenen Unterricht zu reflektieren und neu auszurichten. Die Lehrerinnen zeigen, dass der Unterricht mit dem neuen Lehrmittel bereits im ersten Einsatzjahr zu vergleichbaren Rechenleistungen führen *kann* wie derjenige mit dem Thurgauer Rechenbuch. Sie belegen eindrücklich, welchen Aufwand sie für die Auseinandersetzung mit dem neuen Lehrmittel betreiben (vgl. Kap. 5.3.7 und 5.4.8).

Im Ergebnis C1 können auch *Überschneidungen der Stichproben* im Spiel sein. Die Lehrerinnen, welche hauptsächlich das kantonale Lehrmittel einsetzen, nutzen ergänzend Materialien aus dem Zahlenbuch oder orientieren sich zumindest an seinen didaktischen Grundzügen. So z.B. bei der Zahlenraumerweiterung, welche die Mehrheit der *gesamten* Stichprobe nach Vorschlag des Zahlenbuchs angeht (vgl. Kap. 5.4.8). Das Blockzitat von Lehrerin L1 (s.o.) zeigt die umgekehrte Möglichkeit. Als Lehrerin der Treatmentgruppe hält sie sich an Ideen des Zahlenbuchs und zieht andere Lehrmittel bei, damit sie ihren eigenen Weg beschreiten kann. Die lehrmittelübergreifende Orientierung ist unterrichtliche Realität, die aus einer didaktischen Untersuchung nicht ausgeblendet werden kann und soll. Die endgültige Schlussfolgerung zum Ergebnis C1 lautet demnach: Den *Lehrerinnen* beider Teilstichproben gelingt es vergleichbar, mit dem oder den Lehrmittel(n) einen lerneffizienten Unterricht zu gestalten.

Ergebnis C2

Die Treatmentschüler lösen die bildlich dargestellten Aufgaben des Nachtests erfolgreicher als die Schüler der Kontrollgruppe. Derselbe Vergleich zwischen den schwächeren Rechnern zeigt eine deutliche Überlegenheit der Treatmentschüler. Bei den formal-symbolisch gestellten Aufgaben schneiden die schwächeren Rechner beider Gruppen vergleichbar ab.

Die Überlegenheit der Treatmentschüler schreibe ich nicht vorbehaltlos dem Lehrmittel Zahlenbuch und seinen didaktischen Akzenten zu, da sich die Lehrerinnen beider Gruppen an beiden Lehrmitteln orientieren. Die Grenzen sind insofern klar gesteckt, als in den Treatmentklassen jeder einzelne Schüler mit dem Zahlenbuch arbeitet und in den Kontrollklassen nicht. Auf Grund dieser umsichtigen Lehrmittelorientierung konzentriert sich die Diskussion der Ergebnisse auf die *Gestaltung des Unterrichts* mit dem einen oder andern Buch. Die Argumentation schält diejenigen Charakteristika aus beiden Lehrmitteln heraus, die einen verstehensorientierten Unterricht unterstützen oder erschweren.

Ich stecke den Diskussionsrahmen durch den medialen Aspekt von Repräsentationsformen (vgl. Bruner, 1974; Aebli 1980 oder Kap. 2.3.2 und 3.4.2). Der Medienbegriff beinhaltet, dass Wissensstrukturen in verschiedenen Formen (als Handlungsschema, Vorstellungsbild und sprachlich) vergegenwärtigt werden können. Übertragen auf den Mathematik-Unterricht erzeugen die Schüler eine operative Struktur, wenn sie auf enaktiver, ikonischer oder symbolischer[156] Repräsentationsebene z.B. Anzahlen von Mengen additiv in Beziehung setzen. Sobald die Struktur des Handelns mit der Struktur des bildhaften Wahrnehmens und Vorstellens übereinstimmt und bedeutungstragende Symbole zur Verfügung stehen, ist eine Interaktion zwischen den Medien möglich (vgl. Aebli, 1980, S. 61). Die Repräsentationsformen sind insofern auf eine entwicklungsbedingte Ordnung bezogen, als „dem Kind mit fortschreitender Entwicklung immer mehr von ihnen zur Verfügung stehen, bis es alle drei – der jeweiligen Situation entsprechend – einsetzen kann“ (Steiner, 1973, S. 168).

Zahlreiche mathematik-didaktische Studien weisen darauf hin, dass sich stärkere Rechner von schwächeren dadurch unterscheiden, dass sie beweglicher von einer Repräsentation in eine andere übersetzen können (Bönig, 1993; Lobeck, 1992; Lorenz, 1993, 1992; Radatz, 1991b). Weil die Anregung medialer Übersetzungsprozesse im Mathematik-Unterricht unterschiedlich zum Tragen kommt (Winter, 1987; Wittmann, 1995b), führe ich die im Nachtest gezeigten Kompetenzunterschiede u.a. auf günstige, unbefriedigende und fehlende Angebote zurück.

Ein allgemeines Lehr- und Lernziel im Zahlenbuch-Lehrerband lautet: Die Schüler sollen die „Fähigkeit [erwerben], reale Situationen in die Sprache der Mathematik zu übersetzen, mathematisch zu lösen und das Ergebnis für die reale Situation zu interpretieren“ (Hengartner & Wieland, 1995, S. 6). Das Anliegen findet im Schülerbuch z.B. in Form von Rahmenthemen[157] und „Mini-Projekten“ eine inhaltliche Entsprechung. Die Angebote zur mathematischen Modellierung von Sachsituationen gehen von der Erlebnis- und Erfahrungswelt der Schüler aus, versuchen diese zu erweitern und mit der mathematischen Sprache in Beziehung zu bringen.

---

[156] Eigentlich ist mit der Symbolebene die sprachliche Repräsentation gemeint. Sinnvollerweise differenzieren wir diese in der Mathematik-Didaktik in eine sprachliche (z.B. Textaufgaben, Rechengeschichten) und formal-symbolische Repräsentation (mathematische Terme).

[157] Die Rahmenthemen lauten: Zahlen und Formen in der Umwelt, Geld, Länge, Zeit, Text- und Sachaufgaben und praktische Geometrie. Mini-Projekte sind z.B. mit „Bald ist Weihnachten“ oder „Bald ist Ostern“ überschrieben.

> Die im Schülerbuch angesprochenen Beispiele für die Verwendung von Zahlen und Formen in der Umwelt sind in allererster Linie Anregungen für Schüler, in ihrer eigenen Umgebung Ausschau zu halten (....) Das Thema „Erfahrungen mit Längen“ ist eine erste Begegnung mit diesem Grössenbereich. Die Kinder sollen den Messvorgang mit verschiedenen (auch körpereigenen) Masseinheiten verstehen lernen. (ebd., S. 24)

Die beiden Beispiele zu „Formen und Zahlen in der Umwelt“ und „Erfahrungen mit Längen“ illustrieren die didaktisch-konstruktivistische Orientierung des Lehrmittels. Die Schüler dürfen an ihren bisher gemachten Primärerfahrungen[158] anknüpfen und ihre subjektive Realität durch aktives Tun erweitern. Sie suchen abstrakte Zahlen in ihrer Umgebung und lernen unterschiedliche Bedeutungen verstehen, indem sie zwischen der handelnd und wahrnehmend erlebten Situation und der mathematischen Sprache *beidseitig* Beziehungen herstellen.

Die Übersetzung mathematischer (Verknüpfungs-)Strukturen von der enaktiven in die formal-symbolische Repräsentation – und umgekehrt von der Abstraktion in die konkrete Handlung – wird auch in der Übungskonzeption sichtbar. Das gestützte produktive Üben beabsichtigt, die Schüler zu Einsichten in mathematische Strukturen zu führen, indem sie selber Operationshandlungen (und ikonische Repräsentationen) in eine sprachliche oder symbolische Darstellung übersetzen. Die Interaktion zwischen den Darstellungsformen (Wittmann, 1995b, S. 91) wird als eine kognitive (Verstehens-)Leistung des Schülers gesehen und nicht als eine von der Lehrerin gestaltete Abfolge separater Lektionsteile (vgl. Kap. 2.3.2). „Die verschiedenen Sprachen sollen weder nacheinander noch sonstwie separiert voneinander geübt werden, es ist gerade umgekehrt das wechselseitige Übersetzen der Witz der Sache“ (Winter, 1987, S. 23). In diese Richtung sehen es auch die Autoren des Zahlenbuchs:

> In traditionellem Verständnis wird das Rechnen *Stoffabschnitt für Stoffabschnitt* von der Ebene „Handlung“ über die Ebene „Bild“ bis auf die symbolische Ebene gehoben. So beginnt etwa das Rechnen im Zahlenraum bis 5 oder 6 mit Material (etwa mit Plättchen), dann wird bildlich dargestellt und endet mit Zahlensätzen wie 3 + 2 = 5; 4 – 1 = 3 usw. Das „Zahlenbuch“ folgt dagegen dem „Prinzip der fortschreitenden Schematisierung“, d.h. der *gesamte* Zwanzigerraum wird erst mit Material „unterfüttert“, und die Kinder stützen sich bei ihren Rechnungen über weite Strecken auf Material. (Hengartner & Wieland, 1995, S. 10)

[158] Der Begriff Primärerfahrungen lehnt sich an die von Aebli (1994) beschriebenen primären Verhaltenssysteme an, welche sich auf konkrete Handlungen und Wahrnehmungen beziehen.

Die Erfahrungen mit Materialien ermöglichen den Schülern, strukturierte Übungseinheiten produktiv zu nutzen und operative Zusammenhänge zu erkennen (vgl. Kalthoff, 1995, S. 180).

Die Schüler suchen nicht von alleine operative Verknüpfungsstrukturen, auch der blosse Gebrauch eines Lehrmittels oder bestimmter Handlungsmaterialien genügen nicht. Notwendig ist der Aufbau einer Lernkultur, in der konstruiert, gesucht, erzeugt, aufgespürt, Zusammenhänge bemerkt, Gefundenes verändert und verworfen wird. Unterrichts- und Lernprozesse entfalten sich in diese Richtung, wenn die Schüler „beim Lösen von Problemen Hindernisse überwinden müssen, wobei sie nicht auf gewohnte, eingeübte oder vorgebahnte Muster zurückgreifen können“ (Zehnpfennig & Zehnpfennig, 1995, S. 109). Derartige Akkomodationsprozesse bedürfen allerdings des sozialen Austausches, der sozialen Anerkennung und darauf ausgerichteter Zeitgefässe, damit sie ins Zentrum einer Lernkultur rücken.

Der didaktische Kommentar zum Thurgauer Rechenbuch empfiehlt ebenfalls die mediale Übersetzung zwischen den Repräsentationsebenen. Das Lehrmittel liefert aber gute Gründe, dieses Anliegen nach traditionellem Verständnis (in getrennten Einheiten) zu erfüllen. Das in drei Schülerarbeitshefte gegliederte Lehrmittel fällt bereits im ersten Heft durch einen losen Wechsel zwischen formalen Darstellungsweisen (Mengendiagramme, Operatormodelle, Stellenwerttabellen, Venn-Diagramme und Rechenterme) auf. Auch die formal-symbolischen Rechnungen erscheinen meistens in unstrukturierten Päckchen mit häufig wechselnder Darstellung. Im ersten Päckchen (Nr. 4, S. 18, H. 2) wird z.B. die Differenz gesucht ($7 - 1 = \square$), bei Nr. 5 der Subtrahend ($7 - \square = 3$) und bei Nr. 6 ebenfalls, aber die Differenz steht vor dem Gleichheitszeichen ($4 = 7 - \square$)[159].

Solche formalen Darstellungsweisen diktieren den Schülern die herzustellenden Beziehungen uniform, d.h. jeder muss sie ungeachtet seiner Primärerfahrungen lesen, deuten und realisieren. Diese Leistung setzt ein beträchtliches operatives Verständnis voraus, über das viele Kinder nicht verfügen, und wäre eigentlich Inhalt jahrelanger Lernprozesse. Es ist nachvollziehbar, dass die Lehrerinnen Rezepte geben (müssen), damit die Schüler die symbolischen Darstellungen richtig ausfüllen können. Allerdings findet dieser „Kunstgriff“ kaum eine konstruktivistische Begründung, wonach der Schüler sein operatives Beziehungsnetz durch akti-

[159] Der operative Zusammenhang zwischen den Rechnungen unter Nr. 5 und 6 zieht sich nicht als Übungsstruktur durch, obwohl an einigen andern Orten durchaus operativ strukturierte Übungen erscheinen.

ves Tun individuell bauen und verdichten darf, sondern entspricht einer behavioristischen Manier: Die Lehrerin sagt den Schülern, was sie tun müssen, indem *sie* die formal-symbolischen Notationen für die Schüler in Rezepte übersetzt.

In diesem Sinne wirken die verschiedenen Darstellungen als Auslöser für mechanisches Abarbeiten und setzen weder ein Verstehen voraus, noch bauen sie ein Strukturbewusstsein auf.

> So wird Mathematik von Schülern häufig als eine Art abstraktes Regelspiel angesehen, zu dem man ein individuelles Verständnis konstruiert und bei dem man mit Symbolen manipuliert, Regeln und „Tricks“ kennen muss – diese notfalls selber entwickelt – ohne dass dabei die Handlungserfahrungen und anschaulichen Darstellungen integriert werden. Offensichtlich ist das mathematische Formalsystem bei vielen Schülern dominant und auch autonom, und es wird von diesen Schülern nicht als eine mathematische Abstraktion oder eine mathematische Generalisation verstanden, sondern wie ein unabhängiges und selbständiges System. (Radatz, 1991b, S. 85)

Die Kritik unterstellt dem Thurgauer Lehrmittel keine behavioristischen Absichten. Sie nimmt die von den Lehrerinnen geäusserten Schwierigkeiten auf und ordnet sie didaktisch und lerntheoretisch ein. Die bereits mehrfach zitierte Lehrerin L28 wehrt sich zu Recht in dieser Richtung: „Mit dem traditionellen Lehrmittel kann ich ebenso einen Unterricht gestalten, wie es die Autoren des Zahlenbuches vorschlagen“ (vgl. Kap. 5.2.7).

Eine informelle und unveröffentlichte Evaluationsstudie der Thurgauer Projektgruppe Mathematik ergab, dass v.a. die häufigen formalen Darstellungswechsel im kantonalen Lehrmittel stören. Lehrerin L19 äussert sich zu den beschriebenen Aufgaben (Thurgauer Rechenbuch, S. 18; s.o.) mit konkreter Kritik:

L: Also Nummer 5 und 6 finde ich sehr, sehr schwierig für die Kinder.

I: Wieso?

L: Diese, also 1 bis 3 gehen noch, aber diese hier, also Nummer 6 ist schwierig, weil ja die Vier, also das Resultat vorne ist, oder?

I: Mhm.

L: Und nachher sich vorzustellen: sieben, sieben weg wie viel sind vier, dann muss man sich immer das da [die Vier] nach hinten denken. Noch schlimmer: Solche hat es jetzt da nicht: wie viel weg drei sind vier. Das sind für mich die Schwierigsten.

I: Mhm.

L: Und das ist das, womit ich auch bei diesem Lehrmittel ein bisschen Mühe habe, dass grad von Anfang an immer diese Kästchen *überall* kommen, oder? [sie meint die mit $\square$ markierten Leerstellen im Term] Also ich finde, diese und diese, die gehen, oder [zeigt die auf S. 16 unstrukturierten formalen Additionen und Subtraktionen (z.B. 4 + 3 = $\square$ / 2 + 5 = $\square$)]?

I: Mhm.

L: Und diese, die gehen auch, oder? [zeigt Nr. 1 (z.B. 4 + $\square$ = 7) und Nr. 5 (z.B. 7 - $\square$ = 3)] Aber das ist schon schwieriger [zeigt Nr. 6 (z.B. 4 = 7 - $\square$)] und das ist schon sehr schwierig auch beim Plus, oder? [zeigt auf eine neue formale Darstellung auf S. 19, bei der z.B. das Würfelbild fünf einen ersten Wurf symbolisiert. Das Würfelbild des zweiten Wurfes kann der Schüler anhand der daneben stehenden Ziffer drei – welche die Differenz zwischen den beiden Würfen angibt – einzeichnen]

I: Findest du es wichtig, dass solche Übungen vorkommen?

L: Das finde ich wichtig.

I: Also Aufgabe 1 und 5.

L: Ja. Das finde ich wichtig. Ich finde einfach, von mir aus gesehen würden diese beiden - also das ist klar, oder, das ist selbstverständlich – von mir aus gesehen würden diese beiden *einmal* im ersten halben Jahr der ersten Klasse reichen. Dass man das kann: ‚und wie viel', ‚weg wie viel'. Ja, das kann man auch noch an der Treppe irgendwie erklären. Oder mit den Fingern, oder: ich habe sieben, wie viel muss ich wegnehmen, dass es drei gibt? Oder ich stehe auf der Stufe Nummer sieben. Wie viel muss ich hinunter, dass es drei gibt? Aber das schon mit dem „4 =" vorne, das ist für sie, ich muss immer sagen: denke es dir nach hinten. Aber das ist ja eigentlich ein Betrug, oder?

I: Vermutlich ist das Betrug.[160]

L: Aber ich sage es ihnen, weil sie sonst nicht nachkommen. Die Schwachen, ja gut, die Mittleren auch nicht. Jeweils nur die Guten kommen da nach. Ich finde, das ist von Anfang an einfach sehr schwierig mit diesen Kästlein an allen Orten. (L19; 329-360)

Der didaktische Lehrerkommentar und die Schülerarbeitsmaterialien aus dem Zahlenbuch unterstützen einen verstehensbasierten Unterricht, der vor einem forcierten Formalismus warnt und sich an das Prinzip der fortschreitenden Schematisierung hält. In traditionellen Lehrmitteln „droht die Gefahr, dass Repräsentationsweisen zu den eigentlichen Inhalten des Mathe-

[160] Mit dem „Betrug" meint sie vermutlich, dass sie die Schüler mit dem Rezept um die Gelegenheit bringe, selber einen operativen Zusammenhang zu finden.

matikunterrichts werden“ (Hollenstein, 1996, S. 95; vgl. Wittmann, 1989b). Den Lehrerinnen fällt es entsprechend schwer, einen Unterricht zu gestalten, in dem Operationshandlungen individuellen Wissenskonstruktionen dienen.

Nach der Gegenüberstellung beider Lehrmittel erstaunt es nicht, dass v.a. die schwächeren Schüler der Treatmentklassen die bildlich dargestellten Alltagssituationen im Nachtest erfolgreicher lösten als diejenigen der Kontrollklassen. Auf Grund der vergleichbaren Leistungen der schwächeren Rechner im Formalteil weise ich auch die Befürchtung, dass das Zahlenbuch v.a. dem Lernverhalten stärkerer gerecht werde, zurück.

Ergebnis C3

Erstklässler, die vorwiegend mit dem Zahlenbuch arbeiten, machen tendenziell mehr Zählfehler als die Vergleichsschüler.

Erstklässler lösen Additionen und Subtraktionen hauptsächlich zählend und wenden im Verlaufe des Schuljahres zunehmend verinnerlichtere, flexiblere und sicherere Zählstrategien an. Während dieses Lernprozesses zeigen sie typische Fehlstrategien, die häufig zu Abweichungen um „+1“ oder „–1“ vom korrekten Resultat führen. Die Fehler entstehen mehrheitlich nicht zufällig oder auf Grund mangelnder Konzentration. „Einschlägige Untersuchungen haben nachgewiesen, dass zwei Drittel der Fehler systematische Fehler sind, d.h. dass sich hinter diesen ‚Lösungen‘ eine individuell-logische Strategie befindet, so dass es didaktisch notwendig wird, solche Fehlertypen zu identifizieren“ (Wagner & Wacker, 1991, S. 62).

Eine Erklärung für die tendenziell häufiger auftretenden Plusminuseins-Zählfehler bei den Treatmentschülern gerät in eine Argumentationsnot, wenn sie sich auf die beiden Lehrwerke beruft. Der Erwerb sicherer und verinnerlichter Zählstrategien hängt nicht von bestimmten, besonders geeigneten Materialien oder Zählhilfen ab, sondern von gezielt angeregten und unterstützten Lernprozessen. Das Zahlenbuch bietet eine breite Palette von Aufgaben und didaktischen Impulsen zum Zählen und zählendem Rechnen an. Einige Lehrerinnen beklagen sich sogar (vgl. Kap. 5.4.8), das Zählen werde im Lehrmittel zu ausgiebig thematisiert. Mein Appell richtet sich daher an die Erstklass-Lehrerinnen, die Zählstrategien der Kinder – insbesondere das Rechnen mit den Fingern – unterrichtlich aufzunehmen. Zählstrategien müssen flexibilisiert und verinnerlicht werden, damit sie beim Operieren als zuverlässiges Werkzeug taugen (vgl. Moog, 1995; Radatz, 1982; Wember, 1989).

Ich betone, dass die im ersten Schuljahr begangenen Zählfehler (noch) nicht auf eine Verfestigung zählender Lösungsverfahren hinweisen, sondern auf unsichere oder singulär entwickelte Zählstrategien (vgl. Kap. 3.2.1). Auf Grund der festgestellten Zählfehler gehe ich davon aus, dass ein beträchtlicher Anteil beider Schülergruppen die formalen Rechnungen im Nachtest[161] zählend löste, also z.B. den operativen Zusammenhang in Aufgaben 17 und 18 nicht nutzte. Darauf konnten die Lehrerinnen hinweisen, weil sie während der Testdurchführung den Auftrag erfüllten, das manipulative Zählen mit den Fingern zu beobachten (vgl. Kap. 5.4.3).

In einer Untersuchung mit lernbehinderten Schülern der 2. bis 4. Klasse begründen Kornmann, Wagner und Ehret (1991; vgl. Kornmann & Wagner, 1990) unterschiedlich schwierige (fehleranfällige) Aufgaben mit den mechanischen und ungenügend gefestigten Zählstrategien der Schüler. Sie untersuchten die Schwierigkeitsgrade von zweigliedrigen Additionsaufgaben im Zahlenraum von 1 bis 20 (mit Ergebnissen grösser als 10) und eruierten zwei Faktoren, die für die Fehleranfälligkeit einer Aufgabe verantwortlich sind. Sie betreffen die Grösse des kleineren Summanden und dessen Position in der Rechnung:

- Je grösser der kleinere der beiden Summanden in einer Aufgabe ist, desto häufiger sind die gemachten Fehler: „13 + 5“ ist schwieriger als „15 + 3“.
- Aufgaben, bei denen der keinere Summand „hinten steht, sind leichter zu lösen als die entsprechenden Tauschaufgaben: „5 + 8“ ist also schwieriger als „8 + 5“ (Wagner & Kornmann, 1992, S. 98).

Die Autoren interpretieren die Befunde durch die fehleranfälligen Zählstrategien, mit denen die Aufgaben gelöst werden. Sie nehmen an, dass die Schüler die Summanden nicht tauschen, sondern die Rechnung in Leserichtung mechanisch-zählend durchführen.

> Zu erklären ist dieses Ergebnis damit, dass die meisten der untersuchten Kinder noch sogenannte Zählstrategien anwenden, um zur Lösung zu gelangen. Zu einer richtigen Lösung kommen sie dabei dann, wenn sie eine Zahl als Startpunkt wählen und dann solange mit 1 aufsummieren, bis die andere Zahl abgearbeitet ist. Die 10 stört dabei nicht. Je grösser nun der abzuarbeitende Addend ist,

[161] Die Annahme bezieht sich auf beide Aufgabentypen (Nr. 15/16 und Nr. 17/18; vgl. Anhang C): Die ersten beiden Päckchen bestehen aus willkürlich zusammengestellten Additionen und Subtraktionen bis 30. Die zweiten beinhalten operativ strukturierte Rechnungspaare (z.B. „11 + 6 = 17 / 6 + 11 = ?“).

desto mehr Schritte müssen dabei erfolgen, wobei sich bei jedem Schritt das Risiko des Irrtums erhöht. (Kornmann et al., 1991, S. 848)

Die Studie dokumentiert die ungenügend gefestigten und beharrlichen Zählstrategien bei lernbehinderten Schülern. Der Vergleich mit meiner Stichprobe ist insofern angebracht, als viele Erstklässler das zählende Rechnen ebenfalls festigen müssen, bis sie es flexibel anwenden können. Die Erweiterung des Zahlenraums verlangt erst im zweiten Schuljahr nach Ablösung des zählende Rechnens durch alternative Strategien. Dieser Prozess kann auch in der Primarschule langwierig sein und dauert nicht selten bis ins dritte Schuljahr oder in Einzelfällen noch länger (vgl. Lorenz & Radatz, 1993, S. 127). Es ist notwendig, den Zahlenraum bis 20 auch nach dem ersten Schuljahr zu thematisieren und wiederkehrend Übungen anzubieten, damit sich die Schüler vom zählenden Rechnen lösen (vgl. Kap. 2.3.3; Moog, 1995).

Erstklässler verfügen über operative Kompetenzen und alternative Rechenstrategien, die sie während des schriftlichen Tests nicht zeigten. In einer informellen Zusatzstudie mit klinischen Interviews bestätigen die stärkeren *und* schwächeren Vortestrechner der 19 videografierten Klassen, dass sie mehrheitlich (33 der 38 interviewten Schülerinnen) fähig sind, das Kommutativgesetz anzuwenden und einfache operative Ableitungen[162] vorzunehmen, *wenn sie danach befragt werden*. Während eines schriftlichen Tests wirken andere Bedingungen als in der mündlichen Befragung: Die Schüler verfügen über genügend Zeit und die Testsituation im Klassenverband bietet genügend „Privatraum", um bewährte Zählstrategien anzuwenden. Eine andere unveröffentlichte Studie von mir (1997) zeigt in dieselbe Richtung: Die Schüler aus je zwei ersten bis dritten Klassen lösten 42 Testaufgaben mit Additionen und Subtraktionen im Zahlenraum bis 10, wobei die formal-symbolisch gestellten Aufgaben auch die Berechnung des einen oder andern Summanden bzw. des Minuenden oder Subtrahenden verlangten[163]. Laut Ergebnis der teilnehmenden Beobachtung ermitteln ca. 70% aller Schüler die Resultate zählend, wobei dieser Anteil bei den Drittklässlern noch mindestens 50% beträgt. Die Klassen unterscheiden sich v.a. in Technik und Verinnerlichung der Zählhandlungen: Die Erstklässler

[162] Z.B. wenn „13 + 3 = 16", dann gibt „13 + 4" eins mehr.

[163] Die Testauswertung zeigt in allen Klassen bezüglich der am häufigsten falsch gelösten Aufgaben ein einheitliches Bild: Die meisten Fehler (und fehlenden Ergebnisse) tauchen bei Aufgaben auf, die nach einem Summanden oder Minuenden/Subtrahenden fragen (vgl. Diskussion C2). Solche formal-symbolischen Darstellungen bereiten offenbar auch Drittklässlern Mühe. Hingegen sind Zählfehler nur in der ersten Klasse eine bedeutende Fehlerkategorie.

zählten offen auf der Arbeitsfläche mit ihren Fingern, bei Zweitklässlern waren verinnerlichtere (bzw. verstecktere) Zählhandlungen auszumachen, und die feinen Fingerzuckungen (z.B. unter dem Pullover, in der Hosentasche, unscheinbar an die Wange tippend) sind bei Drittklässlern nur noch schwer beobachtbar. Die nach dem Test durchgeführte Schülerbefragung ergab: Mehr als 60% jeder Klasse – also der Erst- bis Drittklässler – ermittelten die Lösungen zählend. Bei einem schriftlichen Test mit Additionen und Subtraktionen bis 20 (Lobeck, 1987) war der Anteil dynamisch zählender[164] Drittklässler noch höher (Hess, 1997, S. 211).

Mit den genannten Befunden gehe ich davon aus, dass die Schüler beider Gruppen die formal-symbolisch gestellten Rechnungen mehrheitlich dynamisch zählend lösten und in unterschiedlich elaborierte Zählstrategien übersetzten. Die Zählfehler liefern weder Indizien für die Nutzung alternativer Strategien der Kontroll-, noch für zählende Lösungsverfahren der Treatmentgruppe (vgl. Hess, 1997; Lorenz, 1991, 1992 und Kap. 2.3.2, 2.3.3).

Ergebnis C4

Die Leistungsfortschritte schwächerer Rechner sind im Unterricht mit dem Zahlenbuch tendenziell grösser als bei vergleichbaren Schülern der Kontrollklassen. Die Stärkeren beider Gruppen zeigen ebenbürtige Leistungsfortschritte.

Die Ergebnisse fassen bisherige Befunde zusammen und bestätigen sie: Aus der Hypothesenprüfung C2 geht hervor, dass die schwächeren Rechner der Treatmentklassen die Bildaufgaben des Nachtests erfolgreicher lösten als vergleichbare Kontrollschüler. Bei den formal-symbolischen Aufgaben unterscheiden sich die Leistungen der beiden Gruppen nicht. Bezogen auf den Gesamttest bleibt eine Tendenz bestehen, nach der schwächere Rechner eher bevorteilt sind, wenn sie einen mit dem Zahlenbuch gestalteten Unterricht besuchen. Für Stärkere scheint die Lehrmittelwahl keine Rolle zu spielen, denn sie zeigen im Nachtest – wie die Gesamtheit der beiden Teilstichproben (vgl. C1) – keine Leistungsunterschiede.

Einige Umsteigerinnen waren unsicher, ob der Unterricht mit dem Zahlenbuch dem Lernverhalten schwächerer Rechnerinnen gerecht werde. Ich kann darauf keine pauschale Antwort geben, halte aber fest: Es gelingt den Lehrerinnen, für schwächere Rechner Lernbedingungen

[164] Dynamisch zählend bezeichnet das einzelne Abzählen der Finger oder anderer Elemente. Dem gegenüber meint der statische Gebrauch der Hände, dass sie eine additive Komposition oder Gliederung anschaulich unterstützen, ohne die Finger einzeln abzuzählen (vgl. Lorenz, 1992, S. 174).

zu schaffen, die ihnen ebenbürtige Leistungsfortschritte ermöglichen wie vergleichbaren Schülern der Kontrollklassen. Die Anerkennung richtet sich an die Lehrerinnen, da *sie* mit der Gestaltung des Unterrichts und der vollzogenen Individualisierung und Differenzierung die Hauptverantwortung für dieses Ergebnis tragen (vgl. Kap. 5.4.8).

Während der Interviews zeigten sich einige Umsteigerinnen neugierig und skeptisch zum Vorschlag, den Zwanzigerraum von Anfang an zu öffnen und die Kinder darin individuell operieren zu lassen (vgl. Kap. 5.4.8; Einführung in den Zahlenraum). 70% der Umsteigerinnen und 57% der Vergleichsgruppe folgten diesem Weg (vgl. Kap. 5.3.7). Laut Ergebnis C4 wirkt sich die gewählte Öffnung des Zahlenraums und das Prinzip der fortschreitenden Schematisierung nicht zum Nachteil der schwächeren und der stärkeren Rechner aus.

Das vergleichbare Nachtest-Ergebnis der leistungsstärkeren Schüler beider Gruppen erlaubt nur wenige differenzierte Aussagen zu ihrem mathematischen Kompetenzerwerb. Bei den formalen Aufgaben betreffen sie die Feststellung des Lösen-Könnens der Aufgaben und die Eruierung typischer Fehler, bei den bildlich gestellten Aufgaben die Fähigkeit der mathematischen Modellierung von Sachsituationen. Es bleiben einige Fragen offen:

- Da die richtigen Resultate nur bescheiden Auskunft geben, wie sie zu Stande gekommen sind, bleibt unklar, wie die Rechenprozedere aussehen.
- Ich setze bei den gezeigten (überwiegend zählenden) Rechenstrategien weitere Fragezeichen: „Inwiefern entsprechen die gezeigten Performanzen den effektiven Kompetenzen der Schüler?“ – „Über welches Strategiewissen verfügen sie?“ – „Welche Strategien wenden sie an?“ – „Welche Schüler können denkend Rechnen, wenn es die Situation erfordert?“
- Zu den operativen Kompetenzen bleiben ebenfalls Fragen offen, z.B.: „Inwiefern geht das operative Verständnis der einzelnen Schüler über die durchgeführten Operationen hinaus?“

Ergebnis C5

Eine konstruktivistische Grundeinstellung der Lehrerinnen geht nicht mit grösseren Leistungsfortschritten der Schüler einher.

Das Ergebnis fügt sich stimmig in eine Reihe vorliegender Befunde ein:

- Mit den Hypothesenprüfungen B6 und B7 finde ich keinen Zusammenhang zwischen dem Einstellungskonzept und der Konstruktivität der individuellen Schülerbetreuung. Die konstruktivistische Orientierung korreliert weder positiv mit einer gleich gesinnten Lernbegleitung noch negativ mit einer belehrenden.
- In gleicher Richtung weisen die Ergebnisse der Hypothesen B8 und B9. Die konstruktivistischeren Umsteigerinnen[165] unterstützen ihre Schüler qualitativ vergleichbar wie die rezeptiver eingestellte Vergleichsgruppe.
- Natürlich differenzierbare Instruktionen sind nicht an eine konstruktivistische Orientierung gebunden (B12). Auch enge Aufgabenstellungen hängen nicht mit einer behavioristischen Einstellung zusammen (B13).
- Obwohl die Umsteigerinnen konstruktivistischer orientiert sind als die Lehrerinnen der Kontrollgruppe, zeigen die beiden Schülergruppen ebenbürtige Leistungsfortschritte (C1).

Da zwischen Einstellung und didaktischer Handlung der Lehrerinnen keine Kohärenz besteht, erscheint es nahe liegend, dass zwischen der konstruktivistischen Orientierung und der Leistungsentwicklung der Schüler kein Zusammenhang feststellbar ist. Selbst wenn das konstruktivistische Einstellungskonzept mit natürlicher Differenzierung und konstruktivistischer Lernbegleitung korrelieren würde, bliebe ein entsprechender Niederschlag in den Schülerleistungen fraglich. Einige andere Komponenten wie z.B. die Unterrichtsorganisation oder die aufgebaute Lernkultur wirken ebenfalls massgeblich auf die Lerneffizienz des Unterrichts.

Zudem beträgt die Dauer der durchschnittlichen Lernbegleitung des einzelnen Schülers 1.5[166] Minuten pro Lektion, die restlichen 20 Minuten ist selbstständiges Arbeiten angesagt, ohne unmittelbare Anwesenheit der Lehrerin. Die erhobene Qualität der Lernbegleitung betrifft also nur einen kleinen Ausschnitt aus der individuellen Lernzeit des Schülers. Die Wirkung einer konstruktivistischen Lernbegleitung müsste vermutlich im Verhältnis zur Produktivität der gesamten Lernphase oder der gesamten Lektion überprüft werden, damit sie sich in Leistungsunterschieden bemerkbar machen könnte. Schliesslich verlangen konstruktivistisch begründbare Freiräume schülerseits eine selbstständige Verhaltenssteuerung, damit befriedigende

[165] Der Nachweis konnte nur bei den Erstklass-Lehrerinnen erbracht werden (vgl. A1 und A5).

[166] Die 1.5 Minuten betreffen die reine Sprechzeit (ohne Pausen). Deshalb gebe ich die theoretisch restlichen 21.5 Minuten, während denen die Schüler selbstständig arbeiten, mit 20 Minuten etwas kürzer an (vgl. Kap. 5.3.8; Diskussion B1).

Lernergebnisse hervorgehen. Eng strukturierte Aufgaben können im einzelnen Lernprozess eventuell Gewinn bringender sein, wenn die darin enthaltenen Freiräume tatsächlich genutzt werden können. Konstruktive Lernangebote sind daher nicht an bestimmte Unterrichts- oder Differenzierungsformen gebunden, sondern an Lernanlässe, die verfügbaren Schemata Anknüpfungsmöglichkeiten bieten.

5.5 Zusammenstellung aller Ergebnisse

Ergebnisse aus Forschungsfenster A

- Die Unterstufen-Lehrerinnen orientieren sich mehrheitlich konstruktivistisch, wobei sich diejenigen aus Treatment- und Kontrollgruppe nicht voneinander unterscheiden. Die Umsteigerinnen mit ersten Klassen sind zu beiden Messzeitpunkten konstruktivistischer eingestellt als die Vergleichslehrerinnen (A1 und A5; Kontrollprüfung).
- Die didaktische Einstellung und der Entscheid zum Lehrmittelwechsel sind nicht altersabhängig (A2).

  Konstruktivistischer orientierte Lehrerinnen besuchten eher Kurse mit konstruktivistischen Intentionen als behavioristischer eingestellte (A3).
- Die Umsteigerinnen verändern ihr Einstellungskonzept im Verlaufe des Schuljahres nicht (A4).
- Die Veränderungen der Einstellungskonzepte sind nicht lehrmittelabhängig (A5).

Ergebnisse aus Forschungsfenster B

- Die Erstklass-Lehrerinnen treten während der halben Lektion als Lernbegleiterin auf und unterstützen die Schüler individuell. Die begleiteten Stillarbeitsphasen stehen in einem zeitlich ausgewogenen Verhältnis zu frontal geführten Unterrichtssequenzen (B1).
- Die belehrende Lernbegleitung überwiegt gegenüber der konstruktivistischen (B3).
- Die Lehrerinnen nehmen sich während Stillarbeitsphasen gleich lang Zeit für schwächere und stärkere Rechnerinnen (B2). Sie belehren schwächere länger als stärkere (B4). Umgekehrt hängt die konstruktivistische Lernbegleitung nicht vom Leistungsvermögen der

Schüler ab (B5)[167].

- Die Umsteigerinnen zeigen die Tendenz, weniger zu belehren und Rezepte zu geben als die Vergleichslehrerinnen (B9). Die konstruktivistische Lernbegleitung dauert in den Treatment- und Kontrollklassen gleich lang (B8).
- Die Einstellungskonzepte spiegeln sich nicht in der Qualität der Lernbegleitung (B6 und B7). Weder Instruktionen mit natürlich differenzierbaren Angeboten hängen mit einem konstruktivistischen (B12) noch enge Aufgabenstellungen mit einem behavioristischen Einstellungskonzept zusammen (B13).
- Die natürlich differenzierbaren Instruktionen der Umsteigerinnen sind kürzer als in den Kontrollklassen (B10). In den Treatmentklassen überwiegen tendenziell qualitative gegenüber quantitativen Formen der natürlichen Differenzierung (B11).

Ergebnisse aus Forschungsfenster C

- Die Treatment- und Kontrollschüler zeigen vergleichbare Leistungsfortschritte (C1).
- Die Fortschritte schwächerer Rechner sind im Unterricht mit dem Zahlenbuch tendenziell grösser als bei den Vergleichsschülern. Die stärkeren Rechner beider Gruppen zeigen eine ebenbürtige Leistungsentwicklung (C4).
- Die Treatmentschüler lösen die bildlich gestellten Aufgaben des Nachtests erfolgreicher als die Vergleichsschüler. Bei den Schwächeren beider Stichproben zeigt sich eine noch deutlichere Überlegenheit der Treatmentschüler. Im Bereich der formal-symbolischen Rechnungen schneiden die Schwächeren beider Gruppen vergleichbar ab (C2).
- Erstklässler der Treatmentgruppe machen tendenziell mehr Plusminuseins-Zählfehler als die Vergleichsschüler (C3).
- Eine konstruktivistische Grundeinstellung der Lehrerinnen vermag sich nicht fördernd auf die Leistungsentwicklung der Schüler auszuwirken (C5).

[167] Es scheint eine Ungereimtheit zwischen der belehrenderen Lernbegleitung schwächerer Rechner im Vergleich mit stärkeren und der vergleichbaren konstruktivistischen Unterstützung zu bestehen. Die Ursache liegt in den unabhängig voneinander vergebenen Codes, welche nicht dichotom sind.

5.6 Schlussdiskussion

Befunde zum Einstellungskonzept (Forschungsfenster A)

Der didaktische Kompass der Unterstufen-Lehrerinnen weist *eindeutig* in konstruktivistischer Richtung. Dafür sprechen die stabilen Messwerte (zwischen t1 und t5), die Altersunabhängigkeit und die Resistenz der Einstellungskonzepte gegenüber Interventionseinflüssen, z.B. durch ein neues Lehrmittel. Auch die mündlichen Argumente der Lehrerinnen zu vorausgehend behavioristisch beurteilten Belief-Items beinhalten keine Rechtfertigung einer Belehrungsdidaktik. Die Konsequenzen, welche die Lehrerinnen aus den Vortest-Ergebnissen ihrer Schüler ziehen, sind analog: Es überwiegen didaktische Bestrebungen nach natürlicher Binnendifferenzierung, individueller Zielerreichung und sozialem Lernen. Einzig die für schwächere Rechner vorgesehene Didaktik der kleinen und fremdbestimmten Schritte weicht davon ab.

Der erfasste, „offizielle“ Umstieg aufs Zahlenbuch lässt sich nicht durch die didaktische Einstellung erklären. Dahinter können verschiedene Gründe liegen, z.B. ein Lehrmittelwechsel, der weniger die Entscheidung „Entweder-oder“, sondern ein „Sowohl-als-auch“ beinhaltet. Immerhin setzt die Hälfte der einen Gruppe auch das Lehrmittel der andern ein oder orientiert sich zumindest daran. Der „inoffizielle“ Umstieg ist nicht in die quantitative Datenerhebung einbezogen, er könnte das Ergebnis aber entscheidend beeinflussen. Neben finanziellen und schulpolitischen Aspekten (z.B. ein obligatorischer Einführungskurs), kann auch die blosse Unzufriedenheit mit dem bisherigen Rechenbuch einen Lehrmittelwechsel auslösen.

Als konzentriertes Resultat des Untersuchungsteils A halte ich fest:

Die Einstellung der Unterstufen-Lehrerinnen entspricht derjenigen einer konstruktivistisch orientierten Mathematik-Didaktik.

Befunde zum didaktischen Handeln (Forschungsfenster B)

Das ausgewogene Verhältnis zwischen lehrerzentriertem Frontalunterricht und erweiterten Lernformen ist ein unterrichtsorganisatorisches Kennzeichen des Erstklass-Unterrichts. Dezentrierte Angebote bedürfen des längerfristigen Aufbaus einer Lernkultur und einer durchdachten Organisation, damit sie ein selbstständiges, aktives und zielgerichtetes Lernen ermöglichen. Diesen Anspruch lösen die Lehrerinnen mehrheitlich ein: Es beeindruckte mich, mit welcher Selbstständigkeit und Konzentration die Erstklässler bei der Sache waren. In einzelnen Lektionen herrschte allerdings eine Betriebsamkeit, welche die Lerneffizienz vermutlich stärker beeinflusste als die nachgewiesenen Unterschiede während der Lernbegleitung.

Einige Befunde zur Qualität der Lernbegleitung und zur Aufgabeninstruktion fallen in eine gemeinsame Interpretationslinie:

- Grundsätzlich sind die an einzelne Schüler gerichteten Äusserungen eher belehrend als konstruktivistisch unterstützend. Damit ist die Qualität der Lernbegleitung keine Spiegelung der konstruktivistischen Grundeinstellung der Lehrerinnen.
- Auch beim Vergleich zwischen den didaktischen Einstellungen und den Instruktionen entsteht ein analoges Bild: Es lässt sich keine Kohärenz zwischen Einstellung und didaktischem Verhalten nachweisen.

Damit stellen sich weitere Fragen:

- „Warum belehren konstruktivistisch orientierte Lehrerinnen gegenüber behavioristisch ausgerichteten zwar weniger, fallen aber nicht durch eine konstruktivistischere Lernbegleitung auf? Warum orientieren sie sich nur bescheiden an der natürlichen Differenzierung?“
- „Warum unterscheiden sich Lehrerinnen, die hauptsächlich mit dem Zahlenbuch unterrichten, punkto geringerer Belehrung nur schwach von der Kontrollgruppe? Warum kommt die konstruktivistische Begleitung in beiden Gruppen vergleichbar selten vor?“
- „Warum werden schwächere Rechner eher belehrt als stärkere und warum ist bezüglich konstruktivistischer Begleitung keine umgekehrte Beziehung feststellbar?“

Die Beziehung zwischen konstruktivistischer Einstellung und didaktischer Umsetzung liegt nur einseitig vor. Konstruktivistisch Eingestellte zeigen weniger belehrende Verhaltensweisen als behavioristisch Eingestellte, sie fallen aber nicht durch konstruktivistischere Instruktionen und Impulse während der Lernbegleitung auf. Ich begründe dies hauptsächlich mit der fehlenden Kompetenz: Die Lehrerinnen wollen einen konstruktivistischen Unterricht gestalten, können das aber nicht, weil ihnen Handlungskompetenzen fehlen oder weil sie die Bedingungen nicht als günstig erachten. Die beiden Erklärungsmöglichkeiten stehen in einem wechselwirkenden Verhältnis, da fehlende Kompetenzen auch als ungenügende Unterrichtsbedingungen ausgelegt werden können. Die Diskussionen in Kapitel 5.3.8 liefern weitere untersuchungsspezifische und unterrichtspragmatische Begründungen für die festgestellten Ungereimtheiten.

Die wichtigsten Ergebnisse und Interpretationen aus Untersuchungsteil B betreffen:

- Dezentrierte Lernformen geben keine Anhaltspunkte darüber, inwiefern die Konstruktivität des Lernens unterstützt wird. Auch der frontal geführte Unterricht ist nicht mit Belehrungsdidaktik gleichzusetzen.
- Die Qualität des Unterrichts hängt von seiner didaktischen Gestaltung ab und nicht vom Gebrauch eines bestimmten Lehrmittels.
- Zwischen den Einstellungskonzepten und den didaktischen Handlungen besteht keine Kohärenz. Begründung: Ein konstruktivistisch orientierter Unterricht stellt an die Lehrpersonen, die Gestaltung der Lernumgebung, die Unterrichtsorganisation und das Lernverhalten der Schüler hohe Ansprüche.
- Schwächere und stärkere Rechner erfahren eine vergleichbar lange Lernbegleitung, allerdings mit unterschiedlicher Qualität: Die vorherrschende Belehrung schwächerer Rechner erfolgt eher in Form von Kurzanweisungen. Sie wird verständlich, wenn sie in den Kontext des gesamten Unterrichts rückt, in welchem die Lehrerin Lernbegleiterin der ganzen Klasse und Anwältin einer produktiven Lernkultur ist.
- Der didaktischen Forschung schlage ich vor, Stichproben, die über das Kriterium Lehrmittel gebildet werden, mit Parametern der Unterrichtsgestaltung zu differenzieren.

Konsequenzen für die Leistungsentwicklung der Schüler (Forschungsfenster C)

Die Leistungsentwicklung der Schüler ist im Unterricht mit dem einen oder andern Lehrmittel vergleichbar. Diese pauschale Aussage lässt sich nur geringfügig differenzieren, da die Datenerhebung über einen schriftlichen Test erfolgte. Sie gibt aber weiterführenden Fragestellungen zum Unterricht mit dem Zahlenbuch eine Ausgangsbasis.

Eine Spezifizierung betrifft die Plusminuseins-Zählfehler, die bei Treatmentschülern häufiger vorkommen als in der Kontrollgruppe, obwohl das Zahlenbuch reichhaltige Angebote zur Verinnerlichung des Zählens und zur Auseinandersetzung mit Zählstrategien macht. Aus den Interviews geht hervor, dass die Lehrerinnen derart Übungen teilweise grosszügig überspringen und zum „eigentlichen Rechnen“ übergehen. Meine Empfehlungen an die Lehrerinnen: „Nehmt die Angebote ernst und erweitert sie, indem ihr das Erkenntniswerkzeug ‚Finger‘ thematisiert und den praktizierten Zählstrategien vermehrt Aufmerksamkeit schenkt“. – „Bietet Übungen an, damit die Schüler Zählprozesse verinnerlichen, ökonomisieren und flexibilisieren können“. – „Nutzt die das Zahlenbuch begleitenden Anschauungsmaterialien nicht (nur) als Lernkrücke, die es möglichst schnell wegzulegen gilt, sondern auch als Erkenntnismittel, anhand derer die Schüler die Verbalisierung der eigenen Gedanken lernen“.

Besondere Beachtung verdienen die Befunde, dass schwächere Rechner im Unterricht mit dem Zahlenbuch tendenziell grössere Fortschritte zeigen und im Bildteil besser abschneiden als die Vergleichsschüler. Dafür mache ich den verstehensorientierten Vorschlag des Zahlenbuchs verantwortlich, der die Schüler durch aktiv-entdeckendes Lernen mit Anschauungsmaterialien zu Einsichten führt. Das Lehrmittel bietet Anregungen, von konkreten oder bildlich repräsentierten Sachsituationen auszugehen und mathematisch zu modellieren. Im kantonalen Lehrmittel stören sich die Lehrerinnen an den zahlreichen Wechseln zwischen formalen Darstellungsweisen. Sie sehen sich veranlasst, den Schülern Rezepte zu geben für das Ausfüllen der verschiedenen Leerstellen in den Rechnungen. Die Problematik liegt im Diktat der formalen Notation, die viele Schüler in ihrer operativen Struktur nicht verstehen.

Im Formalteil schneiden die schwächeren Rechner beider Gruppen vergleichbar ab, m.E. weil dieser lediglich die mechanische Durchführung von Additionen und Subtraktionen erfordert. Diese Interpretation hebt hervor, dass die Anzahl richtig gelöster Aufgaben weniger Auskunft über verfügbare Kompetenzen gibt als über die Beherrschung mathematischer Prozeduren.

Die wesentlichen Ergebnisse aus Untersuchungsteil C beinhalten:

- Die Schüler ziehen aus dem Unterricht mit dem Zahlenbuch und demjenigen mit dem kantonalen Lehrmittel einen vergleichbaren Lerngewinn.
- Die Treatmentgruppe zeigt mehr Zählfehler als die Kontrollgruppe.
- Vor allem die schwachen Rechner profitieren vom verstehensorientierten Unterricht, den das Zahlenbuch vorschlägt.

Die didaktische Orientierung wirkt sich nicht auf die Leistungsentwicklung der Schüler aus, weil sie kein Handlungskorrelat findet. Selbst ein Unterricht mit ausgeprägt konstruktivistischer Lernbegleitung und natürlicher Differenzierung würde kaum Anlass geben, grössere Leistungsfortschritte anzunehmen. Neben den geprüften Merkmalen müssten weitere Faktoren wie die Effizienz beim dezentrierten Lernen (ohne Anwesenheit der Lehrerin) oder die effektive Lernzeit pro Lektion einbezogen werden, damit Leistungsunterschiede sichtbar würden.

6 Zusammenfassung und didaktische Konsequenzen

6.1 Zusammenfassung

Im Zentrum der vorliegenden Arbeit stehen Einstellungskonzepte und didaktische Verhaltensweisen von Unterstufen-Lehrerinnen, die vom traditionellen Rechenbuch aufs Zahlenbuch wechselten. Ich stelle dazu einige Fragen:

- „Orientieren sich die Lehrerinnen an einer konstruktivistischen Lehr-/Lernphilosophie?“
- „Ist der Lehrmittelwechsel mit der didaktischen Einstellung erklärbar?“
- „Zieht die Arbeit mit dem neuen Lehrmittel eine Veränderung der Einstellung nach sich?“
- „Hängt das didaktische Verhalten der Lehrerinnen mit ihrem Einstellungskonzept und dem eingesetzten Lehrmittel zusammen?“
- „Lässt sich die Lernbegleitung schwächerer und stärkerer Rechner vergleichen?“
- „Hängen die Leistungsfortschritte der Schüler vom Lehrmittel und/oder der didaktischen Einstellung der Lehrperson ab?“

Die empirische Studie ist in einen theoretischen Bezugsrahmen eingespannt, welcher eine konstruktivistische Lehr-/Lernauffassung fokussiert und einer behavioristischen gegenüberstellt. Aktivität und Konstruktivität – als zentrale Merkmale verstehensbasierten Lernens – sind alte didaktische Desiderata, die von der Praxis aber erst ansatzweise eingelöst werden. Die Konstruktivismus-Debatte erfüllt eine wichtige Funktion, wenn sie erneut auf diese Anliegen hinweist, eigene Ideen entwirft und entsprechende Forderungen stellt.

Das Portrait eines konstruktivistisch orientierten Mathematik-Unterrichts sieht wie folgt aus:

- Aktive und intrinsisch motivierte Wissenskonstruktionen bedürfen *reichhaltiger Lernangebote* und eines *sozialen Austauschs*. Schüler mit unterschiedlichen Lernvoraussetzungen finden darin individuelle Herausforderungen und Anlässe für Ko-Konstruktionen. Die alte didaktische Forderung nach einem *adaptiven Unterricht* (Schwarzer & Steinhagen, 1975)

– die Lehrerin soll die Schüler dort abholen, wo sie stehen – füllt sich mit einer neuen Bedeutung: Die Schüler erhalten interessante und substanzielle Problemstellungen, die sie individuell angehen und eigene Ziele erreichen. Das Abholen liegt auch in der Verantwortung des Schülers, indem er *seinen* Zugang zum Lerngegenstand findet. Die Lernphilosophie, die von aktiven Lernprozessen ausgeht und individuelle Lerngewinne ziehen lässt, favorisiert eine *natürliche Differenzierung*, bei der die Schüler Herausforderungen suchen, welche sie selber bewältigen können.

- Dabei ist es entscheidend, dass an Stelle mechanisch durchführbarer Anweisungen mentale Aktivitäten ausgelöst und kognitive Spannungen erzeugt werden.
- Die Komponenten *reichhaltige Lernumgebung* und *natürliche Differenzierung* deuten an: In einer konstruktivistisch orientierten Mathematik-Didaktik bedarf es der Beziehungsklärung zwischen Lehrerin, Schülern und Lerninhalten. Die Lehrerinnenrolle wandelt sich von der zentralen Vermittlungsinstanz zur Lernbegleiterin und die Schüler sind keine „Durchführer“ von Anweisungen, sondern nach mathematischen Beziehungen Suchende, die am Verstehen ihres Tuns interessiert sind. Dieses Lehr-/Lernverständnis zeichnet sich durch Aktivität, Intentionalität, Selbstregulation und Verstehensorientierung des Schülers und eine prozessorientierte Lernbegleitung aus.
- Die Annahme, dass *alle Kinder eigene Lernwege selbstverantwortlich, kreativ und zielgerichtet beschreiten*, ist m.E. eine romantische. Der unterschiedlichen Lernkompetenz der Schüler muss didaktisch begegnet werden, damit der Einzelne seinen Lernweg als Freiraum erleben und produktiv nutzen kann.

Die Lehrerinnen setzen ihre ausgeprägt konstruktivistische Überzeugung allerdings nicht kohärent um. Vielleicht weil die Anforderungen zu hoch liegen, die Unterrichtsbedingungen dies nicht erlauben oder entsprechende Kompetenzen fehlen. Die Studie zeigt zudem, dass die Unterrichtsgestaltung und Lernbegleitung weniger vom eingesetzten Lehrmittel als von den Absichten und vom Geschick der Lehrerinnen abhängen.

Für die Weiterentwicklung didaktisch wirksamer Handlungskompetenzen ist es günstig, wenn die Lehrerinnen ihre subjektive Sichtweise mit einer Beobachterperspektive konfrontieren, z.B. in Form von Inter- und Supervisionen. Auch empirische Überprüfungen, aus denen Vorschläge für die Aus- und Weiterbildung hervorgehen, können diesbezüglich wertvolle Dienste leisten. Dass die Mathematik-Didaktik ihre Ruder auf die richtige Seite schlägt, zeigen die Befunde der schwächeren Rechner, die aus dem Unterricht mit einem konstruktivistisch orientierten Lehrmittel (und gleich gesinnten Lehrerinnen) ein breiteres und vertiefteres mathematisches Verständnis ziehen[168].

Die Diskrepanzen zwischen Einstellung und Umsetzung weisen darauf hin, dass die Umbruchzeit zwischen zwei Paradigmen neben der theoretischen auch eine intensive unterrichtspraktische Auseinandersetzung verlangt. Es wäre verfehlt, sich revolutionsartig, euphorisch und „bewusstlos" vom einen ins andere zu stürzen (vgl. Kap. 2.2.5; Bleicher, 1996). In der Geschichte der Pädagogik und Didaktik sind genügend Belege für unausgereifte Konzeptionen zu finden, die sich rasch und flächendeckend verbreiteten, aber keine Überlebenschance hatten. Ich erwähne lediglich die bis zum formalen Exzess getriebene Mengenlehre in den siebziger Jahren oder den überdimensionierten Stellenwert, den pränummerische Operationen im Anfangsunterricht einnahmen. Beide sind im Nachhinein als Schnellfeuer zu interpretieren, mit welchem die Mathematik-Didaktik übereifrig erkenntnistheoretische Grundlagen aus Piagets Theorie hereinnahm.

Als gesichert und bewährt gelten die Botschaften, dass der Zugang zur Mathematik nicht auf einer möglichst früh formal-symbolisch verlaufenden Schiene erfolgen soll, sondern durch einen konkreten Alltags- und Erfahrungsbezug, der emotionale Betroffenheit auslöst. Das abstrakte, modellhafte und theoretische Denken greift erst in der formal-operatorischen Stufe im Alter von 14 bis 16 Jahren. Der traditionelle Unterricht strebt leider eine frühe Abstrahierung von konkreten Primärerfahrungen an und löst damit in der Lernbiografie vieler Schüler und Schülerinnen eine grundsätzliche emotionale Abwehr aus.

Auch rezeptives Lernen – z.B. im Frontalunterricht – kann konstruktives Lernen anregen, wenn es sich an internalen Aktivitäten des Schülers orientiert und ihm zur Verarbeitung und Weiterentwicklung des Aufgenommenen geeignete Problemstellungen anbietet. In diesem Sinne bereiten die meisten videografierten Frontalsequenzen auf eine individuelle Auseinandersetzung mit einer mathematischen Grundidee vor. Der Frontalunterricht kontrastiert konstruktives Lernen erst, wenn auf Rezeptivität Reproduktivität folgt, also das Unterrichtsmuster

[168] In dieselbe Richtung weisen auch Walter, Suhr und Werner (2001), die in einer Pilotstudie die Lerneffizienz des traditionellen Unterrichts mit derjenigen in einer konstruktivistischen Konzeption verglichen. Die Untersuchung weist allerdings einige forschungsmethodologische Mängel auf.

aus kleinschrittigem Vormachen-Nachmachen besteht und dem Schüler keinen Spielraum für mentale Aktivitäten und subjektive Verstehenskonstruktionen lässt.

6.2 Konsequenzen für die Grundausbildung

Konstruktivistische Unterrichtskonzeptionen sind an längerfristige Entwicklungsprozesse gebunden, die erst im Zuge reflektierter Lehrerfahrungen Bildungsressourcen freilegen. Die Grundausbildung erfüllt eine wichtige Aufgabe, wenn sie die Studierenden motiviert, im kommenden Unterrichtsalltag schrittweise nach Wegen in dieser Richtung zu suchen.

Da die gewachsenen Unterrichtsbilder angehender Lehrpersonen häufig aus einem traditionellen Unterricht stammen, sind Selbsterfahrungen mit aktiv-entdeckendem und natürlich differenziertem Lernen zentrale Elemente einer didaktischen Grundausbildung. Entscheidend ist das Öffnen der Scheuklappen: Die (als Schüler erlebte) traditionelle Schule von gestern ist nicht das Richtmass, das es nachzuahmen gilt. In theoretischer Reflexion und Auseinandersetzung mit eigenen Lernprozessen sollen die Studierenden von den Intentionen einer modernen Schule erfahren, welche sich an veränderten lehr-/lernphilosophischen Leitlinien orientiert und durch eine permanente Weiterentwicklung gekennzeichnet ist.

Meine zentrale didaktische Botschaft an zukünftige Lehrpersonen besteht darin, bei der Planung und Umsetzung des Unterrichts von den Lernaktivitäten der Schüler und nicht von den eigenen Lehraktivitäten auszugehen. Ich verdeutliche den Unterschied zur Dominanz des Lehrens an einem Beispiel, welches Studienanfänger aus ihren ersten Microteaching-Lektionen[169] wiederkehrend in die gemeinsame Reflexion bringen: „Diejenigen Schüler, welche die Bildergeschichte frühzeitig zum Abschluss brachten, beauftragte ich, die Bilder auszumalen.“ Mit der instruierten Beschäftigung vermag der Student entstehende Zeitnischen organisatorisch zu regeln, er löst damit aber keine substanziellen Lernprozesse aus. Am Lernen des Schülers orientierte Aufträge könnten z.B. darin bestehen, von der ersten Situation ausgehend eine eigene Bildergeschichte mit einem neuen Verlauf zu zeichnen oder zu schreiben, den Entwurf zu überarbeiten oder gegenseitig Korrektur zu lesen.

[169] Im Microteaching üben die Studierenden spezifische Fertigkeiten des Lehrens mit einer kleinen Schülergruppe. Das genannte Beispiel bezieht sich auf den Unterricht in einer vierten Klasse.

Es ist nachvollziehbar, dass Studierende zunächst elementare Kompetenzen erarbeiten müssen – z.B. klare und vollständige Instruktionen geben, organisatorische Rahmenbedingungen schaffen oder Lektionen und Unterrichtseinheiten aufbauen, etc. – und erst anschliessend den Blick frei bekommen für das Wesentliche, das aktive Lernen der Schüler. Es ist wichtig, dass praktische Übungs- und Erfahrungsmöglichkeiten mit dem „Lehrer-Kunsthandwerk" früh einsetzen, damit später die Lernaktivitäten der Schüler ins Zentrum rücken können. Die Studierenden sollen erfahren, dass die Schüler erst durch eigene Denkleistungen ein Bewusstsein für aufzubauende Strukturen entwickeln.

In meiner Funktion als Schulischer Heilpädagoge begleitete ich einige von Junglehrerinnen geführte Schulklassen. Die Dominanz des dezentrierten Lernens war nicht zu übersehen. Die Schüler bewegten sich über weite Strecken von Werkstattposten zu Werkstattposten, sie erledigten Arbeitsblatt um Arbeitsblatt, ohne gemeinsame Reflexion oder dialogischen Austausch. Die Abartigkeit eines so verstandenen „modernen Lernens" zeugt von einer gewissen Hilflosigkeit, die eher zu einer Vereinzelung im Schulzimmer führt als zu einem konstruktiven und sozialen Lernen. M.E. darf die Grundausbildung nicht vermitteln, dass der Junglehrer von hoch anspruchsvollen dezentrierten Lernangeboten auszugehen hat und diese ins Unterrichtszentrum stellt, bevor er sie in eine unterrichtliche Gesamtkonzeption integrieren und mit heterogen verlaufenden Lernprozessen verbinden kann. Allzu schnell arten solche gut gemeinten Ansätze in eine leere Betriebsamkeit aus, die ihren didaktischen Wert nicht entfalten lassen. Ein Junglehrer ist gut beraten, wenn er zunächst an der Optimierung eines abwechslungsreichen Frontalunterrichts arbeitet und ihn schrittweise in konstruktivistischer Richtung durchbricht und weiterentwickelt. Damit ist die notwendige Motivation und kontinuierliche Bereitschaft angesprochen, sich auf einen anspruchsvollen Lernprozess einzulassen.

Dezentriertes, aktiv-entdeckendes und soziales Lernen sind probate didaktische Antworten auf Individualisierungs- und Differenzierungsfragen, die sich im Unterricht mit heterogenen Lerngruppen stellen. Ein wichtiges Ziel der didaktischen Grundausbildung wäre erreicht, wenn die Studierenden ihren Schuldienst mit dem Bewusstsein beginnen, dass die Schüler Gleiches unterschiedlich verstehen bzw. verschiedene Lernprozesse auslösen können. Eine solche Akzeptanz und Toleranz ermöglicht den Aufbau einer produktiven Lernkultur, in der divergierende Lern- und Denkwege den sozialen Austausch ergiebig und interessant machen.

6.3 Konsequenzen für die Weiterbildung

Im Unterschied zu den Studierenden verfügen Lehrpersonen, die didaktische Weiterbildungskurse besuchen, über reiche Lehr-Erfahrungen mit konkreten ungelösten Fragen. Ihre Unterrichtsbilder aus der eigenen Schul- und Studienzeit sind – wie bei den Studierenden – mehrheitlich in einem traditionellen Unterricht gewachsen und beeinflussen das Lehren. Sie erzeugen im Zusammenspiel mit konstruktivistischen Absichten ein Gefühl von Ungereimtheiten, vorwiegend weil taugliche didaktische Werkzeuge fehlen. Die dargestellten Konsequenzen für die Grundausbildung – Orientierung an der Aktivität des Schülers, Selbsterfahrungen mit konstruktivistischem Lernen – lassen sich nach Anpassung der Ziele auf die Weiterbildung übertragen. Ich gehe einen Schritt weiter und beschreibe exemplarisch, in welche Richtung ein didaktisches Fazit bezüglich Gestaltung der Weiterbildung gezogen werden könnte.

In meinen eigenen Kursangeboten dreht sich die Auseinandersetzung mit didaktischen Inhalten um die Achsen „Eingehen auf konkrete Lernbedürfnisse der Lehrerinnen", „Übernahme von Lernverantwortung durch die Teilnehmerinnen" und „Anregung aktiver Lernprozesse und sozialer Austauschmöglichkeiten": Die Mitverantwortung für die singulären Lerngewinne liegen entscheidend bei den lernenden Lehrerinnen. Ausgehend von theoretischen Impulsreferaten und unterrichtspraktischen Reflexionen können die Teilnehmerinnen individuelle Schwerpunkte setzen, z.B. beim ...

- Literaturstudium,
- Erarbeiten von Lernumgebungen,
- Herstellen von Unterrichtsmaterialien,
- Erfahrungen sammeln mit aktiv-entdeckendem Lernen und
- Ausprobieren von Lernspielen und Lernsoftware.

Gefässe für den sozialen Austausch sind möglich in ...

- der gemeinsamen Reflexion von videografierten Unterrichtsbeispielen,
- kleinen Diskussionsgruppen zu selber bestimmten Themen,
- Podiumsdiskussionen,
- Einzelgesprächen mit dem Kursleiter und
- während den Pausen, die eine wichtige kursorische Funktion erfüllen.

Die Lehrerinnen bringen jeweils rhythmisch-musikalische „Stampf- und Klatschlieder“ aus ihrem eigenen Unterricht mit und setzen diese mit den Kursteilnehmerinnen um. Sie geben damit Blitzlichter aus ihrem Unterricht preis und erfahren, welche pränummerischen Funktionen solche Angebote im Mathematik-Unterricht erfüllen können. Auch die persönliche Gliederung, Einordnung und Kommentierung der Kursunterlagen gehört zu jenen aktiven Lernprozessen, die eine Vertiefung der Kursinhalte ermöglichen, Zusammenhänge erkennen lassen und die eingeführten Klassifikations-Operationen mit einem konkreten Inhalt füllen.

Ich darf über gute Erfahrungen mit dem „Kurs im Kurs“ berichten, welcher vormittags und nachmittags aus einer zehnminütigen Trainingseinheit „Jonglieren mit Bällen“ besteht. Dahinter liegt die Absicht, die Lehrpersonen auf natürlich differenzierte und soziale Lernprozesse mit selber formulierten Lernzielen zu schicken. Es ist beeindruckend, wie die Teilnehmerinnen einander helfen, korrigieren und hinweisen, wie ehrlich sie über ihre Höhen und Tiefen, ihre Lust und Unlust und über ihre Freude an erreichten Lernzielen sprechen.

Eine zweite Motivation, diese aktiven „Kursinseln“ anzubieten, leite ich aus häufig gehörten Fragen ab, die sinngemäss lauten: „Wie kann *ich* das beim Schüler erreichen?“ – „Wie kann *ich* diese Fehler bei ihm wegbringen?“ Meine Antwort: „Nicht *du* kannst das erreichen oder wegbringen, du kannst dem Schüler lediglich günstige Lernangebote machen, damit *er* seinen Weg findet. Wie weit die Schüler kommen, welches Verständnis sie aufbauen und welche Strategien sie erwerben, entscheiden sie selber, genau gleich wie du beim Jonglieren“.

Die dritte Funktion erfüllt der „Kurs im Kurs“, indem ich die Lehrerinnen ohne Anweisungen und Vorübungen in eine motorisch substanzielle Lernumgebung schicke und als Lernbegleiter wirke. Mit meinen Impulsen versuche ich, die aufgebauten Kompetenzen aufzunehmen, spezifische Übungsvorschläge zu machen und neue Lernvereinbarungen zu treffen. Die Lehrerinnen reflektieren anschliessend über die Rolle des Lernbegleiters und ziehen eigene Schlüsse.

Am Beispiel „Kurs im Kurs“ mache ich fest, dass Lehrerweiterbildung aktives Lernen am Konkreten und Erlebbaren anregen soll. Abstrakte theoretische Hintergründe bekommen dadurch eine in die Tiefe gerichtete Fassbarkeit, analog der Konkretisierung durch ein selber hergestelltes Spiel, das theoretische Botschaften verkörpert. Die didaktische Weiterbildung soll also an die vorhandenen Kompetenzen und aktuellen Bedürfnisse der Lehrerinnen anknüpfen. Entsprechend den Desiderata zum Anfangsunterricht braucht die *Weiter*bildung nicht bei „Stunde Null“ zu beginnen und aus einer theoretischen Wolke heraus Botschaften zu verbreiten. Gefragt sind Lehr-/Lernsettings, die lernende Lehrpersonen ernst nehmen und mit fassbaren Impulsen auf neue Wege schicken.

Das exemplarisch skizzierte Weiterbildungsprofil, welches ein konstruktivistisches Lehren und Lernen anpeilt, ist seitens der Weiterbildner an verbindliche Erwartungen bezüglich theoretischer und unterrichtspragmatischer Kompetenzen geknüpft. Ein Weiterbildungskonzept, das diese Ansprüche erfüllt, realisieren Urs Ruf und Peter Gallin. Sie leiten ihre Kurse gemeinsam mit Praktikerinnen, die ihre Konzeption im Unterrichtsalltag umsetzen, diesbezüglich über Erfahrungen verfügen und praxisrelevante Impulse vermitteln können.

Die kursorische Weiterbildung kann Anstösse geben, theoretische Hintergründe und Selbsterfahrungen vermitteln. Darüber hinaus scheint es mir dringlich, didaktisch angerissene Richtungen vor Ort zu begleiten und die Lehrpersonen mit Instrumentarien einer professionellen Reflexion vertraut zu machen. Meine Botschaft ist klar, bestimmt und mit einem grossen Aufwand verbunden. Wenn Lehrerinnen didaktisch-konstruktivistische Wege verfolgen möchten und diese nicht umsetzen können, müssen sie das Recht bekommen, eine professionelle Begleitung anzufordern. Die Möglichkeiten sind vielfältig: Sie reichen von schulhausinternen Weiterbildungen über lokale stufenspezifische Angebote bis zur Einzelbegleitung. Meine Empfehlungen überschneiden sich mit der Begleitfunktion, die auch Schulische Heilpädagoginnen in integrativen Schulmodellen erfüllen können.

6.4 Heilpädagogische Konsequenzen

Schwächere Rechner ziehen aus konstruktivistischen Unterrichtskonzeptionen einen erfreulichen Lerngewinn. Dass sie überwiegend Belehrung erfahren, lässt sich als unterrichtsorganisatorischer Kompromiss interpretieren, mit dem die Lehrerinnen die Begleitung aller Schüler wahrnehmen und eine produktive Lernkultur aufrecht erhalten. Ich sehe drei Ansatzmöglichkeiten, dem aktiven Lernen schwächerer Rechner lernprozessorientierter zu begegnen: Die Kompetenzerweiterung und Einstellungsveränderung der Lehrerinnen, die zusätzliche Lernbegleitung via Schulische Heilpädagoginnen und Weiterbildungen, die konkrete Reflexionsmöglichkeiten vor Ort anbieten.

Die Belehrung schwächerer Rechner ist nicht nur unterrichtsorganisatorisch zu begründen. Sie spiegelt auch die Meinung der Lehrerinnen, Schwächere bräuchten engere Strukturen, weil sie mit aktiv-entdeckendem Lernen überfordert seien. Ich entgegne mit der Forderung, dass sich die Lehrerinnen ein didaktisches Handlungsrepertoire erarbeiten, dieses gezielt reflektieren und dabei ihre Absichten differenzieren.

Die Kompetenzerweiterung und Einstellungsveränderung der Lehrerinnen spielt auch in integrativen Modellen eine zentrale Rolle, da sie mehrheitlich alleine ihre Klasse unterrichten. In den letzten 20 Jahren entstanden gesamtschweizerisch zahlreiche schulische Integrationskonzepte. Sie ermöglichen schwächeren Schülern mit besonderen Förderbedürfnissen, einen heilpädagogisch begleiteten Regelschulunterricht zu besuchen. Der Integrationsgedanke ist mit dem Anspruch verbunden, dass jedes Kind auf seinem Lern- und Leistungsniveau Ziele erreichen darf und nicht nur am Richtmass von Lehrzielen beurteilt wird. In diesem Sinne werte ich es als positives Zeichen, dass die Lehrerinnen – ohne Anwesenheit einer Heilpädagogin – schwächere und stärkere Rechner beim individuellen Lernen zeitlich vergleichbar unterstützen. Allerdings scheinen die Lehrerinnen überfordert, Schwächere und Stärkere qualitativ gleichwertig zu begleiten. In integrativen Konzepten könnte es Aufgabe Schulischer Heilpädagoginnen sein, auch schwächeren Rechnern eine konstruktivistische Lernbegleitung anzubieten und damit den Unterricht in Richtung Differenzierung des Lernstoffes und Individualisierung der Lernprozesse zu optimieren. Schulische Heilpädagoginnen können die Qualität der Lernbegleitung entscheidend beeinflussen, wenn sie den Primarlehrerinnen ein gemeinsames Reflektieren und Festlegen von Zielsetzungen anbieten.

An die Weiterbildung richte ich den Appell, praxisnahe Vorschläge zu einem konstruktivistischen Unterricht mit lern- und leistungsauffälligen Schülern zu machen. Hierzu sind die Forschungsergebnisse aus dem Sonderschulbereich vielversprechend, aber noch zu wenig konkret. Sie beinhalten, dass ein aktiv-entdeckender Unterricht auch mit lernbehinderten Schülern möglich und effektiv sein kann. Ich wiederhole meine Forderung: Es bedarf differenzierter Weiterbildungskonzepte, die den Primarlehrerinnen gemeinsam mit den Schulischen Heilpädagoginnen eine Praxisreflexion in Form einer unterrichtlichen Innenschau anbieten.

Eine letzte Konsequenz ziehe ich aus den Äusserungen einiger Lehrerinnen, die sich bezüglich diagnostischer Übersicht zum Lern- und Leistungsvermögen einzelner Schüler verunsichert fühlen. Wenn diese in individuelle Lernprozesse eintauchen und singuläre Ziele verfolgen, ist es für die Lehrerinnen schwierig, sozialnormorientierte Vergleiche anzustellen. Potenzielle Unsicherheiten diesbezüglich delegiere ich an die Weiterbildung, die kriteriums-, individual- und sozialnormorientierte Beurteilungsdimensionen ausleuchten und einer unterrichtspraktischen Handhabbarkeit verfügbar machen soll.

Es scheint mir selbstverständlich, in pädagogisch-didaktischen Belangen permanent Ausschau nach Optimierungsmöglichkeiten zu halten. In Anbetracht der erfreulichen Fortschritte, welche schwächere Rechner erzielen, darf die konstruktivistisch orientierte Praxis ihre Unterrichtsgestaltung mit Gelassenheit weiterentwickeln.

7 Verzeichnisse

7.1 Abbildungsverzeichnis

7.2 Tabellenverzeichnis

7.3 Literaturverzeichnis

Aebli, H. (1980). *Denken, das Ordnen des Tuns. Kognitive Aspekte der Handlungstheorie* (Bd.1). Stuttgart: Klett-Cotta.

Aebli, H. (1985). Das operative Prinzip. *Mathematiklehren*, (11), 4-6.

Aebli, H. (1994). *Denken, das Ordnen des Tuns. Denkprozessse* (Bd. 2, 2. Aufl.). Stuttgart: Klett-Cotta.

Aebli, H. (1997). *Zwölf Grundformen des Lehrens*. *Eine Allgemeine Didaktik auf psychologischer Grundlage. Medien und Inhalte didaktischer Kommunikation, der Lernzyklus* (9. Aufl.). Bern: Klett-Cotta.

Althof, W. (Hrsg.) (1999). *Fehlerwelten. Vom Fehlermachen und Lernen aus Fehlern. Beiträge und Nachträge zu einem interdisziplinären Symposium aus Anlass des 60. Geburtstags von Fritz Oser.* Opladen: Leske + Budrich.

Bauer, L. (1991). Das operative Prinzip als umfassendes, allgemeingültiges Prinzip für das Mathematiklernen. In *Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 25. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 4. bis 8.3. 1991 in Osnabrück (S.* 132-135). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Beck, E., Guldimann, T. & Zutavern, M. (1991). Eigenständig lernende Schülerinnen und Schüler. *Zeitschrift für Pädagogik, 37*, 735-768.

Betz, D. & Breuninger, H. (1987). *Teufelskreis Lernstörungen. Theoretische Grundlegung und Standardprogramm* (2. Aufl.). München, Weinheim: Psychologie-Verlags-Union.

Bleicher, K. (1996). *Das Konzept integriertes Management* (4. revidierte und erweiterte Aufl.). Frankfurt, New York: Campus.

Bönig, D. (1993). Empirische Untersuchungen zum Transfer zwischen verschiedenen medialen Repräsentationen am Beispiel multiplikativer Operationen. In J.H. Lorenz (Hrsg.), *Mathematik und Anschauung* (S. 25-43, IDM-Reihe Bd. 18). Köln: Aulis Verlag Deubner&Co KG.

Born, R., Kuster, H., Flückiger, V. & Füglister, P. (1983). Teilnehmendes Lehren – mitgestaltendes Lernen. In L. Montada, K. Reusser & G. Steiner (Hrsg.), *Kognition und Handeln* (S. 240-252). Stuttgart: Klett-Cotta.

Bortz, J. & Döring, N. (1995). *Forschungsmethoden und Evaluation für Sozialwissenschaftler* (2. Aufl.). Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

Bromme, R. (1981). *Das Denken von Lehrern bei der Unterrichtsvorbereitung*. Weinheim, Basel: Beltz.

Bromme, R. (1992). *Der Lehrer als Experte. Zur Psychologie des professionellen Wissens.* Bern: Huber.

Bromme R. (1997). Kompetenzen, Funktionen und unterrichtliches Handeln des Lehrers. In Weinert, F.E. (Hrsg.), *Psychologie des Unterrichts und der Schule.* (Enzyklopädie der Psychologie: Themenbereich D, Serie 1, Pädagogische Psychologie; Bd. 3, S. 177-214). Göttingen, Bern, Toronto, Seattle: Hogrefe.

Bruner, J.S. (1971). Über kognitive Entwicklung. In J.S. Bruner, R.R. Olver & P.M. Greenfeld, *Studien zur kognitiven Entwicklung. Eine kooperative Untersuchung am „Center for Cogniteve Studies“ der Harvard-Universität* (S. 21-53). Stuttgart: Klett.

Bruner, J.S. (1972). *Der Prozess der Erziehung*. (2. Aufl.) Düsseldorf: Schwann.

Bruner, J.S. (1974). *Entwurf einer Unterrichtstheorie*. Düsseldorf: Schwann.

Burmester, K. & Bönig, D. (1993). „Im Mathebuch ergeben alle Aufgaben einen Sinn ...“ –

Warum lösen Schüler Kapitänsaufgaben? In K.P. Müller (Red.), *Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 27. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 22. bis 26.3.1993 in Freiburg/Schweiz (S.* 104-107). Hildesheim: Franzbecker.

Buth, M. (1995). *Lerntheorien: mit Anwendungen im Mathematikunterricht und in mathematisch-naturwissenschaftlichen Aufgabenfeldern.* Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Carniel, D. & Spiegel, H. (1997). Geometrie mit Vierlingen. Wie aus einem Missverständnis Neues entstehen kann. *Praxis Grundschule,* (2), 30 und 39-43.

Chi, M.T.H. & Klahr, D. (1975). Span and rate of apprehension in children and adults. *Journal of Experiamental Child Psychology, 19,* 434-439.

Cohen, D.K. & Hill, H.C. (1998). *State Policy and Classroom Performance: Mathematics Reform in California*. Consortium for poicy research in education. University of Pennsylvania: http://www.upenn.edu/gse/cpre/

Damerow, P. (1993). Zum Verhältnis von Ontogenese und Historiogenese des Zahlbegriffs. In W. Edelstein & S. Hoppe-Graff (Hrsg.), *Die Konstruktion kognitiver Strukturen* (S. 195-259). Bern, Göttingen, Toronto, Seattle: Huber.

Dann, H.-D. (1983). Subjektive Theorien: Irrweg oder Forschungsprogramm? Zwischenbilanz eines kognitiven Konstrukts. In L. Montada, K. Reusser & G. Steiner (Hrsg.), *Kognition und Handeln* (S. 77-92). Stuttgart: Klett-Cotta.

Dann, H.-D. (1989). Subjektive Theorien als Basis erfolgreichen Handelns von Lehrkräften. *Beiträge zur Lehrerbildung, 7,* 247-254.

Dehaene, S. (1999). *Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können.* (Originaltitel: The number Sense – How the Mind Creates Mathematics. New York, Oxford (USA): Oxford University Press.) Übersetzung von Anita Ehlers. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser.

Dick, A. (1996). *Vom unterrichtlichen Wissen zur Praxisreflexion: das praktische Wissen von Expertenlehrern im Dienste zukünftiger Junglehrer* (2. Aufl.). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Diesbergen, C. (1998). *Radikal-konstruktivistische Pädagogik als problematische Konstruktion. Eine Studie zum radikalen Konstruktivismus und seiner Anwendung in der Pädagogik.* Bern, Berlin, Frankfurt a.M., New York, Paris, Wien: Lang.

Dörfler, W. (1984). Qualität mathematischer Begriffe und Visualisierung. In H. Kaut-schitsch & W. Metzler (Hrsg.), *Anschauung als Anregung zum mathematischen Tun. 3. Workshop zur „Visualisierung in der Mathematik" in Klagenfurt vom 11.-16. Juli 1983* (S. 44-64). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky/Stuttgart: Teubner.

Dörfler, W. (1985). Handlungen und Mathematiklernen – Ein Vergleich von Ansätzen. In *Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 19. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 5.3. bis 8.3.1985 in Giessen* (S. 94-97). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Dörfler, W. (1986). Das Verhältnis mathematischer Operationen und gegenständlicher Handlungen. In H.-G. Steiner (Hrsg.), *Grundfragen der Entwicklung mathematischer Fähigkeiten.* Schriftenreihe Didaktik der Mathematik (Bd. 13, S. 1-14). Köln: Aulis Verlag Deubner&Co KG.

Dörfler, W. (1988a). Die Genese mathematischer Objekte und Operationen aus Handlungen als kognitive Konstruktion. In W. Dörfler (Hrsg.), *Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung. Arbeiten aus dem Projekt „Entwicklung formaler Qualifikationen im Mathematikunterricht"* (Bd. 16, S. 55-126). Wien, Stuttgart: Teubner.

Dörfler, W. (1988b). Rolle und Mittel von Vergegenständlichung in der Mathematik. In *Beiträge zum Mathematikunterricht* (Bd. 22, S. 110-113). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Dörfler, W. (1989). Begriffsentwicklung durch Handlungsprotokolle. In *Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 23. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 28.2. bis 3.3.1989 in Berlin* (S. 139-142). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Dörfler, W. (1991). Wieso kann man mit abstrakten Objekten rechnen? In *Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 25. Bundestagung für Didaktik der Mathematik. Vom 4. bis 8.3.1991 in Osnabrück (*S. 195-198). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Dubs, R. (1995). Konstruktivismus: Einige Überlegungen aus der Sicht der Unterrichtsgestaltung. *Zeitschrift für Pädagogik, 41,* 889-903.

EDK (1998). *Freiräume, Richtlinien, Treffpunkte: Mathematikunterricht während der obligatorischen Schulzeit.* Dossier 49. Biel: Schüler AG.

Enzensberger, H.M. (1997). *Der Zahlenteufel. Ein Kopfkissenbuch für alle, die Angst vor der Mathematik haben*. München, Wien: Hanser.

Erichson, Ch. (1991). Sachtexte lesen, mit denen man rechnen kann. *Die Grundschulzeitschrift,* (48), 22-25.

Fatke, R. (1979). Jean Piaget. In H. Scheuerl, *Klassiker der Pädagogik II. Von Karl Marx bis Jean Piaget* (Bd.2, S. 290-314). München: Beck.

Fennema, E. & Loef Franke, M. (1992). In D. A. Grouws (ed.) *Handbook of research on mathematics learning and teaching* (pp. 147-164). New York: Macmillan.

Festinger, L. & Carlsmith, J.M. (1959). Cognitive Consequences. *Journal Abnormal and Social Psychology, 58*, 203-210.

Flammer, A. (1988). *Entwicklungstheorien. Psychologische Theorien der menschlichen Entwicklung*. Bern, Stuttgart, Toronto: Huber.

Flexer, R.J. (1986). The power of five: The step before the power of ten. *Arithmetic Teacher,* (2), 5-9.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (Bd. 1). Stuttgart: Klett.

Freudenthal, H. (1981). Didaktik des Entdeckens und ‚Nacherfindens'. *Grundschule, 13 (3),* 103.

Freudenthal, H. (1982). Mathematik – eine Geisteshaltung. *Grundschule, 14* (4), 140-142.

Füglister, P., Born, R., Flückiger, V. & Kuster, H. (1983). Alltagstheorien von Lehrern. *Bildungsforschung und Bildungspraxis, 5,* 47-58.

Fuson, K. C. (1988). *Children's Counting and Concepts of Number.* New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo: Springer.

Gage, N.L. & Berliner, D.C. (1986). *Pädagogische Psychologie* (4. neu bearb. Aufl.). Übersetzt von G. Bach. Weinheim, München: Beltz.

Gallin, P. & Ruf, U. (1990). *Sprache und Mathematik in der Schule. Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz.* Zürich: Verlag Lehrerinnen und Lehrer Schweiz.

Gallin, P. & Ruf, U. (1993a). Sprache und Mathematik in der Schule. Ein Bericht aus der Praxis. *Journal für Mathematik-Didaktik, 14,* 3-33.

Gallin, P. & Ruf, U. (1993b). Lernen durch Schreiben - auch in Mathematik. In K.P. Müller (Red.), *Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 27. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 22. bis 26.3. 1993 in Freiburg/Schweiz (S.* 14-21). Hildesheim: Franzbecker.

Gasser, P. (1999). *Neue Lernkultur. Eine integrative Didaktik.* (Pädagogik bei Sauerländer; Bd. 26: Schwerpunkt Unterrichtsgestaltung). Aarau: Bildung Sauerländer.

Geering, P. (1994). Erste Mathematik mit dem „Zahlenalbum". Kinder Mathematik entdecken lassen. *Schweizer Schule,* (4), 3-25.

Geering, P. (1997). Das Lehrwerkparadigma. Plädoyer für einen alternativen Mathematikunterricht. *SZH*, (3), 23-27.
Gelman, R. & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number.* Cambridge, MA: Harvard University Press.
Gerstenmaier, J. & Mandl, H. (1995). Wissenserwerb unter konstruktivistischer Perspektive. *Zeitschrift für Pädagogik, 6,* 867-888.
Ginsburg, H. & Opper, S. (1969/1998). Piagets theory of intellectual development. An introduction. Dt.: *Piagets Theorie der geistigen Entwicklung* (8. Aufl.). Stuttgart: Klett.
Green, T.F. (1971). *The activites of teaching.* New York: McGraw-Hill.
Grissemann, H. & Weber, A. (1990). *Grundlagen und Praxis der Dyskalkulietherapie. Diagnostik und Interventionen bei speziellen Rechenstörungen als Modell sonderpädagogisch-kinderpsychiatrischer Kooperation* (2. überarb. Aufl.). Bern, Stuttgart, Toronto: Huber.
Grissemann, H. (1996). Dyskalkulie heute: sonderpädagogische Integration auf dem Prüfstand. Methodenintegrierende Förderung von rechenschwachen Kindern in Hinblick auf die schulische Integration von Schülern mit besonderen Lernproblemen. In A. Rett (Hrsg.), *Rehabilitation. Arbeiten zur Theorie und Praxis der Rehabilitation in Medizin, Psychologie und Sonderpädagogoik* (Bd. 40). Bern, Göttingen, Toronto, Sheattle: Huber.
Gudjons, H. (1989). Veranschaulichen und Wahrnehmen. *Pädagogik, 41* (9), 28-29.

Hage, K., Bischof, H., Dichanz, H., Eubel, K., Oehlschläger, H. & Schwittmann, D. (1985). *Das Methoden-Repertoire von Lehrern. Eine Untersuchung zum Schulalltag der Sekundarstufe I.* Opladen: Leske + Budrich.
Hanisch, G. (1985). Gefahren der Visualisierung. In H. Kautschitsch & W. Metzler (Hrsg.), *Anschauung und mathematische Modelle* (S. 99-109). Stuttgart: Teubner.
Hasemann, K. (1998). Die frühe mathematische Kompetenz von Kindergartenkindern und Schulanfängern – Ergebnisse einer empirischen Untersuchung. In M. Neubrand (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 32. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 2. bis 6. März 1998 in München* (S. 263-266). Hildesheim: Franzbecker.
Hendrickson, A.D. (1979). An inventory of mathematical thinking done by incoming first-grade children. *Journal for Research in Mathematics Education*, (10), 7-23.
Hengartner, E. (1992). Pädagogische Leitideen für das Lernen von Mathematik: Für ein Recht der Kinder auf eigenes Denken. *Die neue schulpraxis*, *62* (7/8), 15-27.
Hengartner, E. (Hrsg.) (1999). *Mit Kindern lernen. Standorte und Denkwege im Mathematikunterricht.* Zug: Klett&Balmer.
Hengartner, E. & Röthlisberger, H. (1994). Rechenfähigkeit von Schulanfängern. *Schweizer Schule*, (4), 3-25.
Hengartner, E. & Röthlisberger, H. (1995). Rechenfähigkeit von Schulanfängern. In H. Brügelmann, H. Balhorn & I. Füssenich (Hrsg.), *Am Rande der Schrift. Zwischen Sprachenvielfalt und Analphabetismus* (S. 66-86). Lengwil am Bodensee: Libelle.
Hengartner, E. & Wieland, G. (1995). *Das Zahlenbuch 1. Lehrerband.* Zug: Klett.
Hengartner, E. & Wieland, G. (1996). *Das Zahlenbuch 2. Lehrerband.* Zug: Klett.
Hengartner, E. & Wieland, G. (1997). *Das Zahlenbuch 3. Lehrerband.* Zug: Klett.
Hengartner, E. & Wieland, G. (1998). *Das Zahlenbuch 4. Lehrerband.* Zug: Klett.
Hess, K. (1990). Förderung operativen Denkens im Mathematik-Erstunterricht. Eine Darstellung am Beispiel der Einführung mathematisch-numerischer Operationen „Addition und Subtraktion". *VHN, 59,* 428-445.

Hess, K. (1997). Aufbau mentaler Mengenvorstellungen durch ein Repräsentationsformat mit figuralen Prototypen. In K.P. Müller (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 31. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 3. bis 7. März 1997 in Leipzig* (S. 211-214). Hildesheim: Franzbecker.

Hess, K. (1998). Bewegliches und einsichtiges Operieren im kleinen Einspluseins. In M. Neubrand (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 32. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 2. bis 6. März 1998 in München* (S. 299-302). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Heursen, G. (1983). Kompetenz – Performanz. In *Enzyklopädie Erziehungswissenschaft* (Bd. 1, S. 472-478). Stuttgart: Klett-Cotta.

Hollenstein, A. (1996). *Schreibanlässe im Mathematikunterricht. Eine Unterrichtsform für den anwendungsorientierten Mathematikunterricht auf der Primarstufe. Theoretische Analyse, didaktischer Vorschlag und empirische Evaluation.* Bern, Stuttgart, Wien: Haupt.

Jaquet, F. (1993). Von didaktischer Forschung zu konkreten Schüleraktivitäten. In K.P. Müller (Red.), *Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 27. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 22. bis 26.3.1993 in Freiburg/Schweiz* (S. 22-29). Hildesheim: Franzbecker.

Jahnke, H.N. (1984). Anschauung und Begründung in der Schulmathematik. In *Beiträge zum Mathematikunterricht*: *Vorträge auf der 18. Bundestagung für Didaktik der Mathematik. Vom 13.3. bis 16.3.1984 in Oldenburg* (S. 32-41). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Joerger, K. (1975). *Lernprozesse bei Schülern*. Stuttgart: Klett.

Jost, D., Erni, J. & Schmassmann, M. (1992). *Mit Fehlern muss gerechnet werden. Mathematischer Lernprozess, Fehleranalyse, Beispiele und Übungen.* Zürich: Sabe.

Kalthoff, H. (1995). Die Erzeugung von Wissen. Zur Fabrikation von Antworten im Schulunterricht. *Zeitschrift für Pädagogik, 6*, 925-935.

Knapstein, K. & Spiegel, H. (1995). Testaufgaben zur Erhebung arithmetischer Vorkenntnisse zu Beginn des 1. Schuljahres. In G.N. Müller & E.Ch. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (S. 65-73). Frankfurt a. M.: Arbeitskreis Grundschule – Der Grundschulverband – e.V.

Koch-Priewe, B. (1986). *Subjektive didaktische Theorien von Lehrern. Tätigkeitstheorie, bildungstheoretische Didaktik und alltägliches Handeln im Unterricht.* Frankfurt a.M.: Haag und Herchen.

Kohlberg, L. (1995). In W. Althof (Hrsg.), *Die Psychologie der Moralentwicklung*. Frankfurt a.M.: Suhrkamp.

Kornmann, R. & Schäffler, G. (1988). Förderdiagnostik bei einfachen Rechenaufgaben: Ermittlung der Lernbasis durch systematische item-Variationen. *Heilpädagogische Forschung, 14* (2), 89-96.

Kornmann, R. & Wagner, H.-J. (1990). Ermittlung der Lernbasis bei einfachen Kopfrechenaufgaben im Zahlenraum 0-20. *Zeitschrift für Heilpädagogik (Beiheft 17), 41*, 211-218.

Kornmann, R., Wagner, H.-J. & Ehret, D. (1991). Ist 12 + 5 gleich 5 + 12? Eine Fallstudie zur Diagnostik und Förderung bei einem speziellen Rechenproblem. *Zeitschrift für Heilpädagogik, 42*, 847-853.

Krauthausen, G. (1994). *Arithmetische Kompetenzen von Schulanfängern. Eine Computersimulation als Forschungsinstrument und als Baustein eines Softwarekonzeptes für die Grundschule*. Wiesbaden: Deutscher-Universitätsverlag.

Krauthausen, G. (1995a). Zahlenmauern im zweiten Schuljahr – ein substanzielles Übungs-

format. *Grundschulunterricht*, (10), 5-9.
Krauthausen, G. (1995b). Die „Kraft der Fünf“ und das denkende Rechnen. Zur Bedeutung tragfähiger Vorstellungsbilder im mathematischen Anfangsunterricht. In G.N. Müller & E.Ch. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern Rechnen* (S. 87-108). Frankfurt a.M.: Arbeitskreis Grundschule – der Grundschulverband – e.V.
Krauthausen, G. (1997a). „Freiräume“ zum Mathematiktreiben. Ziele, Voraussetzungen und Beispiele für geeignete Lernumgebungen in Schule und Lehrerbildung. *Die neue schulpraxis*, (5), 5-13.
Krauthausen, G. (1997b). CD-ROM *Blitzrechnen. Kopfrechnen im 1. und 2. Schuljahr*. Leipzig: Klett Grundschulverlag.
Krauthausen, G. (1998). *Lernen – lehren – Lehren lernen: zur mathematisch-didaktischen Lehrerbildung am Beispiel der Primarstufe*. Leipzig: Klett Grundschulverlag.
Kuhn, T.S. (1989). Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen. Frankfurt a. M.: Suhrkamp.
Kuratle, A. (1988). *Rechnen 1* (überarb. von H. Hofstetter). Lehrmittelverlag des Kantons Thurgau.

Lamnek, S. (1995). *Qualitative Sozialforschung. Methoden und Techniken* (Bd. 2, 3. korr. Aufl.). Weinheim: Beltz, Psychologie Verlags-Union.
Lobeck, A. (1987). *Rechentest 1. - 3. Klasse*. Basel: Beltz.
Lobeck, A. (1992). *Rechenschwäche. Geschichtlicher Rückblick, Theorie und Praxis.* Luzern: SZH.
Lorenz, J.H. (1983). Rechenschwäche – ihre Symptomatik anhand von Fallbeispielen. In H. Bauersfeld (Hrsg.), *Lernen und Lehren von Mathematik* (IDM-Reihe Bd.2, S. 107-171). Köln: Deubner&Co KG.
Lorenz, J.H. (1984). Teilleistungsschwächen. In J. H. Lorenz (Hrsg.), *Lernschwierigkeiten: Forschung und Praxis* (IDM-Reihe Bd. 10, S. 75-94). Köln: Aulis Verlag Deubner&Co KG.
Lorenz, J.H. (1988). Einzelfallarbeit bei Kindern mit Rechenschwierigkeiten. *Heilpädagogische Forschung, 14* (2), 83-88.
Lorenz, J.H. (1990). Zur Untersuchung sogenannter „pathologischer Fälle“ und ihr Zusammenhang zum Mathematiklernen der „Normalen“. In K. Haussmann, M. Reiss, A. Knapp & D.H. Rost (Hrsg.), *Mathematische Lehr-Lern-Denkprozesse (Ergebnisse der Pädagogischen Psychologie)* (Bd. 9, S. 82-92). Göttingen, Toronto, Zürich: Hogrefe.
Lorenz, J.H. (1991). Materialhandlungen und Aufmerksamkeitsfokussierung zum Aufbau interner arithmetischer Vorstellungsbilder. In J.H. Lorenz (Hrsg.), *Störungen beim Mathematiklernen: Schüler, Stoff und Unterricht* (IDM-Reihe Bd. 16, S. 53-73). Köln: Aulis Verlag Deubner&Co KG.
Lorenz, J.H. (1992). *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung.* Göttingen, Toronto, Zürich: Hogrefe.
Lorenz, J.H. (1993). Veranschaulichungsmittel im arithmetischen Anfangsunterricht. In J.H. Lorenz (Hrsg.), *Mathematik und Anschauung* (IDM-Reihe Bd.18, S. 122-146). Köln: Aulis Verlag Deubner&Co KG.
Lorenz, J.H. (1997). *Kinder entdecken die Mathematik.* Braunschweig: Westermann (Praxis Pädagogik).
Lorenz, J.H. & Radatz, H. (1993). *Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht.* Hannover: Schroedel.
Loska, R. (1995). *Lehren ohne Belehrung. Leonard Nelsons neosokratische Methode der Ge-*

sprächsführung. Bad Heilbronn: Klinkhardt.
Luhmann, N. (1997). Was ist Kommunikation? In F.B. Simon (Hrsg.), *Lebende Systeme. Wirklichkeitskonstruktionen in der systemischen Therapie* (S. 19-31). Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

Maier, H. (1998). Zur Interpretation textlicher Eigenproduktionen von Schülern. In A. Peter-Koop (Hrsg.), *Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule: Peter Sorger zum 60. Gebrtstag* (S. 141-154). Offenburg: Mildenberger.

Malik, F. (1992). *Strategie des Managements komplexer Systeme. Ein Beitrag zur Management-Kybernetik evolutionärer Systeme* (5. erweiterte und ergänzte Auflage). Bern, Stuttgart, Wien: Haupt.

Maturana, H.R. & Varela, F.J. (1987). *Der Baum der Erkenntnis: Die biologischen Wurzeln des menschlichen Erkennens*. München: Goldmann.

Mayring, Ph. (1996). *Einführung in die qualitative Sozialforschung. Eine Anleitung zu qualitativem Denken* (3. überarb. Aufl.). Weinheim: Beltz Psychologie Verlags-Union.

Mayring, Ph. (1997). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken* (6. durchges. Aufl.). Weinheim: Beltz.

Meiers, K. (1994). Grundschulpädagogische Positionen und ihre Relevanz in den zentralen Lernbereichen Spache und Mathematik. *SMP, 22,* 554-558.

Metzger, W. (1965). Die Entwicklung der Gestaltauffassung in der Zeit der Schulreife. In W. Asmus, H. Elschenbroich, G. Hausmann, A. Kern, W. Metzger & J. Rombach, *Die Idee der Ganzheit in Philosophie, Psychologie, Pädagogik und Didaktik* (S. 41-85). Freiburg i. Br.: Herder.

Metzger, W. (1975). *Gesetze des Sehens* (3. neu bearbeitete Aufl.). Frankfurt a. M.: Kramer.

Meyer, H. (1987a). *UnterrichtsMethoden. Theorieband* (Bd. 1, 6. Aufl.). Berlin: Cornelsen Verlag Skriptor GmbH&Co KG.

Meyer, H. (1987b). *UnterrichtsMethoden. Praxisband*. (Bd. 2, 8. Aufl. 1997). Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor GmbH&Co KG.

Moor, P. (1965). *Heilpädagogik. Ein pädagogisches Lehrbuch.* Bern, Stuttgart: Haupt.

Moog, W. (1993). Schwachstellen beim Addieren – Eine Erhebung bei lernbehinderten Sonderschülern. *Zeitschrift für Heilpädagogik, 44,* 534-554.

Moog, W. (1995). Flexibilisierung von Zahlbegriffen und Zählhandlungen - Ein Übungsprogramm. *Heilpädagogische Forschung, 21,* 113-121.

Moser Opitz, E. (2001). *Zählen, Zahlbegriff, Rechnen. Theoretische Grundlagen und eine empirische Untersuchung zum mathematischen Erstunterricht in Sonderklassen* (27. Beiheft zur VHN). Bern, Stuttgart, Wien: Haupt.

Müller, G.N., Steinbring, H. & Wittmann, E.Ch. (1997). *10 Jahre „mathe 2000“: Bilanz und Perspektiven. Festschrift zum 10jährigen Bestehen des Projekts „mathe 2000“ an der Universität Dortmund.* Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf: Klett Grundschulverlag.

Müller, G.N. & Wittmann, E.Ch. (Hrsg.) (1995). *Mit Kindern rechnen*. Frankfurt a. M.: Arbeitskreis Grundschule – Der Grundschulverband – e.V.

Nawratil, G. & Rabaioli-Fischer, B. (1983). *Sozialpsychologie leicht gemacht.* München: Kleist.

Oehl, W. (1935). Psychologische Untersuchungen über Zahlendenken und Rechnen bei Schulanfängern. *Zeitschrift für angewandte Psychologie und Charakterkunde, 49*, 305-351.

Oser, F. & Patry, J.L.: *Choreografien des unterrichtlichen Lernens. Basismodelle des Unter-*

richts. Berichte zur Erziehungswissenschaft, Nr. 89. Pädagogisches Institut der Universität Freiburg (Schweiz).

Oser, F., Hascher, T. & Spychiger, M. (1999). Lernen aus Fehlern. Zur Psychologie des „negativen“ Wissens. In W. Althof (Hrsg.), *Fehlerwelten. Vom Fehlermachen und Lernen aus Fehlern. Beiträge und Nachträge zu einem interdisziplinären Symposium aus Anlass des 60. Geburtstags von Fritz Oser* (S. 11-42). Opladen: Leske + Budrich.

Pawlow, I.P. (1972). *Die bedingten Reflexe. Eine Auswahl aus dem Gesamtwerk, besorgt von Gerhard Baader und Ursula Schnapper.* München: Kindler.

Pehkonen, E. (1994a). Über den Wandel der mathematischen Auffassungen von Lehrern. In K.P. Müller (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 28. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 28. Februar bis 4. März 1994 in Duisburg* (S. 279-282). Hildesheim: Franzbecker.

Pehkonen, E. (1994b). On Teachers‘ Beliefs and Changing Mathematics Teaching. *Journal für Mathematik-Didaktik, 15,* 177-209.

Peschek, W. (1986). Handeln, Operieren, Denken. In H.-G. Steiner (Hrsg.), *Grundfragen der Entwicklung mathematischer Fähigkeiten. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik* (Bd. 13, S. 15-27). Köln: Aulis Verlag Deubner&Co KG.

Peterson, P.L., Carpenter, T.P. & Fennema, E. (1989). Teachers‘ knowledge of students‘ knowledge in mathematics problem solving; Correlational and case analyses. *Journal of Educational Psychology, 81* (4), 558-569.

Peterson, P.L., Fennema, E., Carpenter, T.P., & Loef, M. (1989). Teachers‘ pedagogical content beliefs in mathematics. *Cognition and Instruction, 6*, 1-40.

Piaget, J. (1937/1974). La construction du réel chez l‘enfant. Neuchâtel: Delachaux&Niestlé. Dt.: Der Aufbau der Wirklichkeit beim Kinde (ges. Werke Bd. 2, 5. Aufl.). Stuttgart: Klett.

Piaget, J. (1950a/1972). Introduction à l‘épistémologie génétique. Tome I: La pensée mathématique. Paris: Presses Universitaires de France. Dt: *Die Entwicklung des Erkennens I: Das mathematische Denken.* Mit einer Einführung von Hans Aebli (ges. Werke Bd. 8). Stuttgart: Klett.

Piaget, J. (1950b/1973). Introduction à l‘épistémologie génétique. Tome II: La pensée physique. Paris: Presses Universitaires de France. Dt: *Die Entwicklung des Erkennens II: Das physikalische Denken* (ges. Werke Bd. 9). Stuttgart: Klett.

Piaget, J. (1950c/1973). Introduction à l‘épistémologie génétique. Tome III: La pensée biologique, la pensée psychologique et la pensée sociologique. Paris: Presses Universitaires de France. Dt: *Die Entwicklung des Erkennens III: Das biologische Denken; das psychologische Denken; das soziologische Denken.* Vorwort von Fritz Kubli (ges. Werke Bd. 10). Stuttgart: Klett.

Piechotta, G. (1995). Entdeckungsreise ins Land der Zahlenhäuser und Zahlenmauern. Bericht über Unterrichtserfahrungen mit einer 1. Klasse im Schuljahr 1993/1994. In G.N. Müller & E.Ch. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (S. 74-83). Frankfurt a.M.: Arbeitskreis Grundschule – Der Grundschulverband – e.V.

Radatz, H. (1982). Zählen - eine oft vernachlässigte Fähigkeit. *Grundschule, 14* (4), 159-162.

Radatz, H. (1989). Schülervorstellungen von Zahlen und elementaren Rechenoperationen. In *Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 23. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 28.2. bis 3.3.1989 in Berlin* (S. 306-309). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Radatz, H. (1991a). Hilfreiche und weniger hilfreiche Arbeitsmittel im mathematischen Anfangsunterricht. *Grundschule, 23* (9), 46-49.

Radatz, H. (1991b). Einige Beobachtungen bei rechenschwachen Grundschülern. In J.H. Lorenz (Hrsg.), *Störungen beim Mathematiklernen: Schüler, Stoff und Unterricht* (IDM-Reihe; Bd. 16, S. 74-89). Köln: Aulis Verlag Deubner&Co KG.

Radatz, H. (1993). Ikomanie. Oder: Wie sinnvoll sind die vielen Veranschaulichungen im Mathematikunterricht? *Grundschulmagazin,* (3), 4-6.

Radatz, H. & Schipper, W. (1983). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen.* Hannover: Schroedel Schulbuchverlag.

Reusser, K. (1983). Die kognitive Wende in der Psychologie: Eine Annäherung an phänomenologische und geisteswissenschaftliche Problemstellungen. In L. Montada, K. Reusser & G. Steiner (Hrsg.), *Kognition und Handeln* (S. 169-188). Stuttgart: Klett-Cotta.

Reusser, K. (1994a). *Pädagogische Kognitionspsychologie II: Denken, Verstehen, Wissen und Problemlösen*. Skript / Arbeitsunterlagen zur Vorlesung des Sommersemesters 1994. Zürich: Pädagogisches Institut der Universität Zürich.

Reusser, K. (1994b). Die Rolle von Lehrerinnen und Lehrern neu denken. Kognitionspädagogische Anmerkungen zur „neuen Lernkultur". *Beiträge zur Lehrerbildung, 13*, 19-37.

Reusser, K. (1999a). *Konstruktivismus – vom epistemologischen Leitbegriff zur „Neuen Lernkultur"*. Unveröffentlichte Redefassung des Plenarvortrags anlässlich der 7. Tagung Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie der Deutschen Gesellschaft für Psychologie an der Universität Fribourg/CH, September 1999.

Reusser, K. (1999b). Schülerfehler – die Rückseite des Spiegels. In W. Althof (Hrsg.), *Fehlerwelten. Vom Fehlermachen und Lernen aus Fehlern. Beiträge und Nachträge zu einem interdisziplinären Symposium aus Anlass des 60. Geburtstags von Fritz Oser (*S. 203-232). Opladen: Leske + Budrich.

Reusser, K. (1999c). *Pädagogische Kognitionspsychologie I: Die Lerntheorien und ihre pädagogische Bedeutung*. Skript / Materialien zur Vorlesung Wintersemester 1996/97. Zürich: Pädagogisches Institut der Universität Zürich.

Reusser, K. (1999d). „Und sie bewegt sich doch" – aber man behalte die Richtung im Auge! Zum Wandel der Schule und zum neu-alten pädagogischen Rollenverständnis von Lehrerinnen und Lehrern. *Die neue schulpraxis, 69* (7/8), 11-15.

Rogers, C.R. (1974). *Lernen in Freiheit. Zur Bildungsreform in Schule und Universität.* München: Kösel.

Röhr, M. (1995). *Kooperatives Lernen im Mathematikunterricht der Primarstufe. Entwicklung und Evaluation eines fachdidaktischen Konzepts zur Förderung der Kooperationsfähigkeit von Schülern.* Wiesbaden: Deutscher Universitäts-Verlag.

Röthlisberger, H. (1999). Heterogenität als Herausforderung: Standortbestimmungen am Schulanfang. In E. Hengartner (Hrsg.), *Mit Kindern lernen. Standorte und Denkwege im Mathematikunterricht* (S. 22-28). Zug: Klett&Balmer.

Rude, A. (1907). *Methodik des gesamten Volksschulunterrichts. Unter besonderer Berücksichtigung der neueren Bestrebungen. Methodik des naturkundlich-mathematischen und des technischen Unterrichts* (Bd. 2). Osterwieck: Zickfeldt.

Ruf, U. & Gallin, P. (1995). *Ich mache das so! Wie machst du es? Das machen wir ab. Sprache und Mathematik 1.-3. Schuljahr.* ILZ (Lehrmittelverlag des Kantons Zürich).

Ruf, U. & Gallin, P. (1996). Sich einlassen und eine Sprache finden. Merkmale einer interaktiven und fächerübergreifenden Didaktik. In R. Voss (Hrsg.), *Die Schule neu erfinden:*

systemisch-konstruktivistische Annäherungen an Schule und Pädagogik (S. 154-178). Berlin: Luchterhand.

Ruf, U. & Gallin, P. (1999a). *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Austausch unter Ungleichen. Grundzüge einer interaktiven und fächerübergreifenden Didaktik* (Bd. 1). Seelze-Velber: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung.

Ruf, U. & Gallin, P. (1999b). *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Spuren legen – Spuren lesen. Unterricht mit Kernideen und Reisetagebüchern* (Bd. 2). Seelze-Velber: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung.

Sander, E. (1981). *Lernstörungen. Ursachen, Prophylaxe, Einzelfallhilfe*. Stuttgart, Berlin, Köln, Mainz: Kohlhammer.

Sander, E. (1984). Probleme der Aufgabenanalyse. In J.H. Lorenz (Hrsg.), *Lernschwierigkeiten: Forschung und Praxis* (IDM-Reihe Bd. 10, S. 1-16). Köln: Deubner&Co.

Sander, E. (1991). Vergleich zweier Unterrichtsmodelle bei rechenschwachen Schülern. Ergebnisse einer Untersuchungsserie – Überlegungen zu weiterführenden Studien. In J. H. Lorenz (Hrsg.), *Störungen beim Mathematiklernen: Schüler, Stoff und Unterricht* (IDM-Reihe Bd. 16, S. 106-122). Köln: Aulis Verlag Deubner&Co KG.

Scheller, I. (1981). *Erfahrungsbezogener Unterricht*. Königstein/Ts.: Scriptor.

Scherer, P. (1993). Fördern durch fordern – Aktiv-entdeckendes Lernen und produktives Üben im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte. In K.P. Müller (Red.), *Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 27. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 22. bis 26.3.1993 in Freiburg/Schweiz* (S. 315-318). Hildesheim: Franzbecker.

Scherer, P. (1995a). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte. Theoretische Grundlegung und evaluierte unterrichtspraktische Erprobung.* Heidelberg: Edition Schindele.

Scherer, P. (1995b). Produktives Üben im Unterricht mit lernschwachen Schülern. *Die neue schulpraxis, 65* (9), 5-11.

Scherer, P. (1996). Evaluation entdeckenden Lernens im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte: Quantitative oder qualitative Forschungsmethoden? *Heilpädagogische Forschung, 12* (2), 76-87.

Scherer, P. (1999a). *Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen. Fördern durch Fordern.* Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf: Klett.

Scherer, P. (1999b). Aktiv-entdeckendes Lernen – auch für schulschwache Kinder! In E. Hengartner (Hrsg.), *Mit Kindern lernen. Standorte und Denkwege im Mathematikunterricht* (S. 152-160). Zug: Klett&Balmer.

Scherer, P. & Selter, Ch. (1996). Zahlenketten – ein Unterrichtsbeispiel für natürliche Differenzierung. In *Mathematische Unterrichtspraxis,* (2), 21-28.

Schildknecht, U. (2001). Bündner müssen/dürfen länger lernen. *Bildung Schweiz, 146*(6), 9-11.

Schipper, W. (1982). Stoffauswahl und Stoffanordnung im mathematischen Anfangsunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik, 3* (1), 91-120.

Schipper, W. (1998). „Schulanfänger verfügen über hohe mathematische Kompetenzen." Eine Auseinandersetzung mit einem Mythos. In A. Peter-Koop (Hrsg.), *Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule: Peter Sorger zum 60. Gebrtstag* (S. 119-140). Offenburg: Mildenberger.

Schipper, W. & Hülshoff, A. (1984). Wie anschaulich sind Veranschaulichungshilfen? Zur

Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 10. *Grundschule, 16* (4), 54-56.

Schlee, J., Scheele, B. & Groeben (Hrsg.) (1988). *Das Forschungsprogramm Subjektive Theorien. Eine Einführung in die Psychologie des reflexiven Subjekts*. Tübingen: Francke.

Schlee, J. & Wahl, D. (Hrsg.) (1987). *Veränderung Subjektiver Theorien von Lehrern*. Oldenburg: Universität, Zentrum für pädagogische Berufspraxis. Schmidt, R. (1982). Ziffernkenntnis und Ziffernverständnis der Schulanfänger. *Grundschule, 14* (4), 166-167.

Schmidt, S. & Weiser, W. (1982). Zählen und Zahlverständnis von Schulanfängern. *Journal für Mathematik-Didaktik*, (3/4), 227-236.

Schwarzer, R. & Steinhagen, K. (1975). Adaptiver Unterricht als Beitrag zu einer pädagogischen Ökologie. In R. Schwarzer & K. Steinhagen, *Adaptiver Unterricht. Zur Wechselwirkung von Schülermerkmalen und Unterrichtsmethoden* (S. 11-76). München: Kösel.

Schwätzer, U. & Selter, Ch. (1998). Summen von Reihenfolgezahlen – Vorgehensweisen von Viertklässlern bei einer arithmetisch substanziellen Aufgabenstellung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 19*, 123-148.

Seeger, F. (1993). Veranschaulichungen und Veranschaulichungsmittel aus kulturhistorischer Perspektive: Einige Randbemerkungen. In J.H. Lorenz (Hrsg.), *Mathematik und Anschauung* (IDM-Reihe Bd. 18, S. 3-13). Köln: Aulis Verlag Deubner&Co KG.

Seiler, Th. B. (1994). Ist Jean Piagets strukturgenetische Erklärung des Denkens eine konstruktivistische Theorie? In G. Rusch & S.J. Schmidt (Hrsg.), *Piaget und der radikale Konstruktivismus* (S. 43-102). Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

Selter, Ch. (1993). Die Kluft zwischen den arithmetischen Kompetenzen von Erstklässlern und dem Pessimismus der Experten. In K.P. Müller (Red.), *Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 27. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 22. bis 26.3.1993 in Freiburg/Schweiz (S.* 350-352). Hildesheim: Franzbecker.

Selter, Ch. (1994a). *Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe. Grundsätzliche Überlegungen und Realisierungen in einem Unterrichtsversuch zum multiplikativen Rechnen im zweiten Schuljahr.* Wiesbaden: Deutscher Universitäts-Verlag.

Selter, Ch. (1994b). Jede Aufgabe hat eine Lösung. Vom rationalen Kern irrationalen Vorgehens. *Grundschule, 26* (3), 20-22.

Selter, Ch. (1995a). Eigene Wege zum Einmaleins. *Grundschule, 27* (5), 10-13.

Selter, Ch. (1995b). Zur Fiktivität der ‚Stunde Null' im arithmetischen Anfangsunterricht. *Mathematische Unterrichtspraxis,* (2), 11-19.

Selter, Ch. (1995c). Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht. Grundsätzliche Bemerkungen und Unterrichtsbeispiele zum Einmaleins. In G.N. Müller & E. Ch. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen.* Frankfurt a.M.: Arbeitskreis Grundschule – Der Grundschulverband – e.V.

Selter, Ch. (1997). Genetischer Mathematikunterricht: Offenheit mit Konzept. *Mathematik lehren,* (83), 4-8.

Selter, Ch. & Spiegel, H. (1997). *Wie Kinder Rechnen.* Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf: Klett Grundschulverlag.

Selter, Ch. & Sundermann, B. (1999). Vielfalt und Gemeinsamkeit – zur sozialen Dimension von Eigenproduktionen. In E. Hengartner (Hrsg.), *Mit Kindern lernen. Standorte und Denkwege im Mathematikunterricht* (S. 60-65). Zug: Klett&Balmer.

Seligmann, M.E.P. (1979). *Erlernte Hilflosigkeit.* München: Urban&Schwarzenberg.

Senftleben, H.-G. (1996). Erkundungen zur Kopfgeometrie (unter besonderer Beachtung der Einbeziehung kopfgeometrischer Aufgaben in den Mathematikunterricht der Grundschu-

le. *Journal für Mathematik-Didaktik, 17,* 49-72.
Shaw, K.L., Davis, N.T. & McCarty, J. (1991). *A cognitive framework for teacher change.* In R.G. Underhill (ed.), Proceeding of PME-NA 13 (Vol. 2, pp. 161-167). Blacksburg (VA): Virginia Tech.
Shulman, L.S. (1986) Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15,* 4-14.
Shulman, L.S. (1986/1991). Von einer Sache etwas verstehen: Wissensentwicklung bei Lehrern. (Deutsche, leicht gekürzte Übersetzung) In E. Terhart (Hrsg.), *Unterrichten als Beruf. Neuere amerikanische und englische Arbeiten zur Berufskultur und Berufsbiographie von Lehrern und Lehrerinnen* (S. 145-160). Köln: Böhlnau.
Shulman, L.S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57* (1), 1-21.
Simons, D. (1981). Vergleichende Betrachtung über die Genese des Zahlbegriffs. *Psychologische Beiträge, 23,* 595-617.
Skinner, B.F. (1974/1978). About Behaviorism. Dt: *Was ist Behaviorismus?* (Übers. v. Klaus Laermann). Hamburg: Rowohlt.
Sprockhoff, W. (1982). Wieder Rechnen statt Mathematik in der Grundschule? *Grundschule, 14* (4), 143-144.
Staub, F. & Stern, E. (1998). *Why teachers' pedagogical content beliefs matter for students' achivment growth: The case of elementary mathematics.* Poster presented at the XVth Biennial Meeting of the International Society for the Study of Behavioral Development (ISSBD), Berne, Switzerland, July 1st-4, 1998.
Stebler, R. (1999). *Eigenständiges Problemlösen. Zum Umgang mit Schwierigkeiten beim individuellen und paarweisen Lösen mathematischer Problemgeschichten – Theoretische Analyse und empirische Erkundigungen.* Bern, Berlin, Bruxelles, Frankfurt a.M., New York, Wien: Lang.
Stein, M. (1996). Elementare Bausteine der Problemlösefähigkeit: Problemlösetechniken. *Journal für Mathematik-Didaktik, 17,* 123-146.
Stein, M. (1999). Elementare Bausteine der Problemlösefähigkeit: logisches Denken und Argumentieren. *Journal für Mathematik-Didaktik, 20,* 3-27.
Steinbring, H. (1995). Zahlen sind nicht nur zum Rechnen da. In G.N. Müller & E.Ch. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (S. 225-239). Frankfurt a.M.: Arbeitskreis Grundschule – Der Grundschulverband – e.V.
Steinbring, H. (1997). Voraussetzungen und Perspektiven der Erforschung mathematischer Kommunikationsprozesse. In G.N. Müller, H. Steinbring & E. Ch. Wittmann. *10 Jahre „mathe 2000". Bilanz und Perspektiven. Festschrift zum 10jährigen Bestehen des Projektes „mathe 2000" an der Universität Dortmund* (S. 66-75). Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf: Klett Grundschulverlag.
Steiner, G. (1973). *Mathematik als Denkerziehung.* Stuttgart: Klett.
Steiner, G. (1996b). *Lernen. 20 Szenarien aus dem Alltag.* (2. vollst. überarb. Aufl.) Bern: Huber.
Stendler-Lavatelli, C. (1970/1976). Piaget's Theory Applied to an Early Childhood Curriculum. Dt.: *Früherziehung nach Piaget. Wie Kinder Wissen erwerben – ein Programm zur Förderung der kindlichen Denkoperationen.* München, Basel: Reinhardt.
Stern, E. (1997). Erwerb mathematischer Kompetenzen: Ergebnisse aus dem SCHOLAS-TIK-Projekt. In F.E. Weinert & A. Helmke (Hrsg.), *Entwicklung im Grundschulalter* (S. 157-

170). Weinheim: Beltz.
Stern, E. (1998). *Die Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Kindesalter*. Lengerich, Berlin, Düsseldorf, Leipzig, Riga, Scottsdale (USA), Wien, Zagreb: Pabst Science Publishers.

Terhart, E. (1991). *Unterrichten als Beruf. Neuere amerikanische und englische Arbeiten zur Berufskultur und Berufsbiografie von Lehrern und Leherinnen*. Köln: Böhlau.
Thompson, A.G. (1984). The relationship of teachers‘ conceptions of mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics, 15,* 105-127.
Thompson, A.G. (1992). Teacher‘s Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127-146). New York: Macmillan.
Treffers, A. (1983). Fortschreitende Schematisierung. Ein natürlicher Weg zur schriftlichen Multiplikation und Division im 3. und 4. Schuljahr. *Mathematik lehren,* (1), 16-20.
Treffers, A. (1987). Integrated Column Arithmetic According to Progressive Schematisation. *Educational Studies in Mathematics, 18,* 125-145.
Trickett, L. & Sulke, F. (1993). Mathematikunterricht mit schulschwachen Kindern: Fördern heisst Fordern. *Grundschulzeitschrift,* (68), 35-38.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1995). Leistungsmessung im aktiv-entdeckenden Mathematikunterricht. In H. Brügelmann, H. Ballhorn & I. Füssenich (Hrsg.), *Am Rande der Schrift. Zwischen Sprachenvielfalt und Analphabetismus* (S. 87-107). Lengwil am Bodensee: Libelle.
Voigt, J. (1993). Unterschiedliche Deutungen bildlicher Darstellungen zwischen Lehrerin und Schülern. In J.H. Lorenz (Hrsg.), *Mathematik und Anschauung* (IDM-Reihe Bd. 18, S. 147-165). Köln: Aulis Verlag Deubner&Co KG.
Voigt, J. (1994). Mathematische Kompetenz und Interaktion in der Grundschule. In K.P. Müller (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 28. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 28. Februar bis 4. März 1994 in Duisburg* (S. 398-401). Hildesheim: Franzbecker.
Von Foerster, H. (1998). Entdecken oder Erfinden. Wie lässt sich Verstehen verstehen? In H. Gumin & H. Meier (Hrsg.), *Einführung in den Konstruktivismus* (4. Aufl., S. 41-88). München: Piper.
Von Foerster, H. (1999). Das Konstruieren einer Wirklichkeit. In P. Watzlawick (Hrsg.), *Die erfundene Wirklichkeit. Wie wissen wir, was wir zu wissen glauben? Beiträge zum Konstruktivismus (*11. Aufl., S. 39-60). München: Piper.
Von Glasersfeld, E. (1994a). Siegener Gespräche über Radikalen Konstruktivismus. In S. J. Schmidt (Hrsg.), *Der Diskurs des radikalen Konstruktivismus* (S. 401-440). Frankfurt a. M.: Suhrkamp.
Von Glasersfeld, E. (1994b). Piagets konstruktivistisches Modell. In G. Rusch & S.J. Schmidt (Hrsg.), *Piaget und der radikale Konstruktivismus* (S. 16-42). Frankfurt a.M.: Suhrkamp.
Von Glasersfeld, E. (1996). *Radikaler Konstruktivismus: Ideen, Ergebnisse, Probleme*. Frankfurt a. M.: Suhrkamp.
Von Glasersfeld, E. (1998a). Konstruktion der Wirklichkeit und des Begriffs der Objektivität. In H. Gumin & H. Meier, *Einführung in den Konstruktivismus* (4. Aufl., S. 9-40). München: Piper.
Von Glasersfeld, E. (1998b). Konstruktivismus statt Erkenntnistheorie. In W. Dörfler und J.

Mitterer (Hrsg.), Ernst von Glasersfeld - *Konstruktivismus statt Erkenntnistheorie*. Klagenfurt: Drava.

Vygotsky, L.S. (1974). *Denken und Sprechen*. Frankfurt a.M.: Fischer.

Wagenschein, M. (1992). *Verstehen lehren. Genetisch – Sokratisch – Exemplarisch* (10. Aufl.). Weinheim, Basel: Beltz.

Wagner, H.-J. & Wacker, C. (1991). Fehlertypen in der Addition. Vorschläge zur didaktischen Aufarbeitung. *Grundschule, 9,* 62-63.

Wahl, D. (1991). *Handeln unter Druck. Der weite Weg vom Wissen zum Handeln bei Lehrern, Hochschullehrern und Erwachsenenbildnern.* Weinheim: Deutscher Universitäts-Verlag.

Walter, J., Suhr, K. & Werner, B. (2001). Experimentell beobachtete Effekte zweier Formen von Mathematikunterricht in der Förderschule. In *Zeitschrift für Heilpädagogik, 52* (4), 143-151.

Watzlawick, P., Beavin, J.H. & Jackson D. (1985). *Menschliche Kommunikation. Formen, Störungen, Paradoxien* (7. unveränderte Auflage). Bern, Stuttgart, Wien: Huber.

Weidenmann, B. (1989). Anschaulichkeit. Die zunehmende Verhätschelung des Lernens? *Grundschule, 21* (9), 10-12.

Weinert, F.E. (1996). Lerntheorien und Instruktionsmodelle. In F.E. Weinert (Hrsg.), *Psychologie des Lernens und der Instruktion*. *Enzyklopädie der Psychologie* (Themenbereich D, Serie I, Bd. 2, S. 1-48). Göttingen: Hogrefe.

Wember, F.B. (1986). *Piagets Bedeutung für die Lernbehindertenpädagogik. Untersuchungen zur kognitiven Entwicklung und zum schulischen Lernen bei Sonderschülern.* Heidelberg: Schindele.

Wember, F.B. (1989). Die sonderpädagogische Förderung elementarer mathematischer Begriffsbildung auf entwicklungspsychologischer Grundlage. Das Beispiel des Zahlbegriffs. *Zeitschrift für Heilpädagogik, 40,* 433-443.

Wertsch, J.V. (1991). *Voices of the mind; a soziocultural approach to mediated action.* London: Harvester Wheatsheaf.

Wetzel, F.G. (1980). *Kognitive Psychologie.* Weinheim: Beltz.

Winter, H. (1984a). Didaktische und methodische Prinzipien. In H.W. Heymann (Hrsg.), *Mathematikunterricht zwischen Tradition und neuen Impulsen* (IDM-Reihe Bd.7, S. 116-147). Köln: Deubner&Co.

Winter, H. (1984b). Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Grundschule. *Grundschule, 16* (4), 26-29.

Winter, H. (1987). *Mathematik entdecken. Neue Ansätze für den Mathematikunterricht in der Grundschule.* Frankfurt a.M.: Scriptor.

Winter, H. (1989). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik.* Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.

Wittmann, E.Ch. (1985). Objekte – Operationen – Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. *Mathematik lehren,* (11), 7-11.

Wittmann, E.Ch. (1988). Das Prinzip des aktiven Lernens und das Prinzip der kleinen und kleinsten Schritte in systemischer Sicht. In *Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 22. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 1.3. bis 4.3.1988 in Würzburg* (S. 339-342). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Wittmann, E.Ch. (1989a). Ein ganzheitlicher Zugang zum kleinen Einspluseins. In *Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 23. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 28.2. bis 3.3.1989 in Berlin* (S. 406-409). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Wittmann, E.Ch. (1989b). Mathematiklernen zwischen Skylla und Charybdis. *Beiträge zur Lehrerbildung, 2,* 227-239.
Wittmann, E.Ch. (1992a). Mathematikdidaktik als „design science“. *Journal für Mathematik-Didaktik, 13,* 55-70.
Wittmann, E. Ch. (1992b). Üben im Lernprozess. In E. Ch. Wittmann & G.N. Müller, *Handbuch produktiver Rechenübungen. Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen* (Bd. 2, S. 175-182). Stuttgart, Düsseldorf, Berlin, Leipzig: Klett Schulbuchverlag.
Wittmann, E.Ch. (1993a). Wider die Flut der „bunten Hunde“ und der „grauen Päckchen“: Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens. In E. Ch. Wittmann & G.N. Müller (Hrsg.), *Handbuch produktiver Rechenübungen. Vom Einspluseins zum Einmaleins* (Bd. 1., 2. überarb. Aufl., S. 157-171) Stuttgart, Düsseldorf, Berlin, Leipzig: Klett Schulbuchverlag.
Wittmann, E.Ch. (1993b). „Weniger ist mehr“: Anschauungsmittel im Mathematikunterricht der Grundschule. In K.P. Müller (Red.), *Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 27. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 22. bis 26.3.1993 in Freiburg/Schweiz* (S. 394-397). Hildesheim: Franzbecker.
Wittmann, E. Ch. (1995a). Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Rechenunterricht. – Vom Kind und vom Fach aus. In G.N. Müller & E.Ch. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (S. 10-41). Frankfurt a.M.: Arbeitskreis Grundschule – Der Grundschulverband – e.V.
Wittmann, E.Ch. (1995b). *Grundfragen des Mathematikunterrichts* (6. neu bearbeitete Auflage). Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.
Wittmann, E.Ch. (1995c). Unterrichtsdesign und empirische Forschung. In K.P. Müller (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 29. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 6. bis 10. März 1995 in Kassel* (S. 528-531). Hildesheim: Franzbecker.
Wittmann, E.Ch. (1997). Das Projekt „mathe 2000“ – Modell für fachdidaktische Entwicklungsforschung. In G.N. Müller, H. Steinbring & E.Ch. Wittmann, *10 Jahre „mathe 2000“. Bilanz und Perspektiven. Festschrift zum 10jährigen Bestehen des Projektes „mathe 2000“ an der Universität Dortmund* (S. 41-65). Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf: Klett Grundschulverlag.
Wittmann, E.Ch. (1998a). Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik. *Beiträge zur Lehrerbildung, 16,* 329-342.
Wittmann, E.Ch. (1998b). Standard number repräsentations in the teaching of arithmetik. *Journal für Mathematik-Didaktik, 19,* 149-178.
Wittmann, E.Ch. (1999). Vorwort. In E. Hengartner (Hrsg.), *Mit Kindern lernen. Standorte und Denkwege im Mathematikunterricht* (S. 7-8). Zug: Klett&Balmer.
Wittmann, E.Ch. & Müller, G.N. (1992). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen* (Bd. 2). Stuttgart, Düsseldorf, Berlin, Leipzig: Klett Schulbuchverlag.
Wittmann, E.Ch. & Müller, G.N. (1993). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Vom Einspluseins zum Einmaleins* (Bd. 1, 2. überarb. Aufl.). Stuttgart, Düsseldorf, Berlin, Leipzig: Klett Schulbuchverlag.

Zehnpfennig, H & Zehnpfennig, H. (1995). Entdeckungsreisen in das Land der Textaufgaben. In G.N. Müller & E.Ch. Wittmann (Hrsg.), *Wie Kinder rechnen* (S. 109-121). Frankfurt a.M.: Arbeitskreis Grundschule – Der Grundschulverband – e.V.

Anhang A

Testinstrument *Einstellungen zum Mathematik-Unterricht*

Die folgende Instruktion ist eine leicht modifizierte und ergänzte Version von Staub und Stern (1998).

Auf den nächsten Seiten findest du eine Anzahl verschiedener Aussagen. Gib bitte auf den dazugehörigen Antwortbögen an, in welchem Ausmass du den einzelnen Aussagen zustimmst. Entscheide dich bei jeder Aussage, ob diese deine persönliche Meinung trifft oder nicht. Falls du einer Aussage sehr deutlich zustimmst, kreuzt du bei der entsprechenden Nummer auf dem Antwortbogen den Buchstaben A an. Stimmst du zwar zu, aber doch nicht sehr deutlich, oder bist du der Meinung, diese Aussage trifft „so in etwa" zu, kreuzt du das B an. Falls du die in der Aussage dargestellte Meinung überhaupt nicht teilst, kreuzt du E an. Kreuze D an, wenn du diese Meinung zwar nicht teilst, sie aber auch nicht sehr deutlich ablehnst. Bist du dir bezüglich einer Aussage nicht sicher, wie diese zu verstehen ist, oder kannst du dazu keine Stellung nehmen, kreuzt du C an.

A = sehr einverstanden
B = eher einverstanden
C = unentschieden
D = eher nicht einverstanden
E = überhaupt nicht einverstanden

Verliere nicht zu viel Zeit mit einer Aussage, aber denke bitte daran, *jede Aussage zu bearbeiten.* Arbeite zügig, aber sorgfältig.

Es gibt keine „richtigen" oder „falschen" Antworten. Die richtigen Antworten sind vielmehr solche, die deine persönlichen Meinungen zutreffend widerspiegeln. Wichtig ist, dass du jede Aussage so beantwortest, wie es deiner persönlichen Einstellung entspricht.

Zwei oft verwendete Begriffe sollen kurz erläutert werden:

Rechenprozeduren: Mit diesem Begriff sind konkrete Vorgehensweisen oder Strategien für die Ausführung von Berechnungen gemeint.

Nummerisches Faktenwissen: Das sind aus dem Gedächtnis abrufbare Ergebnisse spezifischer mathematischer Operationen (z.B.: „8 + 8 = 16"), zu deren Bestimmung keine Rechenprozeduren mehr notwendig sind (automatisierte Operationen).

Bemerkungen zur Instruktion [KH]
Einzelne Fragen tauchen wiederholt auf, beantworte sie trotzdem. Versuche schwierig zu beantwortende Fragen *etwas zu abstrahieren* und überlege, was deine grundsätzliche Meinung zu dieser Aussage ist. „Textaufgaben" können auch mit „Bildaufgaben" übersetzt werden, wenn dir die Beantwortung dadurch leichter fällt. Mit Grundschülern sind Primarschüler und Primarschülerinnen der 1. bis 3. Klasse gemeint.

Dieser Fragebogen wird ausschliesslich zu wissenschaftlichen Zwecken verwendet.

1. Schüler sollten bereits Textaufgaben erhalten, bevor sie Rechenprozeduren gut beherrschen.
2. Lehrerinnen und Lehrer sollten Schüler ermutigen, ihre eigenen Lösungswege für Mathematikaufgaben zu suchen, selbst wenn diese ineffizient sind.
3. Schüler sollten Rechenprozeduren verstehen, bevor man viel Zeit auf ihre Einübung verwendet.
4. Im Unterricht sollten Schüler bereits einfache Textaufgaben erhalten, bevor viel Zeit auf das Üben von Rechenprozeduren verwendet wird.
5. Lehrerinnen und Lehrer sollten für das Lösen von Textaufgaben detaillierte Vorgehensweisen vermitteln.
6. Schüler sollten die Bedeutung einer Rechenoperation (Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division) verstehen, bevor sie sich numerisches Faktenwissen einprägen.
7. Lehrerinnen und Lehrer sollten zeigen, wie einfache Textaufgaben zu lösen sind, bevor Schüler selbständig Aufgaben lösen.
8. Die Beachtung von Schlüsselwörtern (z.B. „mehr“) ist für Schüler eine große Hilfe, um Textaufgaben zu lösen.
9. Mathematik sollte in der Schule so gelehrt werden, daß die Schüler Zusammenhänge selbst entdecken können.
10. Auch Schüler, die noch kein solides numerisches Faktenwissen erworben haben, können erfolgreich Probleme lösen.
11. Um Mathematik zu lernen, ist es wichtig, daß der Schüler gut zuhören kann.
12. Die meisten Grundschüler können selbst Lösungen für einfache Textaufgaben finden.
13. Schüler sollten bereits viele einfache Textaufgaben gelöst haben, bevor erwartet wird, daß sie sich numerisches Faktenwissen einprägen.
14. Effektive Lehrerinnen und Lehrer führen die richtige Art und Weise vor, in der eine Textaufgabe zu lösen ist.
15. Man sollte von Schülern verlangen, Aufgaben so zu lösen, wie es im Unterricht gelehrt wurde.
16. Den meisten Grundschülern muß man zeigen, wie einfache Textaufgaben zu lösen sind.
17. Die von den Schülern schriftlich gelösten mathematischen Aufgaben lassen den erreichten Grad des Verstehens erkennen.
18. Am besten lehrt man Schülern das Lösen von Textaufgaben, indem man nicht verschiedene Arten von Textaufgaben zugleich behandelt, sondern sich jeweils auf eine Art beschränkt.
19. Es ist besser, die Schüler mit den unterschiedlichsten Textaufgaben zu konfrontieren.
20. Schüler lernen Mathematik ab besten, indem sie selbst Wege zur Lösung von einfachen Textaufgaben entdecken.
21. Schüler können gewöhnlich selbst herausfinden, wie einfache Textaufgaben zu lösen sind.
22. Der Erwerb von numerischem Faktenwissen sollte dem Verstehen der entsprechenden Rechenoperation (Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division) vorausgehen.
23. Schüler verstehen eine Rechenoperation (Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division) nicht, bevor sie über einen wesentlichen Teil des entsprechenden numerischen Faktenwissens verfügen.
24. Die meisten Schüler können Mathematik nicht selber entdecken und benötigen explizite Unterweisung.
25. Bevor Schüler die Ausführung von Rechenprozeduren beherrschen, sollten sie diese auch verstehen.

26. Schüler lernen Mathematik am besten, indem sie den Erklärungen der Lehrerin oder des Lehrers folgen.
27. Es ist wichtig für ein Kind, selbst zu entdecken, wie einfache Textaufgaben zu lösen sind.
28. Man sollte Schülern erlauben, sich eigene Wege zur Lösung von einfachen Textaufgaben auszudenken, bevor die Lehrperson vorführt, wie diese zu lösen sind.
29. Rechenprozeduren sollten eingeübt werden, bevor man von den Schülern erwarten kann, daß sie diese Prozeduren auch verstehen.
30. In der Mathematik werden die Lehrziele am besten erreicht, wenn Schüler ihre eigenen Methoden finden, um Aufgaben zu lösen.
31. Es hilft Schülern Mathematik zu begreifen, wenn man sie ihre eigenen Lösungsideen diskutieren läßt.
32. Lehrerinnen und Lehrer sollten Schülern, die Schwierigkeiten mit dem Lösen einer Textaufgabe haben, erlauben, mit eigenen Lösungsversuchen fortzufahren.
33. Schüler können auch ohne Anleitung zu vielen Mathematikaufgaben Lösungen finden.
34. Lehrerinnen und Lehrer sollten Schülern, die Schwierigkeiten mit dem Lösen einer Textaufgabe haben, zeigen, wie die Aufgabe zu lösen ist.
35. Das häufige Üben von Rechenaufgaben ist für den Erwerb von numerischem Faktenwissen unerläßlich.
36. Die meisten Grundschüler können für viele Mathematikaufgaben auch ohne die Hilfe von Erwachsenen Lösungswege finden.
37. Lehrpersonen sollten es zulassen, daß Schüler ihre eigenen Wege zur Lösung von einfachen Textaufgaben entdecken.
38. Für Schüler ist es besser, verschiedene Arten von Textaufgaben nicht gemischt, sondern nacheinander zu behandeln.
39. Schüler sollten erst dann einfache Textaufgaben erhalten, wenn sie einen Teil des numerischen Faktenwissens gut beherrschen.
40. Die Erklärungen der Schüler zu ihren Aufgabenlösungen vermitteln einen guten Einblick in deren Mathematikwissen.
41. Anhand geeigneter Materialien können Schüler selbst Rechenprozeduren entwickeln.
42. Bevor Zeit auf das Lösen von Textaufgaben verwendet wird, sollte mit den Schülern Rechenprozeduren eingeübt werden.
43. Lehrerinnen und Lehrer sollten Schüler dazu ermutigen, selbst Lösungen einfacher Textaufgaben auszudenken.
44. Schüler werden dann zu guten Problemlösern, wenn sie den Anleitungen ihrer Lehrerinnen oder Lehrer gut folgen können.
45. Um erfolgreich in Mathematik zu sein, muß das Kind ein guter Zuhörer sein.
46. Schüler benötigen ausführliche Anleitung dazu, wie Textaufgaben zu lösen sind.
47. Von Schülern kann nicht erwartet werden, die Funktionsweise von Rechenprozeduren zu verstehen, bevor sie deren Ausführung gut beherrschen.
48. Am besten lernen Schüler Mathematik aus Darstellungen und Erklärungen ihrer Lehrerin oder ihres Lehrers.

***Name:*____**

A = sehr einverstanden
B = eher einverstanden
C = unentschieden
D = eher nicht einverstanden
E = überhaupt nicht einverstanden

Aussage Nr.	*Grad der Zustimmung:*				
1.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
2.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
3.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
4.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
5.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
6.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
7.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
8.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
9.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
10.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
11.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
12.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
13.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
14.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
15.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
16.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
17.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
18.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
19.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
20.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
21.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
22.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
23.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
24.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
25.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
26.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
27.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
etc.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
46.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
47.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
48.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*

Anhang B

Codier-Plan zur Auswertung der Videolektionen

1. Makrocodes

Makrocode bezeichnet, dass sich die Kategorien *EAM, FFE, FSP, FDE, FOG, FVN, FTMO, ORG, LBE, TEA*, und *TLEP* auf ganze Unterrichtssequenzen beziehen und die ganze Lektion mit einem „Code-Teppich" belegen. Sie beinhalten auch Sprechpausen.

Die Mikrocodes (unter 2.) beziehen sich nur auf die absoluten Sprechzeiten. In den Code-Kürzeln steht „*T*" für Teacher (Lehrperson).

EAM: Einstieg aussermathematisch

Häufig erfolgen Unterrichts- oder Lektionseinstiege ausserhalb der Thematik der Lektion, z.B. mit einem Lied singen oder einem Bewegungsspiel. Eine solche Phase wird als *EAM* codiert. Bezeichnungen, die mit einem „*F*" beginnen, sind frontalen Unterrichtssequenzen zugeordnet.

FFE: Frontalunterricht, fragend-entwickelnd

Die Lehrperson leitet die ganze Klasse, sie bestimmt das Thema, Lerntempo und den Verlauf des gemeinsamen Lernweges. Kriterium für die Vergabe des Codes: Die Lehrerin ist im Zentrum und provoziert Schüler-Antworten. Der „Out-Point" von *FFE*-Sequenzen wird vor der letzten Instruktion an die Klasse gesetzt.

FSP: Frontalunterricht, Spielerische Unterrichtssequenz

Die Kategorisierung entspricht dem Code *FFE*, thematisch steht aber ein Spiel oder eine spielerische Übung im Vordergrund. Die Lehrperson lenkt und überwacht verbal oder nonverbal ein Spiel, Schüler-Antworten und -Aktivitäten.

FVN: Frontales Vormachen-Nachmachen

Die Lehrperson zeigt etwas vor oder diktiert ein verbindliches Vorgehen, das die Schüler imitieren sollen.

FDE: Frontale Demonstration

Während der frontalen Unterrichtsphase findet eine Demonstration, z.B. ein Spiel mit einer Gruppe oder einem einzelnen Schüler statt. Die übrigen Schüler schauen und hören zu.

FTMO: Frontaler Monolog der Lehrperson

Wenn die Lehrerin länger als 5 Minuten referiert, steht *FTMO* als Bezeichnung im „Code-Teppich".

FOG: Frontal die Organisation erklären

Die Lehrperson gibt frontal unterrichtsorganisatorische Erklärungen ab. Die *FOG*-Phase ist durch hohe Sprechanteile der Lehrerin definiert, die mit den Codes *IN6, IN7, LB1, LB2* und *LB3* gekennzeichnet sind. Mit Organisation sind aussermathematische Inhalte gemeint, die sich auch auf die Aufgabenkulisse beziehen können.

LBE: Individualisierte Lernbegleitungsphase

Es findet ein dezentrierter Unterricht statt, während dem die Lehrperson einzelne Schülerinnen oder Schüler-Gruppen berät, unterstützt, begleitet. Bei *LBE* steht die Lehrperson nicht im Zentrum der Klasse.

TEA: Lehrerin geht eigenen Aufgaben nach

Während die Schüler arbeiten, ist die Lehrperson einer eigenen Aufgabe zugewandt. Es finden keine Interaktionen mit Schülern statt.

TLEP: Lehrerin ist Lernpartnerin eines Schülers

Die Lehrperson nimmt an Partner- oder Gruppenarbeiten als Lernpartnerin teil. Sie ist während dieser Sequenz nicht Lernbegleiterin (wie bei *LBE*), sondern Lernpartnerin, die sich in eine Schülerrolle versetzt. Diese Rolle wird meist wahrgenommen, damit das soziale Lernen anzahlmässig „aufgeht".

ORG: Organisation; aufräumen, einrichten

Die *ORG*-Phase ist dezentriert und es überwiegen die Mikro-Codes *LB1*, *LB2* und *IN6*. D.h. die Schüler richten sich nach einer Instruktion für eine neue Unterrichtsphase ein bzw. beenden die bisherige.

2. Mikrocodes

IN: An die ganze Klasse gerichtete Instruktionen

Die Kategorie *IN* wird in die Codes *IN0 bis IN7* aufgefächert. Sie betreffen die individuellen Lernmöglichkeiten, welche eine Instruktion offen legt. Falls die Instruktion die Arbeit an Aufgaben in einem sozialen Verband vorschreibt, ist dies mit einem „*S*" im Code vermerkt.

IN beinhaltet neben der eigentlichen Instruktion einer Aufgabenstellung auch Fragen oder Bemerkungen zur Aufgabenstellung, stets an die ganze Klasse gerichtet. *IN0* bis *IN4* schliessen in der Regel eine *FFE*-Phase ab, d.h. sie leiten in eine dezentrierte *LBE*-Phase über. Die Codes *IN0* bis *IN5* beziehen sich auf einen mathematisch-operativen Kern. *IN6* und *IN7* beinhalten Instruktionen mit organisatorischen oder aufgabentechnischen Inhalten.

IN0: Natürliche Differenzierung, qualitativer Art

Die Instruktionen unter *IN0* regen Lernaktivitäten an, die qualitativ differenzierbar sind. Sie betreffen die Abstraktionsebene und die Komplexität der Operationen. *INS0* entspricht *IN0,* zusätzlich ist die Instruktion an einen Sozialverband gerichtet, welcher die Operationen gemeinsam vollzieht.

IN1: Instruktion mit natürlicher Differenzierung, qualitativer und quantitativer Art

Die Differenzierung ist natürlich, wenn sie vom Schüler ausgeht. Der Schüler hat die Möglichkeit, seinen Fähigkeiten und Fertigkeiten entsprechend eine Aufgabenstellung anzupacken.

Qualitativ meint, dass der Schüler die Aufgabenstellung mit einfacheren oder schwierigeren Operationen angehen kann. Gleichzeitig hat er die Möglichkeit, die Operationen auf unterschiedlichen Repräsentationsebenen (enaktiv, ikonisch, symbolisch) zu lösen. Damit *IN1* den qualitativen Aspekt beinhaltet, müssen entweder die handelnden und bildhaften Möglichkeiten des Operationsvollzugs explizit erwähnt, in der Aufgabe enthalten oder in der Klasse „usus“ sein, d.h. von den Schülern selbstverständlich herangezogen werden. Es ist also möglich, dass *IN1* (und *IN0*) erst nach dem Operationsvollzug entsprechend codiert werden können.

Quantitativ meint bei *IN1* zweierlei: Die Schüler können unterschiedlich viele Aufgaben in einem beliebig grossen Zahlenraum lösen. *IN1* codiert die breiteste Differenzierung, die eine Instruktion offen legen kann. *INS1* entspricht *IN1*, zusätzlich ist die Instruktion aber an einen Sozialverband gerichtet, der die Operationen gemeinsam vollzieht.

IN2: Instruktion mit natürlicher Differenzierung, den Zahlenraum betreffend

Der Schüler kann die gestellten Aufgaben in einem selber gewählten Zahlenraum angehen. Die Operationstypen und die Anzahl Operationen, welche die Schüler lösen, gibt die Lehrerin verbindlich vor *INS2* entspricht *IN2*, zusätzlich ist die Instruktion aber an einen Sozialverband gerichtet.

IN3: Instruktion mit natürlicher Differenzierung, die verfügbare Zeit oder die Anzahl Aufgaben gehen vom Schüler aus

Die Operationen und der Zahlenraum werden von der Lehrerin verbindlich vorgegeben. *INS3* entspricht *IN3*, zusätzlich ist die Instruktion aber an einen Sozialverband gerichtet.

IN4: Instruktion mit innerer Differenzierung

Darin sind die Varianten *IN1* bis *IN3* möglich, die Lehrperson nimmt aber die Differenzierung selber vor.

Die Instruktion *IN4* beinhaltet eine Differenzierung, welche die Lehrerin verbindlich vorgibt. Die Schüler und Schülerinnen haben keine Wahlmöglichkeiten. *INS4* entspricht *IN4*, zusätzlich ist die Instruktion aber an einen Sozialverband gerichtet.

IN5: Instruktion als enge und verbindliche Aufgabenstellung

Es besteht kein Spielraum für eine Differenzierung. Die instruierten Aufgaben sind für alle Schüler verbindlich. Falls die Lehrperson im Anschluss an die Instruktion *IN5* eine weitere, individuelle Instruktion gibt, wird sie als Lernbegleitung (*LB)* codiert.

IN5 ist ein häufig vergebener Code wärend *FFE*-Phasen, d.h. die Lehrperson gibt einen „roten Denkfaden“ vor, dem die Schüler zu folgen haben. *INS5* entspricht *IN5*, die Instruktion ist aber an einen Sozialverband gerichtet.

IN6: Organisatorischer Inhalt, an die ganze Klasse gerichtet

Dazu gehören diejenigen Instruktionen, Aussagen, Fragen, Bemerkungen an die Klasse, welche die räumliche, zeitliche und soziale *Organisation* betreffen. Der Inhalt liegt ausserhalb der eigentlichen Lernaufgabe, der Aufgabenkulisse und -durchführung.

„Überleitungen“ werden z.B. als *IN6* codiert: „So, jetzt könnt ihr beginnen! – Jetzt kommt ihr nach vorne in den Kreis! – Den Namen schreibt ihr oben aufs Blatt!“

IN7: Die Lehrerin äussert sich zur Aufgabenkulisse und -durchführung, an die ganze Klasse gerichtet

Mit Aufgabenkulisse ist die „Verpackung“, also die äussere Form der Darstellung oder Durchführung der Aufgabe gemeint. Beispiele: „Die oberen Aufgaben müsst ihr ins Heft, die unteren aufs Blatt lösen! – Die Zahlen schreibt ihr genau ins Häuschen!“

IN7 beinhaltet Aussagen, die während der Lernbegleitungsphase *LBE* (an einzelne Schüler gerichtet) als *LB3* (Aufgabenkulisse und Aufgabentechnik) codiert werden.

LB: Lernbegleitung

LB kategorisiert Äusserungen der Lehrerin während dezentrierten Unterrichtsphasen. Die an einzelne Schüler oder Kleingruppen gerichteten Aussagen, Bemerkungen, Fragen finden ihren Niederschlag in den Codes *LB1* bis *LB7*. Die Zusätze „+/–” bezeichnen, an wen sich die LB-Aussagen richten. „+“ meint, dass sich die Aussage an einen starken Zielschüler richtet, „–“ meint, die Bemerkung gelte einem schwachen Zielschüler. Die Zuordnung in schwache und starke Schüler erfolgte auf Grund der erhobenen Testleistungen zum Zeitpunkt *t2*.

Eine Ausnahme bildet der Code *KLB6*, der inhaltlich *LB6* entspricht (die Lehrerin reisst die Schülerin aus ihrem eigenen Denk- oder Lernweg). Im Unterschied zu *LB6* ist die Aussage bei *KLB6* an die ganze Klasse gerichtet.

LB1: Disziplinarischer Inhalt, an einzelne Schüler gerichtet

Die Variable bezieht sich auf das Verhalten der Schüler. Beispiele: „Arbeite an deinem Platz! – Rede etwas leiser!“ Ebenso wird das „Psst!“ o.ä. mit *LB1* codiert.

„LB1–”: Disziplinarischer Inhalt, an schwachen Zielschüler gerichtet
„LB1+”: Disziplinarischer Inhalt, an starken Zielschüler gerichtet

LB2: Organisatorischer Inhalt, an einzelne Schüler gerichtet

Der Code bezieht sich auf die „äussere“ (materielle, soziale, zeitliche) Organisation. Er hat nichts mit der eigentlichen mathematischen Aufgabe und deren „Kulisse“ oder Aufgabentechnik zu tun. Beispiele: „Hole die Steckwürfel! – Posten 1 ist bei der Wandtafel! – Du kannst am Arbeitsblatt weiter machen! – Nimm die roten und die gelben Stifte!“ Meist ist der Unterschied zwischen *LB1* und *LB2* an der Intonation und am situativen Kontext zu erkennen.

„LB2–”: Wie *LB2*, an schwachen Zielschüler gerichtet
„LB2+”: Wie *LB2*, an starken Zielschüler gerichtet

LB3: Die Lehrerin äussert sich zur Aufgabenkulisse/-technik

Mit Aufgabenkulisse ist die „Verpackung“, also die formale Form der Darstellung und Durchführung der Aufgabe gemeint. Beispiel: „Wenn eine Aufgabe eine gerade Zahl ergibt, darfst du ein Feld mit der roten Farbe ausmalen, wenn eine ungerade Zahl resultiert, nimmst du die grüne Farbe.“ – Die Äusserungen haben nichts mit dem operativen Kern der Aufgabe zu tun.

„LB3–”: Die Lehrerin erklärt einem schwachen Zielschüler eine Aufgabe im Sinne *LB3*
„LB3+”: Die Lehrerin erklärt einem starken Zielschüler eine Aufgabe im Sinne *LB3*

LB4: Eingehen auf Lernwege und -ergebnisse der Schüler

LB4 beinhaltet Aussagen mit einem mathematisch-operativen Kern. Die Lehrperson nimmt zunächst das von Schülern Geschriebene oder Gesagte auf und knüpft mit Fragen oder Impulsen daran an. Sie versucht herauszufinden, wo der Schüler steht und wie sein Lern- und Denkweg verlief. Die Lehrperson reagiert auf ein „Nicht-weiter-kommen“ oder eine „falsche“ Lösung nicht mit Handlungsanweisungen oder Rezepten. Beispiel: „Erkläre mir, wie du gerechnet hast! – Zeige mir am Zwanzigerfeld, wie du das machst!“

Die Begleitung zur Selbstkorrektur des Schülers ist charakteristisch für *LB4*. Der „rote Faden“ der Begleitung orientiert sich also am Denkfaden des Schülers, der möglichst nicht reissen soll. *LB4* ist die Kernvariable einer konstruktivistisch orientierten Lernbegleitung. Hinweis: *LB4* bezieht sich auf einen mathematisch-operativen Kern: z.B. zählen, operieren, oder vergleichen.

„LB4–”: Wie *LB4*, bezogen auf schwachen Zielschüler
„LB4+”: Wie *LB4*, bezogen auf starken Zielschüler

LB5: Die Lehrerin ermuntert, lobt oder bestätigt die Schüler

LB5 beinhaltet eine positive Verstärkung des individuellen Arbeitens (während *LBE*). Die Lehrperson läuft an einem Schüler vorbei und bemerkt z.B.: „gut, mhm“. Mit *LB5* ist nicht gemeint, dass die Lehrerin ein richtiges Rechenresultat bestätigt.

„LB5–”: Ermunterung, Lob, Bestätigung der schwachen Zielschüler
„LB5+”: Ermunterung, Lob, Bestätigung der starken Zielschüler

LB6: Die Lehrerin reisst den Schüler aus seinem eigenen Lernweg und bindet diesen an einen eigenen Denk- oder Lösungsweg

LB6 ist die komplementäre Kategorie zu *LB4*. Ich übersetze das dort genannte Beispiel mit einem möglichen Inhalt von *LB6*: „Das ist falsch gerechnet. Lege fünf und fünf Chips auf den Streifen und zähle!“

Die Inhalte von *LB6* beziehen sich auf einen mathematisch-operativen Kern. Die Gedanken der Lehrperson und das Wissen des „richtigen Resultates“ oder „richtigen Lösungsweges“ stehen im Vordergrund. Fragen und Bemerkungen sind ohne Bezug zum Ergebnis oder Lösungsweg des Schülers. Die Lehrperson vollzieht die Denkoperation und gibt Anleitungen zur Durchführung von Handlungen. Korrekturen erfolgen als Fremdkorrekturen.

„LB6–”: Die Lehrerin reisst einen schwachen Zielschüler aus seinem Lernweg
„LB6+”: Die Lehrerin reisst einen starken Zielschüler aus seinem Lernweg

KLB6: Entspricht LB6, ist aber an die ganze Klasse gerichtet

KLB6 bezieht sich ausschliesslich auf mathematisch-operative Kerne. Der Code steht für „belehrende“ Aussagen, die an die ganze Klasse gerichtet sind. Die Lehrperson trägt eine „Tatsache“ vor und führt sie nicht weiter aus.

LB7: Die Lehrerin gibt eine neue, individuelle Instruktion, sie macht eine Instruktionswiederholung, stellt eine Frage oder fordert auf

Im Unterschied zu *LB3* (Erklären der Aufgabenkulisse) geht es darum, dass die Lehrerin dem Schüler eine individuelle, eventuell vereinfachte Instruktion gibt oder die Instruktion (*IN0-5*) in anderen Worten formuliert. Die Kategorie bezieht sich auf den mathematisch-operativen Kern und nicht auf die „Aufgabenverpackung“ (wie bei *LB3*).

„LB7–”: Wie *LB7*, aber auf schwache Zielschüler bezogen
„LB7+”: Wie *LB7*, aber auf starke Zielschüler bezogen

LB8: Thema ausserhalb des mathematisch/organisatorischen Inhaltes

Die Aussagen der Lehrerin beziehen sich nicht auf das Unterrichtsthema. Beispiele: „Du hast eine tolle Farbstiftschachtel! – Warte, ich hole dir einen Verband! – Schau, vor dem Fenster, da ist ein Vogel!“

„LB8–”: Wie *LB8*, an schwachen Zielschüler gerichtet
„LB8+”: Wie *LB8*, an starken Zielschüler gerichtet

LB9: Kurze emotionale Unterstützung, Aufgabenbestätigung

Die Lehrerin wiederholt die Antwort des Schülers oder bestätigt sie mit „gut, mhm“ etc. Die Bestätigung bezieht sich auf einen mathematischen Inhalt. Würde sich die Rückmeldung auf die Aufgabenkulisse beziehen, käme *LB3* zum Zug. Die Lehrerin fragt z.B.: „Sieben und acht?“ – Der Schüler antwortet: „Fünfzehn.“ – Die Lehrerin bestätigt: „Genau.“ (Code *LB9*) – Eine andere Reaktion: „Welche Seite musst du aufschlagen?“ Schülerantwort: „Seite 5.“ Rückmeldung: „Genau.“ (Code *LB2*)

SAM: Schüler-Beitrag, aussermathematisch

Aussermathematisch heisst, dass sich der Beitrag auf die Aufgabenverpackung oder einen anderen, z.B. organisatorischen Inhalt richtet. Unter *SAM* fallen Schüler-Antworten, die sich nicht auf einen mathematisch-operativen Kern beziehen.

Wenn ein Schüler einen Auftrag vorliest, wird dies mit *SAM* codiert, weil die Schüler in der ersten Klasse beim Vorlesen noch stark mit dem Leseprozess beschäftigt sind. Die denkerische Auseinandersetzung mit der Aufgabe folgt meistens anschliessend. Beispiel für *SAM*: „Diese Aufgabe ist leicht/kann ich gut.“

SHAM**:** Beitrag eines starken Zielschülers, aussermathematisch
STAM**:** Beitrag eines schwachen Zielschülers, aussermathematisch

SMA: Schüler-Beitrag, mathematisch

Ein Schüler-Beitrag im Sinne von *SMA* bezieht sich auf einen mathematisch-operativen Kern und zeichnet sich durch eine eigenständige Entscheidung aus, ist also nicht suggestiv vorgespurt.

SHMA**:** Beitrag eines starken Zielschülers, mathematisch
STMA**:** Beitrag eines schwachen Zielschülers, mathematisch

Anhang C

Instruktionen zu Vor- und Nachtest

Test-Durchführung

Es wäre günstig, den Test in Kleingruppen (geteilten Klassen) durchzuführen. Die Schülerinnen und Schüler brauchen einen Bleistift und die Testblätter. Die Lehrperson gibt mündliche Erklärungen zu den Fragestellungen (gemäss Instruktion) und bietet keine weiteren Hilfen an.

Die Aufgaben sind von den Schülern einzeln zu lösen!

Angaben

Jedes Testbündel wird mit Name und Vorname des Schülers/der Schülerin beschriftet (mit einem Vermerk zum Geschlecht, wenn dieses auf Grund des Vornamens nicht eindeutig hervorgeht).

Die Klassensätze sind mit dem Testdatum und der ungefähren Testdauer zu versehen.

Test-Data

Der erste Test sollte in der ersten Schulwoche, der zweite zwischen dem 14. und 25. Juni 1999 durchgeführt werden.

Vorbemerkungen zu den beiden Test-Instruktionen

Möglicher Lehrerinnen-Kommentar zur Eröffnung der Teststunde: „Ich gebe euch einige Aufgaben, damit ich erfahre, was ihr schon alles könnt bzw. in diesem Jahr gelernt habt. Löst die Aufgaben für euch alleine, sonst erfahre ich nicht, wer was schon kann“.

Eine vorbesprochene stille Beschäftigung für Kinder, die fertig sind, könnte günstig sein.

Die Lehrperson darf die Instruktion dialektal übersetzen.

Vortest

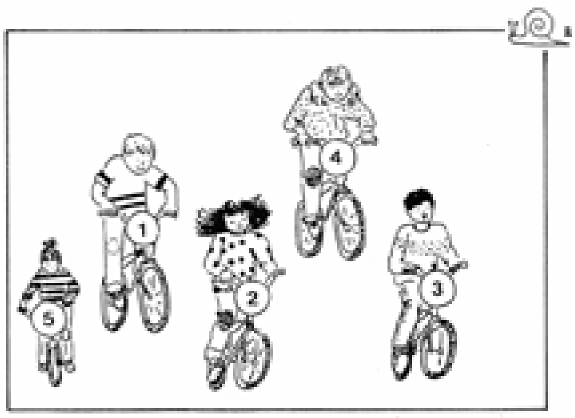
Im Original tragen die einzelnen Bilder die Masse 15 x 10 cm, je 2 Bilder sind auf einer Seite abgebildet.

1. Aufgabe

„Auf dem Bild seht ihr drei Häuser. Malt ein Kreuz auf das höchste Haus!“

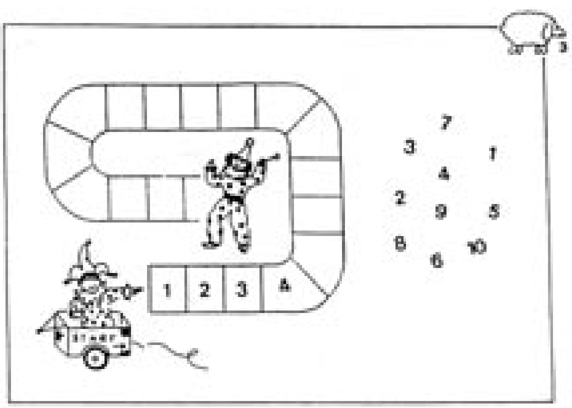
2. Aufgabe

„Auf dem Bild seht ihr fünf Kinder mit Velos. Malt ein Kreuz auf das Schild mit der Nummer 3!“



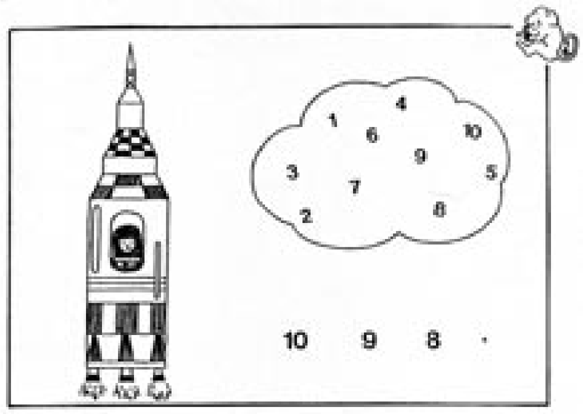
3. Aufgabe

„Ihr seht ein Leiterlispiel. Einige Zahlen sind schon aufgeschrieben. Malt ein Kreuz auf die nächst folgende Zahl!“



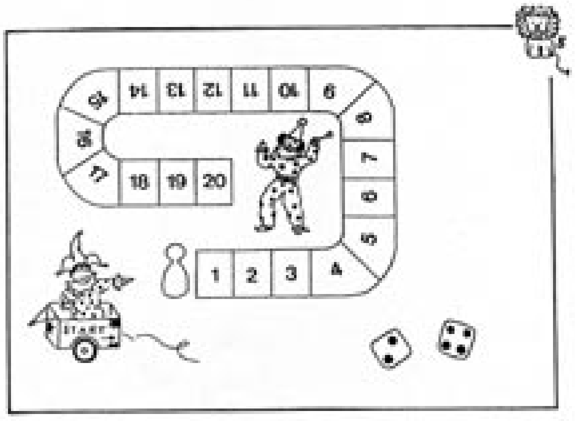
4. Aufgabe

„Auf dem Bild ist eine Rakete abgebildet. Bevor sie in den Weltraum abhebt, zählt man einen Countdown“ (Zur Verdeutlichung eventuell einen Countdown vorzählen: 5, 4, 3, 2, 1) „Auf dem Bild hat jemand angefangen zu zählen. 10, 9, 8 ... Welche Zahl kommt jetzt? Kreuzt sie an!“



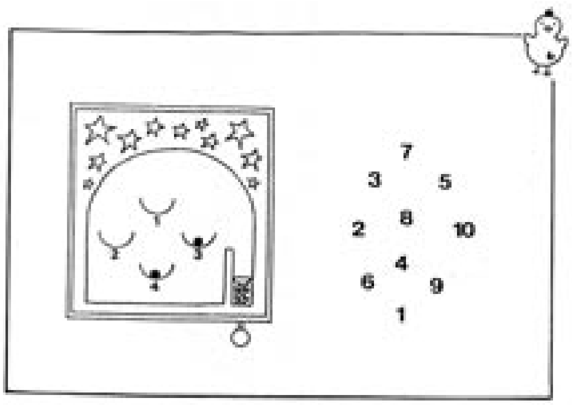
5. Aufgabe

„Ihr seht ein Leiterlispiel. Jemand hat mit zwei Würfeln gewürfelt. Kreuzt das Feld an, auf welchem diese Person ankommt!“



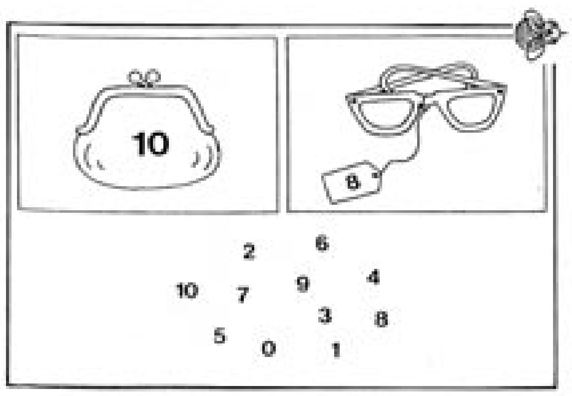
6. Aufgabe

„Ihr seht einen Flipperkasten.
Da kann man Punkte gewinnen. Jemand hat es mit zwei Kugeln versucht und hat 3 und 4 Punkte gewonnen. Wie viele Punkte sind das zusammen? Malt ein Kreuz auf diese Zahl!“



7. Aufgabe

„Im Portemonnaie sind 10 Franken. Auf dem Preisschild steht, dass die Brille 8 Franken kostet. Kreuzt die Anzahl Franken an, die euch nach dem Kauf übrig bleiben!“

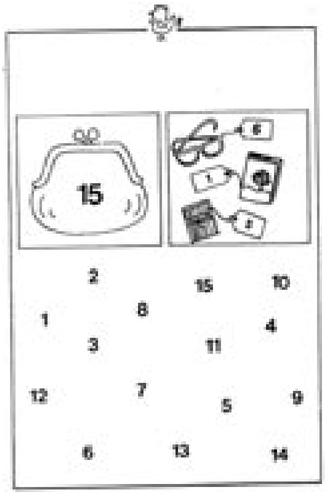


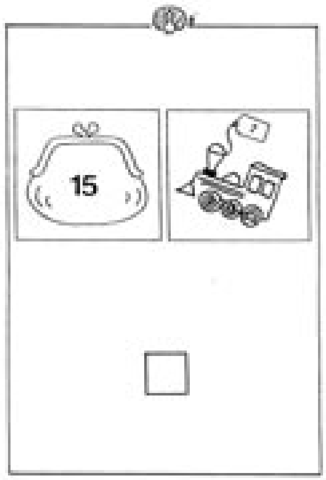
8. Aufgabe

„Im Portemonnaie sind 15 Franken. Ihr dürft selber auswählen, was ihr kauft. Kreuzt an, was ihr kauft und kreuzt nachher an, wie viel Geld noch im Portemonnaie verbleibt!“

9. Aufgabe

„Im Portemonnaie sind wieder 15 Franken. Die Lokomotive kostet 7 Franken. Wie viel bleibt übrig? Schreibt die Anzahl Franken ins Kästchen!“



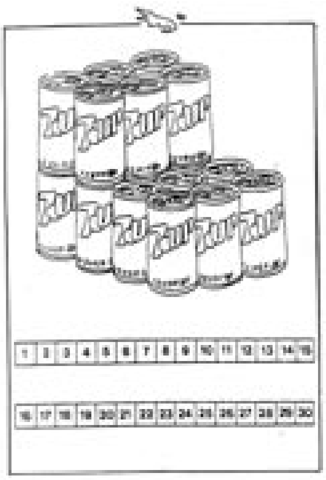


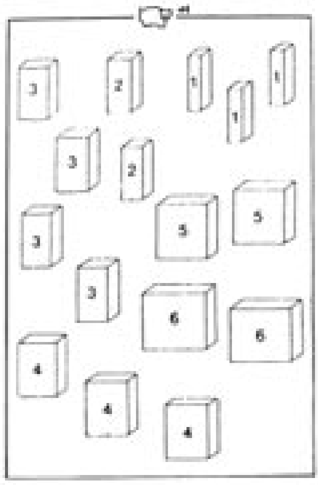
10. Aufgabe

„Ihr seht Getränkedosen. Ihr könnt nicht alle sehen. Kreuzt die Anzahl aller Dosen auf dem Zahlenband an!“

11. Aufgabe

„Ihr seht Kerzenschachteln. Darin befinden sich unterschiedlich viele Kerzen. Wie viele in einer Schachtel sind, könnt ihr an den Zahlen ablesen. Ihr dürft Schachteln auswählen und ankreuzen, die zusammen 12 Kerzen beinhalten!“



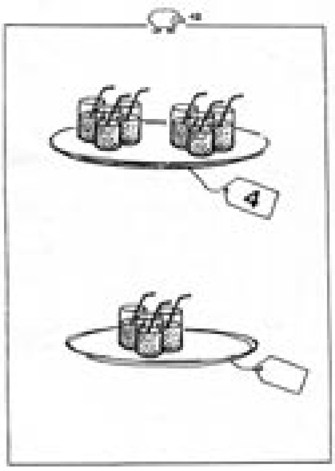


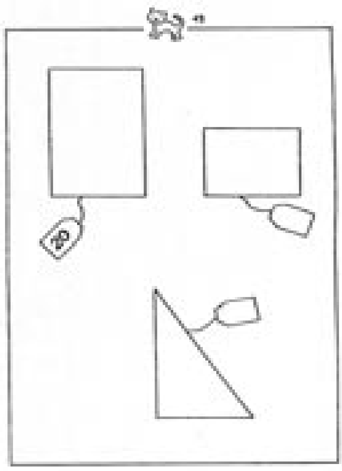
12. Aufgabe

„Ihr seht einen Teller mit 6 Gläsern Eistee, welche 4 Franken kosten. Schreibt ins Preisschild des Tellers mit den 3 Gläsern Eistee, wie viel sie kosten!“

13. Aufgabe

„Ihr seht drei verschieden grosse Stücke Pizza. Das grosse kostet 20 Franken. Schreibt die Preise für die kleineren Stücke in die leeren Preisschilder!“



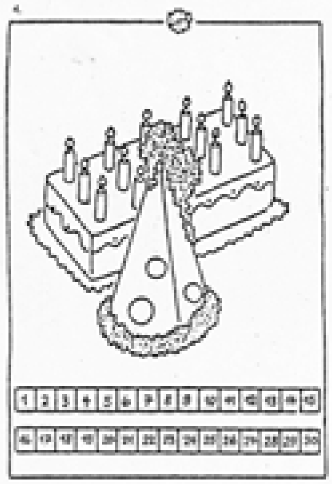


Nachtest

Im Original tragen die einzelnen Bilder die Masse 15 x 10 cm, je 2 Bilder sind auf einer Seite abgebildet.

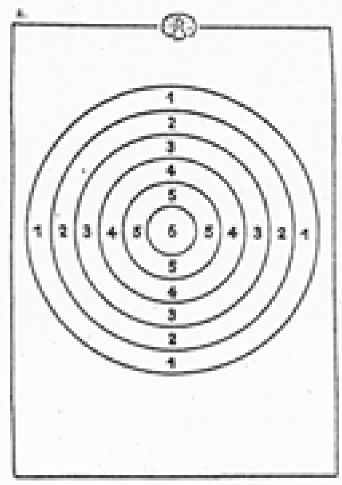
1. Geburtstagskuchen

„Hier hat jemand zum Geburtstag einen Kuchen bekommen. Auf dem Kuchen kannst du nicht alle Kerzen sehen. Weisst du, wie viele Kerzen auf dem Kuchen sind? Kreuze die richtige Zahl an!“



2. Pfeile werfen

„Anna hat mit den Pfeilen 10 Punkte erreicht. Mache dort ein Kreuz, wo ihre Pfeile gelandet sind.“ Wenn die Kinder fragen, wie viele Pfeile es sind:
„Ihr dürft selber wählen!“

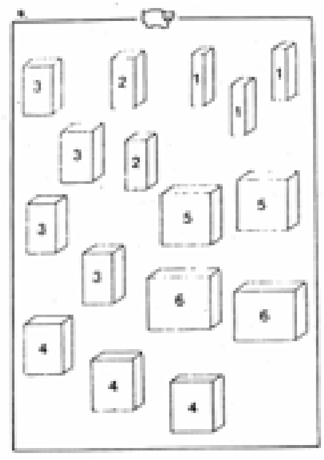


3. Pfeile werfen

Gleiche Aufgabe wie 2.), Paul hat aber 12 Punkte gesammelt.

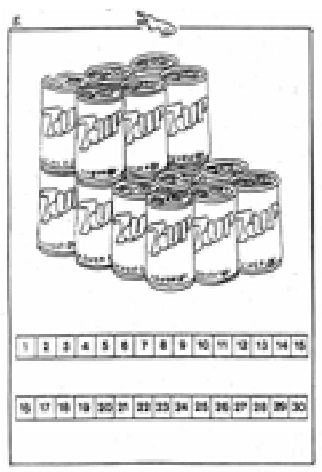
4. Kerzenaufgabe

„Das sind Kerzenschachteln. Es hat jeweils so viele Kerzen darin, wie auf der Schachtel geschrieben steht. Kaufe 12 Kerzen, wähle die Schachteln selber aus!“



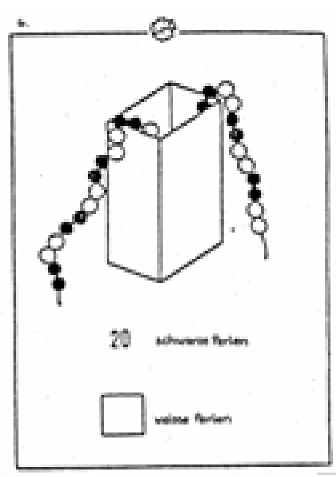
5. Büchsen

„Wie viele Büchsen stehen hier? Du kannst sie nicht alle sehen. Weisst du trotzdem, wie viele Büchsen es sind? Kreuze die richtige Zahl an!“



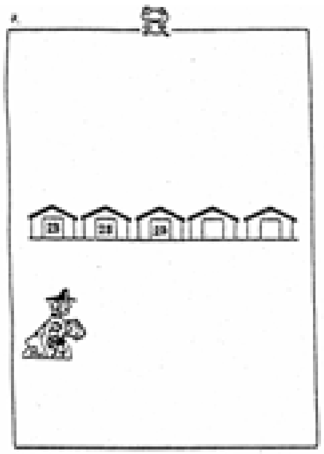
6. Perlenkette

„Die Perlenkette ist schön gemacht, sie hat 20 schwarze Perlen. Du kannst sie nicht alle sehen. Weisst du, wie viele weisse Perlen auf der Kette sind?“



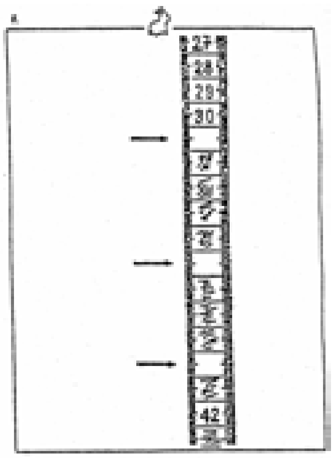
7. Hausnummern

„23, 25, 27. Setze die Reihe fort und schreibe die fehlenden Zahlen auf die leeren Plätze!“



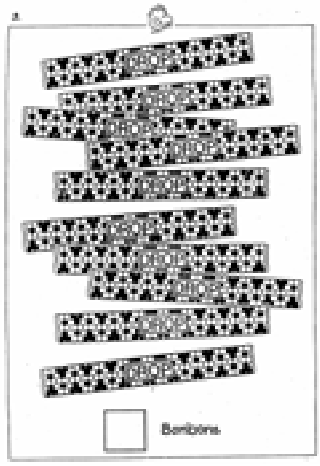
8. Messband

„Hier siehst du ein Stück Messband (einen „Centimeter“). Es sind fast keine Zahlen mehr drauf. Weisst du, welche Zahlen fehlen? Fülle die leeren Felder mit den Pfeilen aus!“



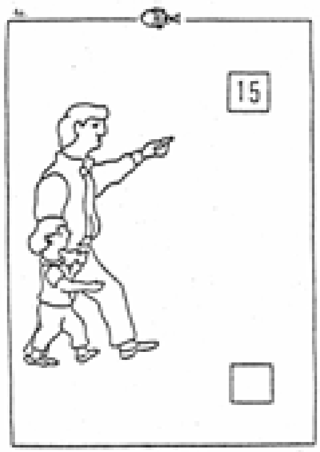
9. Drops

„In jeder Rolle sind 10 Bonbons. Wie viele Bonbons sind darin? Schreibe die Zahl darunter!“



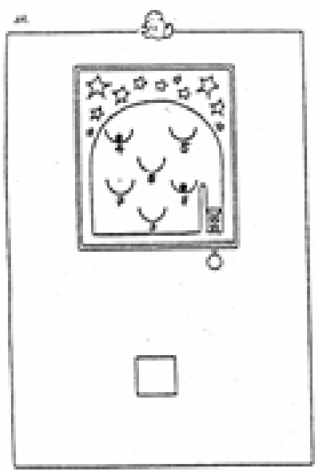
10. Schrittlängen

„Papa misst den Garten und hat 15 Schritte gezählt. Sein Bub misst auch: Wie viele Schritte macht er?“



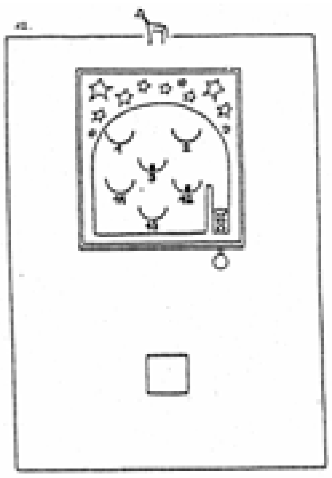
11. Flipper 1

„Beim Flipperspiel wurden zwei Kugeln abgeschossen. Wie viele Punkte sind das zusammen?“



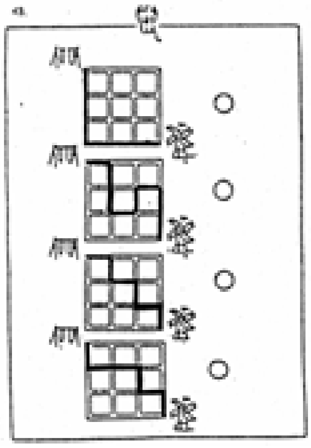
12. Flipper 2

Gleiche Aufgabe wie 11.), aber mit anderem Ergebnis.



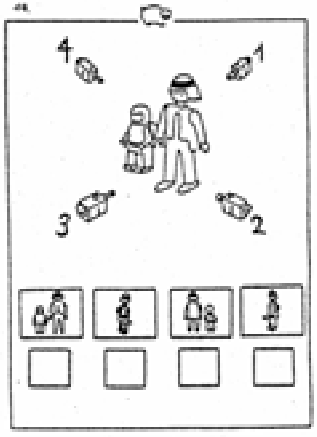
13. Der längste Weg

„Im Spielgarten kannst du verschieden von der Schaukel zur Mühle gelangen. Kreuze den längsten Weg an!“



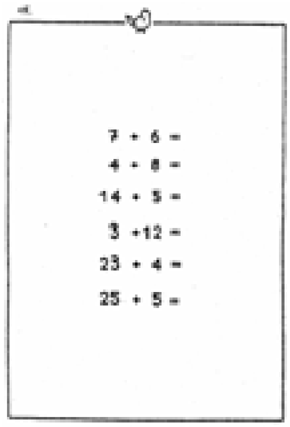
14. Vier Ansichten

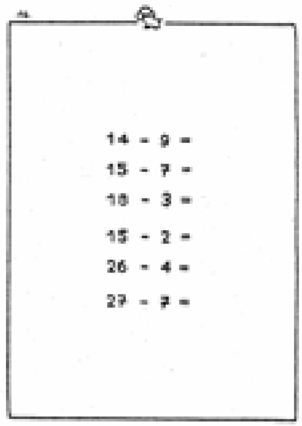
„Auf dieser Seite siehst du ein Playmobil- und ein Legomännchen. Von welchem Foto-Apparat stammt welches Bild? Schreibe die Nummern der vier Apparate unten in die Kästchen!“

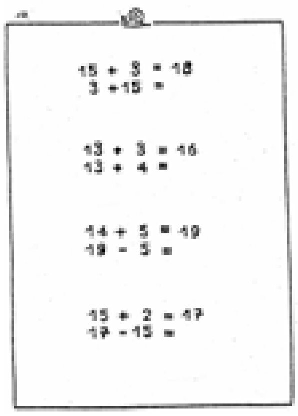


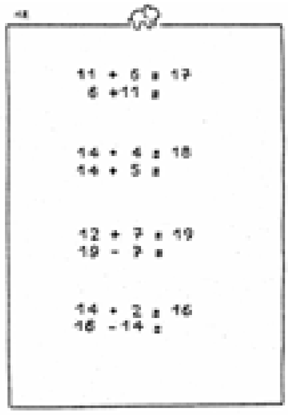
15. bis 18. Kannst du schon rechnen?

„Schau beim Vögelchen, die Aufgaben sind zum Zusammenzählen. Schau beim Hund, die sind zum Abzählen.“
„Schau bei der Schnecke und beim Elefanten: Je zwei Rechnungen gehören zusammen, die zweite sollst du ausrechnen. Schau aber auch die erste an.“









Prognosen der Vortestresultate

„Versuche, für jede Aufgabe zu prognostizieren, wie viele Schüler und Schülerinnen deiner Klasse die Aufgabe richtig lösen. Schicke mir das Prognoseblatt bitte zurück, bevor du den Test durchführst."

Anzahl Schüler deiner Klasse: ❑ **Name:** ______________________

1. Aufgabe:
„Auf dem Bild seht ihr drei Häuser. Malt ein Kreuz beim höchsten!"

Diese Aufgabe werden ❑ Schüler richtig lösen.

2. Aufgabe:
„Auf dem Bild seht ihr fünf Kinder mit Velos. Malt ein Kreuz auf das Schild mit der Nummer 3!"

Diese Aufgabe werden ❑ Schüler richtig lösen.

3. Aufgabe:
„Ihr seht ein Leiterlispiel. Einige Zahlen sind schon aufgeschrieben. Malt ein Kreuz auf die nächst folgende Zahl!"

Diese Aufgabe werden ❑ Schüler richtig lösen.

4. Aufgabe:
„Auf dem Bild ist eine Rakete abgebildet. Bevor sie in den Weltraum abhebt, zählt man einen Countdown. Jemand hat bereits mit Zählen begonnen. 10, 9, 8 ... Welche Zahl kommt jetzt?"

Diese Aufgabe werden ❑ Schüler richtig lösen.

5. Aufgabe:
„Ihr seht ein Leiterlispiel. Jemand hat mit zwei Würfeln gewürfelt. Kreuzt das Feld an, auf welchem diese Person ankommt!"

Diese Aufgabe werden ❑ Schüler richtig lösen.

6. Aufgabe:
„Ihr seht einen Flipperkasten. Da kann man Punkte gewinnen. Jemand hat es mit zwei Kugeln versucht und 3 und 4 Punkte gewonnen. Wie viele Punkte sind das zusammen? Kreuzt die richtige Zahl daneben an!"

Diese Aufgabe werden ❑ Schüler richtig lösen.

7. Aufgabe:
„Im Portemonnaie sind 10 Franken. Auf dem Preisschild steht, dass die Brille 8 Franken kostet. Kreuzt die Anzahl Franken an, die euch nach dem Kauf übrig bleiben!“

Diese Aufgabe werden ❑ Schüler richtig lösen.

8. Aufgabe:
„Im Portemonnaie sind 15 Franken. Ihr dürft auswählen, was ihr kauft. Kreuzt an, was ihr kauft und wie viele Franken im Portemonnaie verbleiben!“

Diese Aufgabe werden ❑ Schüler richtig lösen.

9. Aufgabe:
„Im Portemonnaie sind wieder 15 Franken. Die Lokomotive kostet 7 Franken. Wie viel bleibt übrig? Schreibt die Anzahl ins Kästchen!“

Diese Aufgabe werden ❑ Schüler richtig lösen.

10. Aufgabe:
„Ihr seht Getränkedosen, könnt aber nicht alle sehen. Wie viele Dosen sind es? Kreuzt die Anzahl an!“

Diese Aufgabe werden ❑ Schüler richtig lösen.

11. Aufgabe:
„Ihr seht Kerzenschachteln mit unterschiedlich vielen Kerzen darin. Wie viele in einer Schachtel sind, könnt ihr an den Zahlen ablesen. Ihr dürft die Schachteln auswählen und ankreuzen, bis ihr 12 Kerzen eingekauft habt!“

Diese Aufgabe werden ❑ Schüler richtig lösen.

12. Aufgabe:
„Ihr seht einen Teller mit 6 Gläsern Eistee, welche 4 Franken kosten. Schreibt ins Preisschild des Tellers mit den 3 Gläsern Eistee, wie viel sie kosten!“

Diese Aufgabe werden ❑ Schüler richtig lösen.

13. Aufgabe:
„Ihr seht drei verschieden grosse Pizzastücke. Das grosse kostet 20 Franken. Schreibt die Preise für die kleineren Stücke in die leeren Preisschilder!“

Diese Aufgabe werden ❑ Schüler richtig lösen.

Prognosen der Nachtestresultate

„Schätze bei jeder Aufgabe ein, wie viele Schüler und Schülerinnen deiner Klasse die einzelnen Aufgaben richtig lösen. Schicke mir das Prognoseblatt zurück, bevor du den Test durchführst.“

Anzahl Schüler deiner Klasse: ❑ **Name:** ______________________________

1.	**Geburtstagskuchen:**	Diese Aufgabe werden ❑	Schüler richtig lösen.
2.	**Pfeile werfen 1:**	Diese Aufgabe werden ❑	Schüler richtig lösen.
3.	**Pfeile werfen 2:**	Diese Aufgabe werden ❑	Schüler richtig lösen.
4.	**Kerzenaufgabe:**	Diese Aufgabe werden ❑	Schüler richtig lösen.
5.	**Büchsen:**	Diese Aufgabe werden ❑	Schüler richtig lösen.
6.	**Perlenkette:**	Diese Aufgabe werden ❑	Schüler richtig lösen.
7.	**Hausnummern:**	Diese Aufgabe werden ❑	Schüler richtig lösen.
8.	**Messband:**	Diese Aufgabe werden ❑	Schüler richtig lösen.
9.	**Drops:**	Diese Aufgabe werden ❑	Schüler richtig lösen.
10.	**Schrittlängen:**	Diese Aufgabe werden ❑	Schüler richtig lösen.
11.	**Flipper 1:**	Diese Aufgabe werden ❑	Schüler richtig lösen.
12.	**Flipper 2:**	Diese Aufgabe werden ❑	Schüler richtig lösen.
13.	**Längster Weg:**	Diese Aufgabe werden ❑	Schüler richtig lösen.
14.	**Vier Ansichten:**	Diese Aufgabe werden ❑	Schüler richtig lösen.
15.	**Plus rechnen:**	Von diesen Aufgaben lösen 5 oder 6 Rechnungen richtig: ❑ Schüler	
16.	**Minus rechnen:**	Von diesen Aufgaben lösen 5 oder 6 Rechnungen richtig: ❑ Schüler	
17.	**Fertig rechnen:**	Von diesen Aufgaben lösen 3 oder 4 Rechnungen richtig: ❑ Schüler	
18.	**Fertig rechnen:**	Von diesen Aufgaben lösen 3 oder 4 Rechnungen richtig: ❑ Schüler	

Lebenslauf

Am 29. September **1962** erblickte ich als Sohn des Adolf und der Maria Hess-Fust in Niederuzwil (SG) das Licht der Welt. **1982** erwarb ich am Lehrerseminar in Kreuzlingen das Primarlehrer-Diplom. Von **1982** bis **1984** unterrichtete ich in Wängi (TG) eine Werkklasse (7.-9. Schuljahr).

1984 begann ich am Heilpädagogischen Institut der Universität Fribourg das Studium in Schulischer Heilpädagogik und erlangte drei Jahre später das Berufsdiplom.

Von **1988** bis **1990** führte ich mein Studium mit Hauptfach Heilpädagogik (bei Prof. Dr. U. Haeberlin), den Nebenfächern Pädagogik (bei Prof. Dr. F. Oser) und Psychopathologie (bei Prof. Dr. H. Solms) zu einem erfolgreichen Abschluss. In meiner Lizentiatsarbeit stellte ich eine förderdiagnostisch orientierte Lernbegleitung mit Schwerpunkt *Förderung des operativen Denkens* dar. Während und nach dem Studium beteiligte ich mich am schulischen Integrationsprojekt *Heilpädagogische Begleitung in Kindergarten und Regelschule*.

Von **1992** bis **1994** war ich an zwei Kleinklassen im Kanton Zürich tätig.

Von **1994** bis **1997** begleitete ich in den Schulgemeinden Sitterdorf und Zihlschlacht (TG) als Schulischer Heilpädagoge Regelschulklassen und Kindergärten.

Von **1994** bis **1999** engagierte ich mich im Rahmen der Thurgauischen Lehrerinnen- und Lehrerweiterbildung in der Projektgruppe Mathematik.

Seit **1994** leite ich kantonale und schweizerische Lehrerinnen- und Lehrer-Weiterbildungskurse zu den Themen *kognitive Entwicklung, Mathematik-Didaktik auf der Basisstufe*, *Dyskalkulie* und *Lernbegleitung von Lehrpersonen.*

1997 schloss ich mit Susanne Breitenmoser den Bund der Ehe. Im Januar **2000** erblickte unsere Tochter Tabea und im August **2001** unser Sohn Damian das Licht der Welt.

Von **1997** bis **1999** übernahm ich am Pädagogischen Institut Basel-Stadt einen Lehrauftrag für Mathematik-Didaktik und entwickelte mit der Primarschulgemeinde Weinfelden ein Konzept zur schulischen Integration.

Von **1999** bis **2002** unterrichtete ich am Lehrerseminar St. Michael in Zug die Fächer Pädagogik, Psychologie, Allgemeine Didaktik, Heilpädagogik, Mathematik-Didaktik und ich beteiligte mich an der Praxisbegleitung.

Seit **2002** bin ich an den Schulen St. Michael in Zug als Ausbildungsleiter und Dozent eines Zusatzqualifikationsstudiums für Kindergartenlehrpersonen tätig. Ich unterrichte in Erziehungswissenschaften und Mathematik-Didaktik. Ebenfalls seit 2002 doziere ich am Institut für Schulische Heilpädagogik Luzern mit Schwerpunkt Fächerintegrierte Heilpädagogik.

Unterägeri, im Sommer 2002 Kurt Hess